

Alkalmazott matematikai lapok

1986/1-2

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

12.

KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI
TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ

PRÉKOPA ANDRÁS

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTES

ARATÓ MÁTYÁS

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

BENCZUR ANDRÁS, CSISZÁR IMRE, DEMETROVICS JÁNOS, FARKAS MIKLÓS,
GALÁNTAI AURÉL, GYIRES BÉLA, HATVANI LÁSZLÓ, HEPPES ALADÁR,
KÁTAI IMRE, KIS OTTÓ, MAROS ISTVÁN, TANDORI KÁROLY, TUSNÁDY GÁBOR,
VARGA LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS (technikai szerkesztő)

MUNKATÁRSÁK

BAJCSAY PÁL, BALLA KATALIN, BÉKÉSSY ANDRÁS, CSÁKI PÉTER,
CSIRIK JÁNOS, DÉNES JÓZSEF, DÖMÖLKI BÁLINT, ELBERT ÁRPÁD,
FORGÓ FERENC, GÉCSEG FERENC, GERGELY JÓZSEF, GESZTELYI ERNŐ,
GYÖRFFY LÁSZLÓ, KLAFSZKY EMIL, KÓSA ANDRÁS, KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA,
LÁSZLÓ ZOLTÁN, MIKOLÁS MIKLÓS, MOGYORÓDI JÓZSEF, NÉMETH GÉZA,
NEMETZ TIBOR, RÉVÉSZ PÁL, RÓZSA PÁL, STAHL JÁNOS, SZÉP JENŐ,
TANKÓ JÓZSEF, TOMKÓ JÓZSEF, TŐKE PÁL, VINCZE ENDRE

XII. kötet 1—2. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Kiadóhivatal: 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztő bizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Prékopa András, főszerkesztő
1502 Budapest, Kende u. 13—17.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 128 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—01 283), *Stúdium* (1368 Budapest, Váci utca 22., Tel.: 185-881) és a *Magiszter* 1052 Budapest, Városház utca 1., Tel.: 382-440) Akadémiai Kiadó Könyvesboltjaiban, külföldi megrendelések a Kultúra Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

MAGYAR MÓDSZER TÍPUSÚ ALGORITMUSOK LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

KLAFSZKY EMIL—TERLAKY TAMÁS

Miskolc

Budapest

Cikkünkben két új algoritmust közlünk lineáris programozási feladatok megoldására. Ezek a módszerek a *Magyar Módszer* és a *véges criss-cross módszer* alapötletét használják fel. DANTZIG—FORD—FULKERSON [3] primál-duál módszeréhez hasonlóan egy (primál vagy duál) megengedett megoldást javítunk fokozatosan, miközben TERLAKY [9, 10] criss-cross módszerét használjuk az adódó részfeladatok megoldására. Mindkét algoritmus végességét bizonyítjuk.

Megmutatjuk, hogy algoritmusaink speciális eseteiként adódik a primál, illetve duál szimplex módszer azon változata, mikor a ciklizálás elkerülésére degenerált esetben a BLAND [2] féle pivotálási szabályt alkalmazzuk. Így eljárást adunk arra is, miként származtatható TERLAKY [9, 10] criss-cross módszeréből a primál és duál szimplex módszer.

1. Bevezetés

Algoritmusaink a *Magyar Módszer* ötletén alapulnak, és a *criss-cross* [9] módszer speciális eseteit használják fel az adódó részfeladatok megoldásában. A *Magyar Módszer* ötlete az alábbi: Vegyünk egy primál duál feladatpárt és a hozzá tartozó komplementaritási feltételeket. Egy primál megengedett megoldásból indulva, ehhez komplementáris duál megoldást konstruálunk. Az algoritmus egyes lépéseiben a primál megengedett megoldást úgy javítjuk, a duál megoldást úgy módosítjuk, hogy a primál célfüggvény értéke határozottan javul, miközben a komplementaritási feltételek fennállnak. Ezt a javítást addig ismételjük, míg a duál feltételek is teljesülnek, azaz míg optimális megoldást nem kapunk. Algoritmusainkban a *Magyar Módszer* fent közölt általános alapötletét, nem pedig konkrét gráfelméleti tartalmát használjuk fel. A *Magyar Módszer* elnevezést indokolja az is, hogy a gráfelméleti *Magyar Módszer*ben megszokott *Kőnig—Hall tétel* helyett az ennek megfelelő *Farkas tételt* használjuk algoritmusainkban. A *Farkas tételben* használt alternatívák előállítására a criss-cross módszer speciális eseteit használjuk fel.

Bizonyítjuk algoritmusaink végességét. Bemutatjuk, miként adódik a primál, illetve duál szimplex módszer egy változata a fenti algoritmusok speciális eseteiként. Ezen szimplex módszerek a BLAND [2] féle pivotálási szabályt alkalmazzák degeneráció esetén, nem degenerált esetben csak a bázisba be, illetve onnan kikerülő elem választására alkalmazzuk BLAND [2] szabályát. Ezen szimplex módszerek végessége, BLAND [2] bizonyításának adaptálásával, direkt módon is bizonyítható lenne, ez azonban az általunk közölt általánosabb módszerek végességéből is következik.

Így lehetővé válik számunkra, hogy a *véges criss-cross módszerre* alapozva vezessük be a szimplex módszer különböző variánsait.

Mielőtt az algoritmusok ismertetésére rátérnénk, röviden összefoglaljuk a bázistábla alaptulajdonságait, és közöljük a *criss-cross módszert* definiáló pivotálási szabályt. Jelöléseinkkel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a mátrixokat nagy, a vektorokat kis latin betűkkel jelöljük, valamint a vektorok koordinátáit és a skalárokat a megfelelő görög betűkkel.

Tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatpárt:

$$\begin{array}{ll} \min \mathbf{c}\mathbf{x} & \max \mathbf{y}\mathbf{b} \\ \text{feltéve, hogy } \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} & \text{feltéve, hogy } \mathbf{y}\mathbf{A}\leq\mathbf{c} \\ \mathbf{x}\geq\mathbf{0} & \end{array}$$

Ahol \mathbf{A} tetszőleges m -szer n -es mátrix (feltehetjük, hogy $\text{rang}(\mathbf{A})=m$), $\mathbf{c}=(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\mathbf{x}=(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\mathbf{b}=(\beta_1, \dots, \beta_m)$ és $\mathbf{y}=(\eta_1, \dots, \eta_m)$. Írjuk fel egy adott \mathbf{B} bázisnak megfelelően a bázistáblát. Megjegyezzük, hogy a tábla i -edik során az \mathbf{a}_i bázisvektorhoz tartozó sort értjük, eltérően a szokásos „földrajzi” koordinátáknak megfelelő sorszámozástól.

	a_1	\dots	a_j	\dots	a_n	b	
J_B	\vdots		\vdots		\vdots		
$\left\{ \begin{array}{l} a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{array} \right.$	\dots	τ_{ij}	\dots		ξ_i	B^{-1}	$y^{(i)}$
	\vdots		\vdots		\vdots		
	$\xi_1 - \tau_j$	\dots			ξ_0		y

1. ábra

Jól ismert, hogy $\mathbf{y}=\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{z}=(\zeta_1, \dots, \zeta_n)=\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{y}\mathbf{A}$ és $\zeta_0=\mathbf{c}_B\mathbf{x}_B=\mathbf{y}\mathbf{b}$, ahol \mathbf{c}_B , illetve \mathbf{x}_B a \mathbf{c} , illetve \mathbf{x} vektor J_B -hez tartozó koordinátáit tartalmazza. Legyen $\mathbf{t}^{(i)}=(\tau_{i1}, \dots, \tau_{in})=\mathbf{y}^{(i)}\mathbf{A}$, ha $i\in J_B$ és $\mathbf{t}_{(j)}=(\tau_{(j)1}, \dots, \tau_{(j)n})$, ha $j\notin J_B$, ahol

$$\tau_{(j)i} = \begin{cases} \tau_{ij}, & \text{ha } i\in J_B \\ -1, & \text{ha } i=j \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

Az alábbiakban közölt definíciók, észrevételek jól ismertek, illetve könnyen ellenőrizhetők. Bizonyításukra most nem térünk ki, a bizonyítások megtalálhatók például PRÉKOPA ANDRÁS [8] könyvében.

1.1. DEFINÍCIÓ. Az \mathbf{a}_i vektor $i\in J_B$ esetén *nem primál megengedett*, ha $\xi_i<0$.

1.2. DEFINÍCIÓ. Az \mathbf{a}_j vektor $j\notin J_B$ esetén *nem duál megengedett*, ha $\zeta_j-\gamma_j>0$.

1.3. Megjegyzés. Ha \mathbf{x} primál megengedett, \mathbf{y} duál megengedett megoldás, és $(\mathbf{y}\mathbf{A}-\mathbf{c})\mathbf{x}=0$, akkor \mathbf{x} és \mathbf{y} optimális megoldások. (Függetlenül attól, hogy bázis-megoldások-e vagy sem).

1.4. Megjegyzés. Ha $\xi_i<0$ és $\mathbf{t}^{(i)}\geq\mathbf{0}$ valamely $i\in J_B$ esetén, akkor nem létezik primál megengedett megoldás.

1.5. *Megjegyzés.* Ha $\zeta_j - \gamma_j > 0$ és $t_{(j)} \leq 0$ valamely $j \notin J_B$ esetén, akkor nem létezik duál megengedett megoldás.

1.6. *Megjegyzés.* Ha x egy primál megengedett megoldás és egy adott bázis esetén $t_{(j)} \leq 0$ valamely $j \notin J_B$ mellett, akkor $x - \vartheta t_{(j)}$ szintén primál megengedett megoldás minden $\vartheta \geq 0$ esetén. Ha $t_{(j)}$ tetszőleges, akkor $A(x - \vartheta t_{(j)}) = b$ igaz minden $\vartheta \geq 0$ esetén, de $x - \vartheta t_{(j)} \geq 0$ nem feltétlenül áll fenn.

1.7. *Megjegyzés.* Ha y egy duál megengedett megoldás, és egy adott bázis esetén $t^{(i)} \geq 0$ valamely $i \in J_B$ mellett, akkor $y - \vartheta y^{(i)}$ szintén duál megengedett megoldás minden $\vartheta \geq 0$ esetén.

Az alábbiakban a TERLAKY [9, 10] által adott *criss-cross módszert* definiáló pivotálási szabályt közöljük. A módszer végességének bizonyítása a fent említett cikkekben található.

P. Pivotálási Szabály

- I. (a) Ha $x \geq 0$ és $z - c \leq 0$, akkor az 1.3. megjegyzés értelmében optimálisak a megoldásaink.
 - (b) Ha (a) nem áll fenn, legyen $k = \min \{i | \zeta_i < 0 \text{ vagy } \zeta_i - \gamma_i > 0, i = 1, \dots, n\}$.
 - II. (a) Ha $\zeta_k < 0$ és $t^{(k)} \geq 0$, akkor 1.4. megjegyzés értelmében nem létezik primál megengedett megoldás.
 - (b) Ha (a) nem áll fenn, legyen $s = \min \{j | \tau_{kj} < 0, j \notin J_B\}$. Az a_k vektor távozik és az a_s vektor kerül a bázisba.
 - III. (a) Ha $\zeta_k - \gamma_k > 0$ és $t_{(k)} \leq 0$ akkor 1.5. megjegyzés értelmében nem létezik duál megengedett megoldás.
 - (b) Ha (a) nem áll fenn, legyen $r = \min \{i | \tau_{ik} > 0, i \in J_B\}$. Az a_r vektor távozik és az a_k vektor kerül a bázisba.
- A P. Pivotálási szabály által definiált eljárást nevezzük *criss-cross módszernek*.

A *criss-cross módszer* természetesen az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ és az $\{yA \leq c\}$ feladatok megoldására is alkalmas. Ezen speciális eseteket is felfoghatjuk lineáris programozási feladatokként, amikor a c , illetve a b vektor az azonosan zéró vektor. Így a pivotálási szabály III., illetve II. esetének végrehajtására nem kerül sor az egyes eseteknek megfelelően.

Algoritmusainkban ezt a két speciális esetet fogjuk felhasználni az adódó részfeladatok megoldására.

2. Egy primál típusú algoritmus

Egy x primál megengedett megoldást javítunk fokozatosan egy alkalmas bázis-tábla alkalmas $t_{(j)}$ vektora segítségével. A $t_{(j)}$ vektorokat a *véges criss-cross módszer* segítségével generáljuk. Bizonyítani fogjuk, hogy az x megoldás javítására csak véges sok esetben kerülhet sor, s így véges sok lépésben optimális megoldást kapunk, vagy belátjuk, hogy nem létezik duál megengedett megoldás. Tehát eljárásunk véges.

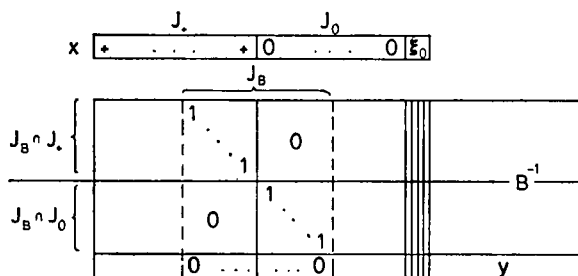
Az algoritmus az alábbi

Legyen adott egy x primál megengedett (nem feltétlenül bázis) megoldás. Osszuk a $J = \{1, \dots, n\}$ index halmazt az alábbi két részhalmazra:

$$J_0 = \{j | \xi_j = 0, j = 1, \dots, n\}$$

$$J_+ = \{j | \xi_j > 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Induljunk ki egy tetszőleges bázistáblából.



2. ábra

Algoritmusunk az alábbi négy lépésből áll.

1. Redukálás.
2. Komplementáris alakra hozás ($\|J_+\|$ csökkentése).
3. Részfeladat megoldása a *criss-cross módszerrel*.
4. Célfüggvény javítás (J_+ és J_0 átrendezése).

A fenti lépések elnevezése előrevetíti az alábbi definíciók szükségességét.

2.1. DEFINÍCIÓ. Egy B bázishoz tartozó bázistáblát az x primál megengedett megoldáshoz viszonyítva *redukálnak* nevezzük, ha $\tau_{ij} = 0$ minden $i \in J_B \cap J_0$, $j \in J_+$ esetén.

2.2. DEFINÍCIÓ. Egy B bázishoz tartozó bázistáblát és egy x primál megengedett megoldást *komplementárisnak* nevezünk, ha

$$\zeta_j - \gamma_j = 0, \quad \forall j \in J_+.$$

Most vizsgáljuk részletesen az egyes lépéseket. A továbbiakban azt mondjuk, hogy az (i, j) helyen pivotálunk, amikor a pivot transzformáció során a_i távozik és a_j jön be a bázisba.

2.1. Redukálás

Ha van olyan $i \in J_B \cap J_0$ és $j \in J_+$, hogy $\tau_{ij} \neq 0$, akkor az (i, j) helyen pivotálva növeljük $J_B \cap J_+$ elemszámát. Mivel $\|J_B \cap J_+\| \leq m$, így véges sok lépésben redukálhatunk egy táblázatot. Megjegyezzük, hogy a redukálás során J_+ és J_0 nem változik.

2.2. Komplementáris alakra hozás

Redukált táblát szeretnénk komplementáris alakra hozni. Ezt az x megoldás sorozatos javításával és a tábla ismételt redukálásával érhetjük el. Ha $\zeta_j - \gamma_j = 0$ minden $j \in J_+$ esetén, akkor a táblázat komplementáris. Ha $\zeta_s - \gamma_s \neq 0$ valamely $s \in J_+$ esetén, akkor igaz az alábbi lemma.

2.1. LEMMA. Ha $\zeta_s - \gamma_s \neq 0$ valamely $s \in J_+$ esetén, akkor az $\bar{x} = x - \vartheta t$ vektor szintén primál megengedett és $\bar{z}_0 = c\bar{x} < cx = z_0$, ahol

$$0 < \vartheta \leq \vartheta_0 = \min \left\{ \frac{\xi_j}{\tau_j} \mid \tau_j > 0 \right\} = \frac{\xi_r}{\tau_r} \quad \text{és} \quad t = (\tau_1, \dots, \tau_n) = t_{(s)} \operatorname{sgn}(\zeta_s - \gamma_s).$$

Bizonyítás. Mivel $tc = |\zeta_s - \gamma_s|$, így $c\bar{x} = cx - \vartheta|\zeta_s - \gamma_s| < cx$ minden $\vartheta > 0$ esetén. 1.6. megjegyzés szerint $A\bar{x} = A(x - \vartheta t) = b$ és ϑ_0 definíciója miatt $x - \vartheta t = x - \vartheta t_{(s)} \operatorname{sgn}(\zeta_s - \gamma_s) \geq 0$, hiszen ha $\tau_j < 0$ akkor ξ_j nő, és ha $\tau_j > 0$ akkor ξ_j éppen $\vartheta = \vartheta_0$ értéknél csökken zérusra, míg a többi koordináta nem negatív. Lemmánkat így bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy $\vartheta_0 = +\infty$ esetén a primál feladat célfüggvénye nem korlátos alulról, azaz nem létezik duál megengedett megoldás.

Alkalmazzuk a 2.1. lemmát valamely $s \in J_+$ mellett, amikor $\zeta_s - \gamma_s \neq 0$ és $\vartheta = \vartheta_0$. Így kapunk egy új $\bar{x} = x - \vartheta_0 t$ primál megengedett megoldást, miközben a primál feladat célfüggvényértéke határozottan csökkent és J_+ -ből legalább egy index átkerül J_0 -ba.

Tehát a következő módon érhetünk el egy x primál megengedett megoldást és egy hozzá viszonyítva redukált, komplementáris bázistáblát.

1. Redukáljuk a táblázatot.

2. Ha van olyan $s \in J_+$, hogy $\zeta_s - \gamma_s \neq 0$ akkor a 2.1. lemma alkalmazásával csökkentjük J_+ elemszámát. Térjünk vissza az 1. lépésre.

Ha $\zeta_j - \gamma_j = 0$ minden $j \in J_+$ esetén, akkor a bázistábla redukált és komplementáris az x megoldáshoz viszonyítva.

Így véges sok lépés után az alábbi x primál megengedett megoldáshoz és a hozzá viszonyítva redukált, komplementáris bázistáblához jutunk. Könnyen igazolható az alábbi lemma.

	J_+				J_0				
x	+	.	.	.	+	0	.	.	0 ξ_0
	J_B								
$J_B \wedge J_+$			1	.	.	0			
					1				B^{-1}
$J_B \wedge J_0$	0		0			1			
								1	
	0	.	.	0	0	.	.	0	y

3. ábra

2.2. LEMMA. A fent adott x és y vektorok optimális megoldásai az alábbi lineáris programozási feladat-párnak.

$$\begin{array}{ll} \min cx & \max yb \\ \text{feltéve, hogy } Ax=b & \text{feltéve, hogy } ya_j \leq \gamma_j \quad j \in J_+ \\ \xi_j = 0 \quad j \in J_0 & \\ \xi_j \geq 0 \quad j \in J_+ & \end{array}$$

Bizonyítás. Nyilván x és y megengedett megoldásai a fenti feladatoknak, valamint $(yA - c)x = 0$ miatt optimálisak is.

Megjegyezzük, hogy véges sok (J_+, J_0) pár van, és így az előző lemmában szereplő feladat-párból is véges sok létezik.

2.3. Részfeladat megoldása

A *criss-cross módszer* alkalmazásával oldjuk meg az $\{ya_j \leq \gamma_j | j \in J_0\}$ részfeladatot a fenti táblázatból, azaz az adott y vektorból indulva. Így a fenti táblán J_0 -ban levő vektorok kerülnek be és távoznak a bázisból. Ez azt jelenti, hogy $\{\xi_j - \gamma_j | j \in J_0\}$ alkotja a célfüggvény sort és a sraffozott résztáblázat tartalmazza a pivot elemeket.

Hajtsuk végre a pivot transzformációkat az egész bázistáblán. Ezek a transzformációk megőrzik a redukált és komplementaritási tulajdonságokat, mivel a J_+ -hoz tartozó oszlopok nem változnak ezen transzformációk során.

A *criss-cross módszer* véges sok lépés után az alábbi két eset valamelyikénél ér véget.

- (a) $\xi_j - \gamma_j \leq 0, j \in J_0$
- (b) $\xi_s - \gamma_s > 0$ valamely $s \in J_0$ esetén és $\tau_{is} \leq 0$ minden $i \in J_B \cap J_0$ -nál.

2.4. A célfüggvény javítása

Ha az (a) esetnél ér véget a *criss-cross módszer*, akkor $Ax=b, x \geq 0, yA \leq c, (yA - c)x = 0$, azaz x és y optimális megoldások.

Ha a *criss-cross módszer* a (b) esetnél ér véget, akkor legyen $\bar{x} = x - \vartheta_0 t_{(s)}$, ahol $\vartheta_0 = \min \left\{ \frac{\xi_i}{\tau_{is}} \mid \tau_{is} > 0, i \in J_+ \right\} = \frac{\xi_r}{\tau_{rs}}$. A 2.1. lemma szerint a primál feladat nem korlátos, ha $\vartheta_0 = +\infty$, és ha $\vartheta_0 < +\infty$, akkor \bar{x} primál megengedett megoldás és $c\bar{x} < cx$.

Készítsük el az új J_+, J_0 halmazokat és térjünk vissza a tábla redukálásához. Vegyük észre, hogy $s \in J_+$ és $r \in J_0$ lesz, és így a redukálást az (r, s) helyen való pivotálással kezdhetjük.

Algoritmusunkat az alábbiakban foglalhatjuk össze.

M.1. Algoritmus

0. lépés — Legyen x primál megengedett megoldás és B egy tetszőleges bázis. Készítsük el a J_+, J_0 index halmazokat és a kiinduló bázistáblát.

1. lépés — Redukáljuk a táblát.

2. lépés — Ha a bázistábla komplementáris, térjünk át a 3. lépésre.

— Ha $\xi_s - \gamma_s \neq 0$ valamely $s \in J_+$ esetén, javítsuk az x megoldást $t_{(s)}$ -sel.

Ha $\vartheta_0 = +\infty$, nincs duál megengedett megoldás. VÉGE.

Ha $\vartheta_0 < +\infty$, akkor $\|J_+\|$ csökken. Térjünk vissza az 1. lépésre.

3. lépés — Oldjuk meg *criss-cross módszerrel* a J_0 által definiált részfeladatot.
4. lépés — Ha $\mathbf{z} - \mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, akkor \mathbf{x} és \mathbf{y} optimális megoldások. VÉGE.
 — Ha $\zeta_s - \gamma_s > 0$ valamely $s \in J_0$ esetén, akkor javítsuk az \mathbf{x} megoldást $\mathbf{t}_{(s)}$ segítségével.
 Ha $\vartheta_0 = +\infty$, nincs duál megengedett megoldás. VÉGE.
 Ha $\vartheta_0 < +\infty$, térjünk vissza az 1. lépésre.

Az alábbi tétel bizonyítja az eljárás végeességét.

2.1. TÉTEL. Az M.1. algoritmus véges sok lépés után véget ér.

Bizonyítás. Az algoritmus minden egyes lépése véges, így csak azt kell bizonyítanunk, hogy véges sokszor kerülhet sor az egyes lépések végrehajtására. Mivel amikor a harmadik lépésre kerül sor, akkor \mathbf{x} és \mathbf{y} optimális megoldása a J_+ , J_0 által definiált feladatoknak (2.2. lemma), véges sok J_+ , J_0 felosztás létezik és mivel a primál feladat célfüggvénye a negyedik lépésben határozottan csökken, így egyetlen részfeladat sem térhet vissza, azaz a harmadik és negyedik lépések végrehajtására csak véges sokszor kerülhet sor. Így az első és a második lépés végrehajtására is csak véges sokszor kerülhet sor, mivel a második lépésben $\|J_+\|$ csökken és a primál célfüggvény csökken. Tételünket bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy az első és a második lépéssel szintén megoldunk egy részfeladatot a harmadik lépéshez hasonlóan.

Az algoritmus végrehajtásához valójában nincs szükségünk a \mathbf{B}^{-1} mátrixra és az \mathbf{y} vektorra, csak ha duál optimális \mathbf{y} megoldásra is szükségünk van.

A 4. fejezetben bemutatjuk, hogy a primál szimplex módszer egy változata miként adódik az M.1. algoritmus speciális eseteként.

3. Egy duál típusú algoritmus

Egy \mathbf{y} duál megengedett megoldást javítunk fokozatosan egy alkalmas bázistábla alkalmas $\mathbf{y}^{(i)}$ vektora segítségével. Az $\mathbf{y}^{(i)}$ vektorokat a *véges criss-cross módszer* segítségével generáljuk. Bizonyítani fogjuk, hogy az \mathbf{y} megoldás javítására csak véges sokszor kerülhet sor, s így optimális megoldást kapunk véges sok lépésben, illetve belátjuk, hogy nem létezik primál megengedett megoldás.

Az algoritmus az alábbi

Legyen \mathbf{y} egy tetszőleges duál megengedett (nem feltétlenül bázis) megoldás. Osszuk a $J = \{1, \dots, n\}$ index halmazt az alábbi két részhalmazra:

$$J_0 = \{j | \mathbf{y}\mathbf{a}_j = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n\}$$

$$J_- = \{j | \mathbf{y}\mathbf{a}_j < \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Induljunk ki egy tetszőleges bázistáblából.

Az algoritmus az alábbi négy lépésből áll:

1. Redukálás.
2. Komplementáris alakra hozás ($\|J_-\|$ csökkentése).
3. Részfeladat megoldása a *criss-cross módszerrel*.

		J_B				
$J_B \cap J_-$		1	\ddots	0		
			1			
$J_B \cap J_0$		0		1	\ddots	
					1	
						B^{-1}
$yA - c$		J_-		J_0		
		-	\dots	-	0	\dots
					0	\dots
						ξ_0
						y

4. ábra

4. Célfüggvény javítás (J_- és J_0 átrendezése).

A fenti lépések elnevezése előrevetíti az alábbi definíciók szükségességét.

3.1. DEFINÍCIÓ. Egy B bázishoz tartozó bázistáblát az y duál megengedett megoldáshoz viszonyítva *redukálnak* nevezünk, ha $\tau_{ij} = 0$ minden $i \in J_B \cap J_-$, $j \in J_0$ esetén.

3.2. DEFINÍCIÓ. Egy B bázishoz tartozó bázistáblát és egy y duál megengedett megoldást *komplementárisnak* nevezünk, ha $\xi_j = 0$, $j \in J_-$.

Most vizsgáljuk részletesen az egyes lépéseket. Mivel az alkalmazott módszerek és az algoritmus lépései hasonlóak a 2. fejezetben bemutatottakhoz, így a bizonyítások részleteit itt elhagyjuk.

3.1. Redukálás

Ha van olyan $i \in J_B \cap J_-$ és $j \in J_0$, hogy $\tau_{ij} \neq 0$, akkor az (i, j) helyen pivotálva csökkentjük $J_B \cap J_-$ elemszámát. Így véges lépésben redukálhatunk egy táblázatot. Megjegyezzük, hogy a redukálás során J_- és J_0 nem változik.

3.2. Komplementáris alakra hozás

Redukált táblát szeretnénk komplementáris alakra hozni. Ezt az y megoldás sorozatos javításával és a tábla ismételt redukálásával érhetjük el. Ha $\xi_i = 0$ $i \in J_B \cap J_-$, akkor a tábla komplementáris. Ha $\xi_r \neq 0$ valamely $r \in J_B \cap J_-$ esetén, akkor igaz az alábbi lemma.

3.1. LEMMA. Ha $\xi_r \neq 0$ valamely $r \in J_B \cap J_-$ esetén, akkor az $\bar{y} = y - \vartheta \tilde{y}$ vektor szintén duál megengedett megoldás és $\xi_0 = \bar{y}b - yb = \xi_0$, ahol $\tilde{y} = y^{(r)} \operatorname{sgn}(-\xi_r)$ és

$$0 < \vartheta \leq \vartheta_0 = \min \left\{ \frac{ya_j - \gamma_j}{\tau_{rj} \operatorname{sgn}(-\xi_r)} \mid \tau_{rj} \operatorname{sgn}(-\xi_r) < 0 \right\} = \frac{ya_s - \gamma_s}{\tau_{rs} \operatorname{sgn}(-\xi_r)}.$$

Bizonyítás. Az $y^{(r)}A = t^{(r)}$ összefüggés figyelembevételével könnyen elvégezhető.

Megjegyezzük, hogy $\vartheta_0 = +\infty$ esetén a duál feladat célfüggvénye nem korlátos felülről, azaz nem létezik primál megengedett megoldás.

Alkalmazzuk a 3.1. lemmát valamely $r \in J_B \cap J_-$ mellett, amikor $\xi_r \neq 0$ és

$9 = 9_0$. Így kapunk egy új $\bar{y} = y - 9_0 \bar{y}$ duál megengedett megoldást, miközben a duál feladat célfüggvényértéke nőtt és J_- -ből legalább egy index átkerült J_0 -ba.

Tehát a következő módon érhetünk el egy y duál megengedett megoldást és egy hozzá viszonyítva redukált, komplementáris bázistáblát.

1. Redukáljuk a táblázatot.

2. Ha van olyan $r \in J_B \cap J_-$, hogy $\xi_r \neq 0$, akkor a 3.1. lemma alkalmazásával csökkentsük J_- elemszámát. Térjünk vissza az 1. lépésre.

Ha $\xi_i = 0$ minden $i \in J_B \cap J_-$ esetén, akkor a bázistábla redukált és komplementáris az y megoldáshoz viszonyítva.

Így véges sok lépés után az alábbi y duál megengedett megoldáshoz és a hozzá viszonyítva redukált, komplementáris bázistáblához jutunk.

	J_B					
$J_B \cap J_-$		1	0	0	0	
		1	0	0	0	
$J_B \cap J_0$	0	1	1	1	1	B^{-1}
	J_-		J_0			
$yA - c$	-	0	..	y

5. ábra

Könnyen igazolható az alábbi lemma.

3.2. LEMMA. A fent adott x és y vektorok optimális megoldásai az alábbi lineáris programozási feladat-párnak.

$$\begin{array}{ll} \min cx & \max yb \\ \text{feltéve, hogy } Ax = b & \text{feltéve, hogy } ya_j \leq \gamma_j, j \in J_- \\ \xi_j \geq 0, j \in J_- & ya_j = \gamma_j, j \in J_0 \end{array}$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy véges sok (J_-, J_0) pár van, és így az előző lemmában szereplő feladat-párból is véges sok van.

3.3. Részfeladat megoldása

A *criss-cross módszer* alkalmazásával oldjuk meg a $\left\{ \sum_{j \in J_0} a_j \xi_j = b, \xi_j \geq 0, j \in J_0 \right\}$ részfeladatot a fenti táblázatból, vagyis az ott adott x vektorból kiindulva. Így a fenti táblán csak a J_0 -ban levő vektorok kerülnek be és távoznak a bázisból. Ez azt jelenti, hogy $\{\xi_j | j \in J_B \cap J_0\}$ alkotja a megoldás oszlopot és a sraffozott résztáblázat tartalmazza a pivot elemeket.

Hajtsuk a pivot transzformációkat az egész bázistáblán végre. Ezek a transzformációk megőrzik a redukált és komplementaritási tulajdonságokat, mivel a táblázat $J_B \cap J_-$ -hoz tartozó sorai változatlanok maradnak a transzformációk során.

A *criss-cross módszer* véges sok lépés után az alábbi két eset valamelyikénél ér véget.

(a) $\xi_j \geq 0$, $j \in J_B \cap J_0$.

(b) $\xi_r < 0$ valamely $r \in J_B \cap J_0$ esetén és $\tau_{rj} \geq 0$ minden $j \in J_0$ esetén.

3.4. A célfüggvény javítása

Ha az (a) esetnél ér véget a *criss-cross módszer*, akkor $Ax=b$, $x \geq 0$, $yA \leq c$, $(yA-c)x=0$ azaz x és y optimális megoldások.

Ha a *criss-cross módszer* a (b) esetnél ér véget, akkor legyen $\bar{y} = y - \vartheta_0 y^{(r)}$, ahol

$$\vartheta_0 = \min \left\{ \frac{y a_j - \gamma_j}{\tau_{rj}} \mid \tau_{rj} < 0 \right\} = \frac{y a_s - \gamma_s}{\tau_{rs}}.$$

A 3.1. lemma szerint a duál feladat nem korlátos, ha $\vartheta_0 = +\infty$, és ha $\vartheta_0 < +\infty$ akkor \bar{y} duál megengedett megoldás és $\bar{y}b > yb$.

Készítsük el az új J_- , J_0 halmazokat, és térjünk vissza a tábla redukálásához. Vegyük észre, hogy $r \in J_-$ és $s \in J_0$ lesz, és így a redukálást az (r, s) helyen való pivotálással kezdhetjük.

Algoritmusunkat az alábbiakban foglalhatjuk össze.

M.2. Algoritmus

0. lépés — Legyen y duál megengedett megoldás és B egy tetszőleges bázis. Készítsük el a J_- , J_0 indexhalmazokat és a kiinduló bázistáblát.
1. lépés — Redukáljuk a táblát.
2. lépés — Ha a tábla komplementáris, térjünk át a 3. lépésre.
— Ha $\xi_r \neq 0$ valamely $r \in J_B \cap J_-$ esetén, akkor javítsuk y -t $y^{(r)}$ segítségével.
Ha $\vartheta_0 = +\infty$, nincs primál megengedett megoldás. VÉGE.
Ha $\vartheta_0 < +\infty$, akkor $\|J_-\|$ csökken. Térjünk vissza az 1. lépésre.
3. lépés — Oldjuk meg a *criss-cross módszerrel* a J_0 által definiált részfeladatot.
4. lépés — Ha $x \geq 0$ akkor x és y optimális megoldások. VÉGE.
— Ha $\xi_r < 0$ valamely $r \in J_B \cap J_0$ esetén, akkor javítsuk y -t $y^{(r)}$ segítségével.
Ha $\vartheta_0 = +\infty$, nincs primál megengedett megoldás. VÉGE.
Ha $\vartheta_0 < +\infty$, térjünk vissza az 1. lépésre.

Az alábbi tétel bizonyítja az eljárás végeességét.

3.1. TÉTEL. Az M.2. algoritmus véges sok lépés után véget ér.

Bizonyítás. Hasonló, mint az M.1. algoritmus esetében. A gondolatmenet azonosága miatt nem ismételjük meg.

Megjegyezzük, hogy az első és a második lépéssel szintén megoldunk egy részfeladatot a harmadik lépéshez hasonlóan.

Az algoritmus végrehajtásához valójában nincs szükségünk a B^{-1} mátrixra és az y vektorra, csak ha a duál optimális y megoldásra is szükségünk van.

Az 5. fejezetben mutatjuk be, hogy a duál szimplex módszer egy változata miként adódik az M.2. algoritmus speciális eseteként.

4. A primál szimplex módszer mint speciális Magyar Módszer

Ebben a fejezetben megmutatjuk, miként adódik a primál szimplex módszer az M.1. algoritmus speciális eseteként.

Legyen az induló x primál megengedett megoldás egy B bázishoz tartozó bázis-megoldás és induljunk ki a B bázishoz tartozó bázistáblából.

Nyilvánvaló, hogy ekkor $J_+ \subset J_B$ és így a kiinduló táblázat az alábbi (hasonlításuk össze a 2. és 3. táblázatokkal).

		J_B			
		J_+			
J_B	J_+	1	0	+	
		.		.	
		.		.	
		1		+	B^{-1}
		0	1	0	
			.	.	
			1	0	
		0	0	ξ	y

6. ábra

Elhagyhatjuk az M.1. algoritmus első és második lépését, mivel $J_+ \setminus J_B = \emptyset$ és $\zeta_j - \gamma_j = 0$ minden $j \in J_+ \subset J_B$ esetén, azaz a bázistábla és a hozzá tartozó x bázis-megoldás redukált és komplementáris egymáshoz viszonyítva. Az M.1. algoritmus harmadik lépésének megfelelő részfeladat megoldása a *criss-cross módszerrel* ugyanazon pivot műveleteket eredményezi, mintha a BLAND [2] által adott pivotálási szabályt alkalmaznánk a ciklizálás elkerülésére a szimplex módszernél. A negyedik lépés, amikor a célfüggvény értékét javítjuk és az utána következő pivot művelet az (r, s) helyen $(\zeta_s - \gamma_s > 0)$ valamely $s \in J_0$ esetén, $\tau_{js} \leq 0$ minden $j \in J_0$ esetén valamint $\xi_r > 0$ azért, hogy redukáljuk ismét a táblát, megegyezik azzal, hogy az egész táblán (a megoldáoszlopon is) végrehajtjuk a szokásos primál szimplex pivot műveletet τ_{rs} pivotelem választással. Ismert, hogy az új $\bar{x} = x - \vartheta_0 t_{(s)}$ megoldás megegyezik a pivot művelet eredményeként kapott megoldással.

Így a szimplex módszerhez tartozó pivotálási szabály úgy módosult, hogy a bázisba bejövő változó mindig a legalacsonyabb indexű nem duál megengedett változó. A bázisból távozó változó választására a közönséges szimplex módszer kiválasztási szabályát alkalmazzuk, ha nem degenerált a transzformáció, míg degenerált esetben a lehetséges távozó változók közül a minimális indexű távozik a bázisból.

A $J_+ \subset J_B$ reláció a fentiek értelmében továbbra is fennáll, mivel minden egyes bázistranszformáció megegyezik egy szimplex pivot művelettel, azaz az x primál megengedett megoldás mindig a bázistáblához tartozó marad.

Így a primál szimplex módszer egy variánsát kaptuk az M.1. algoritmus speciális eseteként. Mivel az M.1. algoritmus véges, így a szimplex módszer ezen változata is véges. Ezért a módszer végességét természetesen bizonyíthattuk volna direkt módon, BLAND [2] bizonyításának változatlan átvételével is, de esetünkben ez egy általánosabb algoritmus végességéből is következik.

6. Egy új lehetőség a lineáris programozás megoldási módszereinek oktatására

A konvergens *criss-cross módszer* és a *magyar módszer* típusú algoritmusok létrejöttével új lehetőség nyílik a lineáris programozás megoldási módszereinek oktatására.

Azoknak, akik csak ismerkedés szinten, néhány órában tanulnak lineáris programozást, az időigényes és nem matematikusok számára nehezen érthető kétfázisú szimplex módszer helyett oktatható a *criss-cross módszer*, mely nagyon egyszerű, könnyen programozható és általános feladatok megoldására is alkalmas.

Bővebb kurzusok keretében az alábbi felépítés lehetséges: kiindulunk az egyszerű *criss-cross módszerből*, majd erre építve, a magyar módszer alapötletének felhasználásával tanítjuk az M.1. és M.2. algoritmusokat (itt csak a lineáris programozásra való alkalmazás új, mivel általában gráfelméletből addigra már ismert a magyar módszer). Ezen algoritmusok speciális eseteiként vezessük be a primál, illetve duál szimplex módszert, és így egyúttal a degenerált esetben előforduló ciklizálás elkerülésére is módszert adtunk. Ezután a BLAND szabály nélküli általános szimplex szabály közlése már csak egy rövid megjegyzés. A ciklizálás elkerülésére, a teljesség kedvéért, alternatív módszerként tanítható a lexikografikus szimplex módszer.

A nem matematikusok számára legnehezebben érthető kétfázisú szimplex módszer így már mélyebb ismeretek birtokában vezethető be, valamint az önmagában bonyolultnak tűnő primál-duál módszer (DANTZIG—FORD—FULKERSON [3]) már könnyen adódik mint M.2. algoritmus és az első fázis módszerének ötvöze.

A fenti felépítés előnye, hogy a kurzus elején az általános formájú feladat megoldására azonnal rendelkezésre áll egy megoldási módszer, és így nem okoz újabb zavarokat az általánosabb feladatok bevezetése.

HELYREIGAZÍTÁS

Technikai okok miatt a cikk ábráiban sajtóhiba maradt.

Az 1. ábra alsó sorában ζ_j helyett ζ_j , továbbá valamennyi ábrában a célfüggvény értéket jelölő ζ_0 helyett ζ_0 értendő helyesen.

IRODALOM

- [1] BALINSKY, M. L. and TUCKER, A. W., "Duality theory of linear programs: A constructive approach with applications", *SIAM Review* 11 (1969) 347—377.
- [2] BLAND, R. G., "New finite pivoting rules for the simplex method", *Mathematics of Operations Research* 2 (1977) 103—107.
- [3] DANTZIG, G. B., FORD, L. R. JR. and FULKERSON, D. R., "A primal dual algorithm for linear programs", in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.) *Linear inequalities and related systems*, Annals of Mathematics Studies No. 38. Princeton University Press, Princeton, 1956.
- [4] KUHN, H. W., "The Hungarian Method for assignment problems", *Naval Research Logistic Quarterly* 2 (1955) 83—97.
- [5] KUHN, H. W., "Variants of the Hungarian Method for assignment problems", *Naval Research Logistic Quarterly* 3 (1956) 253—258.
- [6] KLAFSZKY, E. and TERLAKY, T., "Variants of the Hungarian Method for solving linear programs", *Mathematical Programming* (megjelenés alatt).
- [7] LEMKE, C. E., "The dual method of solving the linear programming problem", *Naval Research Logistic Quarterly* 1 (1954) 36—47.
- [8] PRÉKOPA, A., *Lineáris programozás I.* (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968).
- [9] TERLAKY, T., "Egy új véges *criss-cross* módszer és végességének bizonyítása", *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 10 (1984) 289—296.

- [10] TERLAKY, T., "A convergent criss-cross method", *Mathematische Operationsforschung und Statistik, ser. Optimization* 6 (1985) 683—690.
- [11] TERLAKY, T., "A finite criss-cross method for oriented matroids", *Journal of Combinatorial Theory (B)* 42 (1987) 179—188.
- [12] TERLAKY, T., „Egy véges criss-cross módszer és alkalmazásai”, Kandidátusi Értekezés, Budapest 1984.
- [13] ZIONTS, S., "The criss-cross method for solving linear programming problems", *Management Science* 15 (1969) 426—445.
- [14] ZIONTS, S., "Some empirical test of the criss-cross method", *Management Science* 19 (1972) 406—410.

(Beérkezett: 1985. május 20.)

KLAFSZKY EMIL
NME MATEMATIKAI INTÉZET
3515 MISKOLC, PF. 1.

TERLAKY TAMÁS
ELTE TTK OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6—8.

VARIANTS OF THE HUNGARIAN METHOD FOR LINEAR PROGRAMS

E. KLAFSZKY and T. TERLAKY

Our paper presents two new algorithms for solving linear programming problems. These algorithms are based on the convergent criss-cross method and on the idea of the "Hungarian Method". Similarly to the primal dual algorithm of DANTZIG—FORD—FULKERSON [3], our algorithms improve a feasible (may be not basic) solution step by step, but we use TERLAKY's [10] convergent criss-cross method for solving the subproblems. Our algorithms solve linear programming problems in finite number of steps (i.e. cycling cannot occur).

We show that the primal and dual simplex methods are special cases of our algorithms. In these simplex methods we use BLAND's [2] pivoting rule only if the basic transformations are degenerate. By this we show how can one derive the primal or dual simplex method from TERLAKY's [10] criss-cross method.

HÁLÓZATI FOLYAM MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA A TERMINÁLIDŐ BEOSZTÁSÁRA

SEBŐ ANDRÁS

Budapest

Egy órarend-algoritmust ismertetünk, amelyet jelenleg a terminálidők beosztására használnak. Célunk, hogy egy olyan megközelítést mutassunk be, amellyel órarend problémák egy tág osztálya hatékonyan kezelhető. Az algoritmus építő elemei egyszerű és gyors hálózati folyam algoritmusok.

0. Bevezetés

Az órarend problémák a legnehezebb kombinatorikus optimalizálási feladatok közé tartoznak. Míg sok más NP-nehéz feladat jól kezelhető a gyakorlatban — a gyakorlatban előforduló adatokkal gyors algoritmus, vagy legalábbis jó közelítés adható rájuk —, addig az órarend problémáknál a „kombinatorikus robbanás” általában a gyakorlatban előforduló méretek előtt már bekövetkezik. Ugyanakkor kézzel igen nagy munkával, de sikeresen készítenek órarendeket. Ezért egyrészt lényeges, másrészt remélhető is olyan módszerek kifejlesztése, amelyek képesek feltárni a problémák szerkezetét és heurisztikus vagy valamennyi kézi elemmel kombinálva leküzdi a kombinatorikus robbanást. Ilyen irányzat a hálózati folyamok elméletének alkalmazása órarend problémák megoldásában.

A jelen dolgozatban egy alkalmazásból indulunk ki: a *Magyar Tudományos Akadémia* IBM 3031 gépéhez tartozó terminálok túlsúfoltsága terminálidő-beosztás készítését teszi szükségessé. Ez a beosztás egy órarend, melynek figyelembe kell vennie a felhasználók mennyiségi és kényelmi igényeit, és a számítóközpont által kiszabott feltételeket. Ennek a problémának a megoldására kifejlesztettünk egy algoritmust, melynek APL programozási nyelven megírt kódja 1982 januárja óta sikeresen ellátja feladatát. Ugyanakkor az említett igények és feltételek többsége túlmutat ennek a konkrét alkalmazásnak a céljain, várhatóan más alkalmazásokban is hasonlóak lépnek föl. Ezért azt reméljük, hogy a modellezésük és kielégítésük során kialakult hálózati folyam módszerek máshol is felhasználhatók.

A dolgozatban szereplő algoritmusok mindegyikének futási idejére polinomiális *worst-case* felső becslés adható, és a gyakorlatban is gyorsan futnak. Az aszimptotikus *worst-case* korlátot persze a gyakorlatban mért futási idő nem feltétlenül éri el, és ez a tény sokakat a bonyolultság elméleti vizsgálatának az elvetésére készíten. Úgy gondoljuk, hogy a polinomialitás és NP-teljeség vizsgálatának (l. [10]) haszna az alkalmazott matematikában elsősorban az, hogy „nehéz” problémák felismerését, a problémák megoldásában alkalmazandó módszerek jellegének kijelölését teszi lehetővé. Tévedés lenne egyazon problémára kifejlesztett különböző algoritmusok gyakorlati futásidejének összehasonlítását várni tőle. Ezek a fogalmak történetileg is gya-

korlati indíttatásúak, az NP-teljes feladatoknál szinte kivétel nélkül bekövetkező „robbanás” hozta létre őket, és ennek a robbanásnak a megijósására igen megbízhatóan használhatók is. Meg fogjuk vizsgálni, hogy újabb, gyakorlatban fölmerülő feltételek hozzávehető-e feladatunkhoz a polinomialitás megtartásával, vagy NP-teljessé teszik-e. Itt a polinomialitás és NP-teljesség határai ráadásul pontosan a módszereink kiterjeszthetőségének határait jelentik, tehát közvetlen gyakorlati jelentésük is van.

Először is ismerjük meg az MTA IBM 3031 számítóközpontjában felmerülő feladatot és modelljét. A számítóközpont display-terminál felhasználóinak gépidő igénye nagymértékben fölülmúlja az összesen rendelkezésre álló terminál-időt: az amerikai embargó korlátozások legfeljebb 5 terminál használatát engedélyezik és mind-egyik napi 13 órát működik. A felhasználók különböző intézetek dolgozói, többségük távolról jön, és ezért erősen korlátozott az az idő, amikor használni tudják a terminálokat.

A feladatot a következőképpen fogalmazzuk meg: T , U és H adott, ahol T egyforma terminálok halmaza, U a felhasználók halmaza és H a hét óráinak halmaza $|T|=l$, $|U|=m$, $|H|=n$. Elkészítendő egy órarend az alábbi feltételek mellett:

0. Minden felhasználó minden órában legfeljebb egy terminálnál dolgozhat, és minden terminálnál minden órában legfeljebb 1 felhasználó dolgozhat.
1. Adott egy $\Omega: T \rightarrow 2^H$ függvény. A $t \in T$ terminál akkor és csak akkor működik a $h \in H$ órában, ha $h \in \Omega(t)$.
2. Adott egy $\Gamma: U \rightarrow 2^H$ függvény. Az $u \in U$ felhasználó akkor és csak akkor dolgozhat a $h \in H$ órában, ha $h \in \Gamma(u)$.
3. Adott egy $r: U \rightarrow N$ függvény (N a pozitív egész számok halmaza). $r(u)$ ($u \in U$) az u felhasználó igénye, ez azoknak az óráknak a száma, amikor az u felhasználó terminálnál szeretne dolgozni.

A többi feltételt később ismertetjük.

A felmerülő modellek közül nem ez a legáltalánosabb, amit kezelni lehet az itt ismertetendő módszerrel, (pl. nem szükséges, hogy az összes terminál azonos legyen, elég, ha minden felhasználó megadja terminálok egy részhalmazát, amelyhez tartozó terminálok egyformán megfelelnek neki). Ezt egy alapmodellnek tekintjük, amelyen bemutatjuk a fő gondolatokat. Az általánosítási lehetőségekről a 4. részben lesz szó.

A fenti megfogalmazással hangsúlyozni kívántuk a vizsgált probléma illeszkedését a klasszikus „osztály-tanár órarend problémához”. (Lásd pl. [1] vagy [3]: ha a tanárok egyenértékűek, tehát minden osztályhoz adott, hogy hány órát tölt az iskolában, de ez az óraszám tetszőleges módon osztható el a különböző tanárok között, akkor a felhasználó-osztály, terminál-tanár megfeleltetések világosan mutatják, hogy a két feladat megegyezik.) A mi feladatunk nem tiszta speciális eset, ugyanis a klasszikus feladat nem engedett meg ilyen típusú igényt: „Az 1. b. osztálynak legyen 2 órája vagy az A vagy a B tanárral”. Ha az A és B tanárok egyenértékűek, akkor pedig előfordulhat ilyen igény. Jegyezzük meg, hogy EVEN, ITAI, SHAMIR [3]-ban bebizonyították, hogy a klasszikus feladat általában NP-teljes, és abban a speciális esetben, amikor az összes tanár mindig szabad, polinom idő alatt megoldható. (Ez utóbbit már DE WERRA is említi korábbi cikkében [8].) Az itt ismertetett eljárások is felhasználhatók heurisztikus eszközként az NP-teljes feladat közelítő megoldására: az 1. részben gyors algoritmust adunk, amely megoldja az 1), 2) és 3)-ban, illetve

(0.1), (0.2) és (0.3)-ban pontosabban definiált feladatot; a 3. részben az órarendek módosítására ismertetett eljárás és a 4. részben a terminálok közötti különbségekre vonatkozó megjegyzések segítségével az első rész eredményei heurisztikus eszközként felhasználhatók lehetnek általános osztály-tanár órarendek készítésében. A szerzőnek azonban még nincsenek számítógépes tapasztalatai ebben az irányban.

Az 1. megfogalmazását nagymértékben lehet egyszerűsíteni: a T halmazt és az Ω függvényt egyetlen $t: H \rightarrow \mathbb{N}$ függvénnyel lehet helyettesíteni, ahol $t(h)$ ($h \in H$) a h órában működő terminálok száma; $t(h) = |\{x \in T: h \in \Omega(x)\}|$. Mivel a terminálok egyformák, azért t elég információt nyújt a terminálok hozzáférhetőségéről, tehát T -t és Ω -t teljesen ki lehet hagyni a modelltől. Most pontosan definiáljuk, hogy mit értünk órarenden.

0.1. DEFINÍCIÓ. Az U, H halmazok, valamint a

$$\Gamma: U \rightarrow 2^H, \quad r: U \rightarrow \mathbb{N}, \quad t: H \rightarrow \mathbb{N}$$

függvények által definiált órarend problémát $P(U, H, \Gamma, r, t)$ fogja jelölni. A $P(U, H, \Gamma, r, t)$ -hez tartozó *órarend* egy olyan $\tau: U \times H \rightarrow \{0, 1\}$ függvény, amely kielégíti (0.1)-et, (0.2)-t és (0.3)-at:

$$(0.1) \quad \tau(u, h) = 1 \Rightarrow h \in \Gamma(u) \quad (u \in U, h \in H),$$

$$(0.2) \quad \sum_{h \in H} \tau(u, h) \leq r(u),$$

$$(0.3) \quad \sum_{u \in U} \tau(u, h) \leq t(h).$$

Ha (0.2) egyenlőséggel teljesül minden $u \in U$ -ra, akkor τ -t *teljes órarend*nek nevezzük. Ha létezik teljes órarend, akkor azt mondjuk, hogy $P(U, H, \Gamma, r, t)$ *megoldható feladat*.

0.2. *Megjegyzés.* Ha τ órarend, akkor könnyű belátni, hogy a felhasználókat a terminálokhoz helyezhetjük, úgy, hogy kielégítsük a 0 és 1. feltételt. Ha a terminálok üzemelési ideje megegyezik, akkor a *felhasználó-terminál órarend úgy is megkonstruálható, hogy a felhasználó egymás utáni órákban ugyanazon a terminálon dolgozzon.* Az olvasó ellenőrizheti ezeket az egyszerű állításokat.

0.3. DEFINÍCIÓ. Az órarend probléma *értékét* $\max_{\tau} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \tau(u, h)$ definiálja, ahol τ az összes $P(U, H, \Gamma, r, t)$ -hez tartozó órarenden fut. Rögzítsük U -t, H -t, Γ -t és t -t, és jelöljük $v(r)$ -rel a $P(U, H, \Gamma, r, t)$ feladat értékét. τ *maximális órarend*, ha $\sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \tau(u, h) = v(r)$. $v(r) \leq \sum_{u \in U} r(u)$ nyilvánvalóan következik (0.2)-ből, és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $P(U, H, \Gamma, r, t)$ megoldható.

Ez a dolgozat négy részből áll. Az első részben *szükséges és elégséges feltételt* („jó karakterizációt”) *adunk arra, hogy $P(U, H, \Gamma, r, t)$ megoldható legyen.* A bizonyítás algoritmikus, a lépésszáma adott felső korlát polinomiális a megfelelő súlyozott feladat esetén is. Az eredmények a hálózati folyamatok elméletének közvetlen alkalmazásai.

A 2., 3. és 4. részben a (0.1), (0.2) és (0.3) alapfeltételeket más fontos feltételekkel egészítjük ki. A dolgozat célja olyan órarendek készítése, amelyek mindezeket a feltételeket teljesítik.

A 2. részben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a $P(U, H, \Gamma, r, t)$ feladat nem megoldható. Az „igazságosság” fogalmát definiálva megmutatjuk, hogyan módosítható az r igényvektor úgy, hogy megoldható problémát kapjunk. A probléma $v(r)$ értéke nem csökkenhet a módosítás következtében. Ez egyik oka annak, hogy az „igazságosság” fogalmának a feladat szerkezetétől kell függnie, és ezért matematikai megalapozást igényel.

A 3. részben már létező órarendek módosításának egy általános módszerét adjuk meg úgy, hogy más megkötéseket is kielégítsenek. Egy „Minimális út algoritmust” használunk a felhasználók alkalmas ciklikus permutációjának a megtervezésére. Ez a módszer például részben megoldja azoknak a felhasználóknak a nehézségeit, akik *több egymás utáni órát szünet nélkül szeretnének dolgozni*. Abban is segíthet, hogy jó heurisztikákat adjunk bonyolultabb órarend problémák megoldására.

A 4. részben a megoldási módszerek kiterjesztését vázoljuk a probléma néhány olyan megszorítására és általánosítására, amely a gyakorlatban merül föl, és néhány más módosításról pedig bebizonyítjuk, hogy NP teljes. Néhány példa a tárgyalt módosításokra: egyes felhasználók esetleg jobban szeretik egyik vagy másik terminált vagy a hét minden napjára külön szeretnének igényt leadni, stb.

E dolgozat legfontosabb eszközei a hálózati folyamatok:

Alternáló utakat gyakran használunk majd különböző célokra, a 3. részben pedig egy minimális út kereső szubrutint használunk.

A hálózati folyamatok elméletét sok szerző használta már heurisztikus eszközként bizonyos órarend-problémákhoz és ütemezési problémákhoz (l. pl. [1], [2], [6]). Ebben a dolgozatban a párosítások elméletének néhány gondolatát használjuk föl, hogy pontos megoldást adjunk az itt vizsgált órarend feladatra. Az 1. rész eredményeit a [2]-ben levő tételek módosításainak és általánosításainak is tekinthetjük, de az eszközök hasonlósága ellenére modellünknek nincs szoros kapcsolata sem [1]-gyel, sem [6]-tal: ezekben az osztály-tanár kapcsolat a lényeges, míg nálunk a felhasználó-idő összefüggés áll a középpontban.

Az algoritmusok APL kódjaiból programcsomagot készítettünk, amely minden héten megoldja a SZTAKI felhasználó-terminál/idő feladatát. Az algoritmus *worst case* korlátja $O((n+m)^3)$, a futás során $O(n^2m)$ -es viselkedés tapasztalható. Nem fordulhat elő, hogy az algoritmus órarend készítése nélkül áll le, ami ritkaság a gyakorlatban felmerülő órarendproblémáknál.

Jelölések és elnevezések. A dolgozatban gráfok és irányított gráfok lesznek az eszközeink. Ezekkel kapcsolatban főleg a [9] jelöléseit és elnevezéseit használjuk: a G (irányított) gráf csúcsainak halmazát $V(G)$, az éleinek halmazát $E(G)$ fogja jelölni; $x \in V(G)$ foka $d_G(x)$; $\Gamma_G(x)$ pedig az x szomszédjainak a halmaza.

$$(d_G(x) = |\Gamma_G(x)|; \quad \Gamma_G(x) = \{y \in V(G) : (x, y) \in E(G)\})$$

és

$$\Gamma_G(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma_G(x) \quad (X \subset V(G)); \quad \text{az } (x_1, \dots, x_k)$$

sorozat séta, ha $(x_i, x_{i+1}) \in E(G)$ ($i=1, \dots, k-1$); a séta *zárt*, ha $x_i = x_k$, egyébként *nyitott*; Ha x_1, \dots, x_k különbözőek, akkor az (x_1, \dots, x_k) sétát *útnak* nevezzük; ha x_1, \dots, x_{k-1} különbözőek, de $x_1 = x_k$, akkor gráfoknál *körről* irányított gráfoknál pedig *ciklusról* beszélünk. Ha $e \in E(G)$, akkor $G-e$ az a gráf, amelyre $V(G-e) = V = V(G)$, $E(G-e) = E(G) \setminus e$.

1. Jó karakterizáció és algoritmus az alapfeladatra

A dolgozatnak ebben a részében egy olyan algoritmust vázolunk, amely vagy *konstruál egy teljes órarendet, vagy bebizonyítja, hogy ilyen nem létezik*, és ez utóbbi esetben is konstruál egy maximális órarendet. Ha adott egy $w(u, h)$ ($u \in U, h \in H$) súlyfüggvény, akkor a maximális súlyú órarendet vagyis azt, amelyre $\sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \tau(u, h) w(u, h)$ maximális, szintén meg tudjuk határozni. Az eredmények a minimális költség maximális folyam algoritmusból is következnek és szorosan kapcsolódnak az „ f -faktor”-okról szóló tételekhez (l. pl. [9]) vagy ORE tételéhez irányított gráfokra. A hálózati folyamatok alapjait vagy a páros gráfok párosítási algoritmusát ismerő olvasó átugorhatja ennek a résznek a legtöbb gondolatmenetét. Mivel a módszerek közismertek, egyes helyeken kevésbé leszünk formálisak. Csak akkor megyünk bele részletekbe, ha ezeket később használjuk.

1.1. DEFINÍCIÓ. Az $u \in U$ felhasználó $Y \subset H$ -ra vonatkozó $r(u, Y)$ igényét így definiáljuk:

$$r(u, Y) = \max \{r(u) - |\Gamma(u) \setminus Y|, 0\}. \quad \square$$

Nyilvánvaló, hogy $r(u) = r(u, H) \quad \forall u \in U$.

Könnyű belátni, hogy az u felhasználónak tényleg legalább $r(u, Y)$ órát kell kapnia Y -ban. Így a következő tétel csak akkor része nyilvánvaló.

1.2. TÉTEL. $P(U, H, \Gamma, r, t)$ pontosan akkor megoldható, ha minden $Y \subset H$ -ra

$$(*) \quad \sum_{u \in U} r(u, Y) \leq \sum_{h \in Y} t(h) \quad \square$$

(Ha $r(u) = t(h) = 1, \forall u \in U, \forall h \in H$, akkor ez a „König—Hall” tételt adja.)

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló, mivel a baloldal az igények összege (l. tétel előtti megjegyzés), a jobboldal pedig az Y -ban rendelkezésre órák teljes összege. Az elégségesség bizonyításához tekintsük a G páros gráfot, ahol $V(G) = U \cup H$, $E(G) = \{(u, h) : h \in \Gamma(u)\}$. (Mivel $\Gamma_G(u) = \Gamma(u) \quad \forall u \in U$, $\Gamma(u)$ -t fogunk írni $\Gamma_G(u)$ helyett.)

A τ órarend a G egy T részgráfját definiálja, ahol $V(T) = V(G)$, $E(T) = \{(u, h) : \tau(u, h) = 1\}$, és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$(1.1) \quad E(T) \subset E(G) \quad (\text{ekvivalens (0.1)-gyel})$$

$$(1.2) \quad d_T(u) \leq r(u) \quad (\text{ekvivalens (0.2)-vel})$$

$$(1.3) \quad d_T(h) \leq t(h) \quad (\text{ekvivalens (0.3)-mal}).$$

((0.1), (0.2) és (0.3) a 0. rész 0.1. definíciójára történő utalások.) Ezenkívül τ akkor és csak akkor teljes órarend, ha (1.2) minden $u \in U$ -ra egyenlőséggel teljesül. Az alábbi I. algoritmus olyan algoritmus, amely *vagy*

(i) konstruál egy $T \subset E(G)$ -t, amely eleget tesz (1.1), (1.2), (1.3)-nak és (1.3)-at egyenlőséggel teljesíti,

vagy

(ii) konstruál egy $H^* \subset H$ -t az alábbi (1.4) tulajdonsággal:

$$(1.4) \quad \sum_{u \in U} r(u, H^*) > \sum_{h \in H^*} t(h) \quad (\text{lásd 1.6. állítás}).$$

Ha (P, U, H, Γ, r, t) nem megoldható, akkor (i) nem áll fenn, tehát (ii) fennáll, következésképpen $(*)$ nem teljesül $Y=H^*$ -gal. \square

1.3. DEFINÍCIÓ. Színezzük a G gráf éleit két színnel, kékkel és pirossal. Egy (x_1, \dots, x_k) utat (vagy sétát) *alternáló*-nak nevezünk, ha:

$$(x_i, x_{i+1}) \text{ kék} \Rightarrow (x_{i+1}, x_{i+2}) \text{ piros,}$$

$$(x_i, x_{i+1}) \text{ piros} \Rightarrow (x_{i+1}, x_{i+2}) \text{ kék.}$$

Egy alternáló utat *piros-pirosnak*, *piros-kéknek*, *kék-kéknek* vagy *kék-pirosnak* nevezünk az első és az utolsó éltől függően:

(Pl. ha mind az első, mind az utolsó él piros, akkor piros-piros alternáló gráfról van szó.) Mostantól kezdve az *órárend* szót néha egy (1.1), (1.2), (1.3)-at kielégítő T részgráfra fogjuk használni. \square

A következő eljárás lényegében ugyanaz mint az ún. „magyar módszer” (l. [9])

1. algoritmus. Illusztráció az 1/a. és 1/b. ábrán.

Input: U, H, Γ, r, t (l. a 0. részt).

Output: U^*, H^*, τ .

Előbb röviden összefoglaljuk az algoritmus tevékenységét.

Egy heurisztikus megoldásból indulunk ki, amely „lokálisan” nem javítható, vagyis újabb $e \in E(G)$ él pirosra festésével az (1.1), (1.2) feltételek valamelyike már nem teljesülhet. Ezután, ha $\forall u \in U$ -ra (1.2)-ben egyenlőség teljesül, akkor kész vagyunk (egy teljes órarendet készítettünk), ha pedig nem, akkor kék-kék alternáló utat keresünk egy olyan $u \in U$ felhasználóból egy olyan $h \in H$ órába, ami (1.2)-t, illetve (1.3)-at egyenlőtlenséggel teljesíti. Ha ilyet találunk, akkor az élek színét felcserélve javítunk. Mindezt mindaddig folytatjuk, amíg csak lehet. Ha már nem lehet, akkor pedig le tudjuk olvasni az 1.2. tétel feltételének a tagadását, vagyis (ii)-t. Az alternáló utak egy közös címkézési eljárással kereshetők meg, ezt ismertetjük az algoritmus 3., 4., 5. lépéseiben.

Az értékadó utasításokat „ \leftarrow ”-vel jelöljük.

0. lépés. Tekintsük az U, H, Γ által meghatározott és az 1.2. tétel bizonyításában definiált G gráfot. Színezzük pirosra a G néhány éleit úgy, hogy a piros élekből álló T gráf kielégítse (1.1)-et, (1.2)-t és (1.3)-at. (T lehet az üres gráf, de minél több él piros már most, annál rövidebb futási időt várhatunk.) Színezzük kékre a többi élt.

(Egy $u \in U$ felhasználót (vagy $h \in H$ órát) telítettnek nevezünk, ha $d_T(u) = r(u)$ ($d_T(h) = t(h)$, egyébként *telítetlennek*).

Egy $x \in V(G)$ pont *kék* (piros) *szomszédja* egy $y \in V(G)$ pont, ha $(x, y) \in E(G)$ és (x, y) egy kék (piros) él. $((x, y) \in E(G))$ akkor és csak akkor piros, ha $(x, y) \in E(T)$, egyébként kék.)

1. lépés. $L_U \leftarrow \{u \in U: d_T(u) < r(u)\} = \{\text{telítetlen felhasználók}\}$, és rendeljük a „0” címkét L_U pontjaihoz.

2. lépés. Ha

$$L_U = \emptyset, \text{ STOP. } \tau(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \in E(T); \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}; \quad U^* = \emptyset; \quad H^* = \emptyset.$$

3. lépés. Rendeljünk egy címkét H minden olyan címkézetlen pontjához, amelynek van kék szomszédja L_U -ban. Legyen a címke egyenlő egy tetszőleges L_U -beli szomszédal. Legyen L_H azoknak a pontoknak a halmaza, amelyeket ebben a lépésben címkéztünk.

$$H^* \leftarrow H^* \cup L_H.$$

Megjegyzés. Egy címkét formálisan egy l függvénynek tekinthetünk, $l(x) \in H \cup \{0\}$, $x \in U$ és $l(x) \in U$, ha $x \in H$. A „címkézett” pontok halmaza U -ban és H -ban mindig U^* és H^* . L_U mindig az U újonnan címkézett pontjaiból fog állni, L_H pedig a H újonnan címkézett pontjaiból.

4. lépés. Ha

$$L_H \neq \emptyset = L_H \cap \{h \in H: d_T(h) < t(h)\},$$

akkor menjünk az 5. lépésre. Ha

$$L_H \cap \{h \in H: d_T(h) < t(h)\} \neq \emptyset$$

(tehát egy telítetlen órát címkéztünk) menjünk a 6. lépésre. Ha

$$L_H = \emptyset \quad \text{STOP.} \quad \tau(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \in E(T) \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

5. lépés. Rendeljünk egy címkét azokhoz a címkézetlen U -beli pontokhoz, amelyeknek piros szomszédjuk van L_U -ban. Legyen a címke azonos az egyik L_H -beli szomszédal. Legyen L_U azoknak a pontoknak a halmaza, amelyeket ebben a lépésben címkéztünk;

$$U^* \leftarrow U^* \cup L_U,$$

menjünk a 2. lépésre.

6. lépés. Válasszunk ki egy $h_0 \in H^* \cap \{h \in H: d_T(h) < t(h)\}$ -t. A h_0 -nak adott címke valamely $u_1 \in U^*$, amely szintén rendelkezik egy $h_2 \in H^* \cup \{0\}$ címkével stb. Ily módon meghatározhatunk egy P utat h_0 és valamely 0 címkéjű, azaz $d_T(u)^* < r(u^*)$ -ot teljesítő $u^* \in U^*$ között.

A 3. és 5. lépésből következik, hogy P egy kék-kék alternáló út. Cseréljük fel a színeket a P élein; Defináljuk újra T -t: $E(T) = \{\text{piros élek}\}$. (A P piros éleit elhagyjuk és kék éleit pedig hozzávesszük T -hez.); menjünk az 1. lépésre. \square

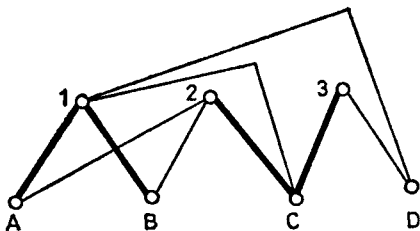
1.4. Példa.

$$U = \{A, B, C, D\} \quad H = \{1, 2, 3\}$$

$$r(A) = r(B) = r(D) = 1; \quad r(C) = 2$$

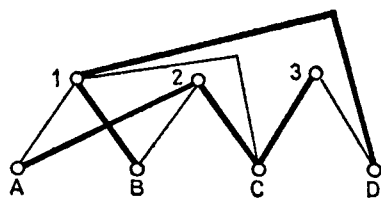
$$t(1) = t(2) \Rightarrow 2; \quad t(3) = 1$$

Az 1/a. ábra a kiinduláskor konstruált órarendet mutatja (0. lépés)



1/a. ábra

Vékony vonal=kék élek
Vastag vonal=piros élek



1/b. ábra

1. lépés. $L_U = \{U^*\} = \{D\}$; $H^* = \emptyset$

$l(u)$ az $u \in U$ címkéjét jelöli.

2., 3. lépés. $l(1)=l(3)=D$; $H^* = L_H = \{1, 3\}$.

4., 5. lépés. $l(A)=l(B)=1$; $l(C)=3$

$L_U = \{A, B, C\}$; $U^* = \{A, B, C, D\}$.

2., 3. lépés. $l(2)=A$; $L_H = \{2\}$; $H^* = \{1, 2, 3\}$.

4., 5. lépés. $l(2)=A$; $l(A)=1$; $l(1)=D$; $l(D)=0$;

$(D, 1, A, 2)$ egy kék-kék alternáló út.

Az 1/b. ábra a színek felcserélése után keletkező helyzetet mutatja. Teljes órarend keletkezik és az algoritmus megáll a 2. lépésnél $L_U = \emptyset$ miatt.

1.5. *Megjegyzés.* A 4. lépés minden előfordulása után vagy U^* lesz nagyobb, vagy a piros élek száma növekszik eggyel, vagy leáll az algoritmus. Ily módon $c(n+m)|E(H)|$ számú lépés után leáll. Mikor az algoritmus leáll U^* és H^* a következő tulajdonsággal rendelkezik (1. 1. ábra):

$$(1.5) \quad \forall h \in H^*: d_T(h) = t(h); \quad \forall u \in U \setminus U^*: d_T(u) = r(u)$$

u i. ha $h \in H$, $d_T(h) < t(h)$ meg van címkézve, akkor a 6. lépést követi a 4. lépést és a 6. lépés után újra kezdődik a címkézés. $d_T(u) = r(u)$ az 1. lépésből következik.

Ha $u \in U^*$, $h \in H$ és $(u, h) \in E(G)$ kék él $((u, h) \in E(G) \setminus E(T))$, akkor a 3. lépés alapján $h \in H^*$, azaz

$$(1.6) \quad u \in U^*, h \in H \setminus H^* \Rightarrow (u, h) \text{ nem kék él,}$$

és hasonlóan, az 5. lépés miatt:

$$(1.7) \quad u \in U \setminus U^*, h \in H^* \Rightarrow (u, h) \text{ nem piros él.}$$

Ha $U^* \neq \emptyset$, akkor nyilvánvalóan (lásd 1. lépést)

$$(1.8) \quad \sum_{u \in U^*} d_T(u) < \sum_{u \in U^*} r(u).$$

1.6. ÁLLÍTÁS. Tekintsük az U^* , H^* halmazokat az algoritmus leállása után Ekkor

(i) $U^* = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha τ teljes órarend.

(ii) $U^* \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha (1.4) fennáll. \square

Bizonyítás. (1.1), (1.2) és (1.3) az egész I. algoritmus során teljesül. Amikor ez leáll, $U^* = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha (1.2) egyenlőséggel teljesül (l. 1. lépést), tehát (i)-t bebizonyítottuk.

Az (ii) bizonyításához először figyeljük meg, hogy (1.6)-ból és (1.7)-ből együttesen következik:

$$(1.9) \quad \sum_{h \in H^*} d_T(h) = \sum_{u \in U^*} (d_T(u) - |\Gamma_G(u) \setminus H^*|)$$

u i. (1.7)-ből következik, hogy a H^* -hoz kapcsolódó piros élek száma egyenlő az U^* -ból H^* -ba menő piros élek számával, és (1.6)-ból következik, hogy az $u \in U^*$ -ból $H \setminus H^*$ -ba menő $|\Gamma_G(u) \setminus H^*|$ számú él mindegyike piros, tehát u -ból H^* -ba $d_T(u) - |\Gamma_G(u) \setminus H^*|$ piros él megy.

Tegyük fel most, hogy $U^* \neq \emptyset$. Alkalmazzuk először (1.5)-öt és (1.9)-et, azután (1.8)-at és az 1.1. definíciót:

$$\begin{aligned} \sum_{h \in H^*} t(h) &= \sum_{h \in H^*} d_T(h) = \sum_{u \in U^*} (d_T(u) - |\Gamma(u) \setminus H^*|) < \\ &< \sum_{u \in U^*} (r(u) - |\Gamma(u) \setminus H^*|) \leq \sum_{u \in U^*} r(u, H^*) \leq \sum_{u \in U} r(u, H^*). \end{aligned}$$

(Az utolsó két egyenlőtlenség valójában egyenlőség: ha $u \in U^*$, akkor $r(u) - |\Gamma(u) \setminus H^*| > 0$, tehát $r(u, H^*) = r(u) - |\Gamma(u) \setminus H^*|$ és ha $u \notin U^*$, akkor $r(u) - |\Gamma(u) \setminus H^*| \leq 0$, amiből $r(u, H^*) = 0$ (l. az 1.1. definíciót).)

„(1.4) $\Rightarrow U^* \neq \emptyset$ ” triviális, mivel (1.4)-ből következik, hogy nincs teljes órarend \Rightarrow minden olyan T -re, amely kielégíti (1.1)-et, (1.2)-t és (1.3)-at, létezik olyan $u \in U$, amelyre $d_T(u) < r(u)$, így $U^* \neq \emptyset$ az 1. lépésben. $\square \square$

1.7. Megjegyzések.

1. *Ore tétele* (lásd pl. [7], jó karakterizációt ad tetszőleges irányított gráf olyan részgráfjának létezésére, amelynek be- és kifokai minden pontban adott alsó és felső korlátnak eleget tesznek. *Ore tételéből* adódik, hogy $P(U, H, \Gamma, r, t)$ akkor és csak akkor megoldható, ha $\forall X \subset U$:

$$\sum_{u \in X} r(u) \leq \sum_{h \in H} \min \{ |X \cap \Gamma_G(h)|, t(h) \},$$

ami egy másik szükséges és elégséges feltétel. Az 1.2. tételt és ezt az állítást könnyen le lehet egymásból vezetni. *Ore tétele Ford—Fulkerson „max folyam min vágás” tételének* a speciális esete (lásd [7]). Mivel az alternáló utak a „folyam javító utak 1 — kapacitásokra vonatkozó speciális esetei, az I. algoritmusban nincs semmi meglepő.

2. Szükségünk lesz azonban az algoritmus fenti megfogalmazására és különösen az (U^*, H^*) halmazpárra. Ennek az a heurisztikus jelentése, hogy az U^* felhasználói túl sokat akarnak dolgozni a H^* óráiban, és ez az, ami megakadályozza teljes órarend létezését. Ezeknek a halmazoknak fontos szerepük lesz a következőkben.

3. Az 1.6. állítás bizonyításában csak (1.5)-öt, (1.6)-ot, (1.7)-et és (1.8)-at használtuk fel. Tehát, ha U^*, H^* halmazokkal és (1.5)—(1.8)-at kielégítő T órarenddel rendelkezünk, akkor tudjuk, hogy T maximális.

Ha az 1.2. tétel feltétele nem teljesül, akkor $\min_{Y \subset H} \left\{ \sum_{h \in Y} t(h) - \sum_{u \in U} r(u, Y) \right\}$ negatív. Így a

$$(1.10) \quad v(r) \equiv \sum_{u \in U} r(u) + \min_{Y \subset H} \left\{ \sum_{h \in Y} t(h) - \sum_{u \in U} r(u, Y) \right\}$$

egyenlőtlenség nyilvánvaló. Másrészt az I. algoritmus által (a leállás után) létrehozott T gráfnak

$$(1.11) \quad |E(T)| = \sum_{u \in U} r(u) + \left(\sum_{h \in H^*} t(h) - \sum_{u \in U^*} r(u, Y) \right)$$

éle van, és kielégíti (1.1)-et, (1.2)-t és (1.3)-at.

(1.11)-et könnyen bebizonyíthatjuk (1.5)–(1.8) felhasználásával az 1.6. állítás (ii) pontjának bizonyításához hasonló számításokkal. (1.10) és (1.11) együtt bizonyítják a következő tételt:

1.8. TÉTEL.

$$v(r) = \sum_{u \in U} r(u) + \min_{Y \subset H} \left\{ \sum_{h \in Y} t(h) - \sum_{u \in U} r(u, Y) \right\}.$$

Következésképpen az I. algoritmus által konstruált órarend maximális.

Az 1.2. tétel könnyen következik az 1.8. tételből, mivel feltétele ekvivalens a következő feltétellel:

$$\min_{Y \subset H} \left\{ \sum_{h \in Y} t(h) - \sum_{u \in U} r(u, Y) \right\} = 0$$

és ebben az esetben az 1.8. tétel alapján

$$v(r) = \sum_{u \in U} r(u).$$

A következőkben gyakran fogunk $P(G, r, t)$ -t írni $P(U, H, \Gamma, r, t)$ helyett és (1.1)-et, (1.2)-t és (1.3)-at kielégítő T órarendeket $P(G, r, t)$ -re vonatkozó órarendnek fogjuk nevezni. (Ez teljes órarend, ha (1.2) egyenlőséggel van kielégítve.) Ez a jelölés nem okozhat zavar, u. i. $\{U, H, \Gamma\}$ és G , csakúgy mint T és τ egyértelműen meghatározzák egymást.

Az 1.6. (ii) állítás és az 1.8. tétel bizonyítása az (1.5)–(1.8) összefüggésekre alapozódott. Azt használtuk fel a bizonyításokban, hogy az I. algoritmus végén keletkező T , U^* , H^* halmazok igen speciális szerkezetűek. Valójában nem kell felhasználnunk azt, hogy U^* és H^* az I. algoritmusban keletkeznek, az (1.5)–(1.8) tulajdonságokkal rendelkező U^* és H^* létezése elég a T maximalitásának a bizonyítására: ezt fontos lesz tudnunk a maximális órarendek felismeréséhez:

1.9. TÉTEL. Legyen T a $P(G, r, t)$ -hez tartozó órarend. Színezzük pirosra az $e \in E(T)$ éleket és kékre az $e \in E(G) \setminus E(T)$ éleket. Ha léteznek az $\emptyset \neq U^* \subset U$ és $\emptyset \neq H^* \subset H$ halmazok, amelyek teljesítik (1.5)–(1.8)-at, akkor $P(U, H, \Gamma, r, t)$ nem megoldható, de $|E(T)| = v(r)$, azaz τ maximális órarend $P(U, h, \Gamma, r, t)$ -re. $\square \square \square$

Természetesen a megfordítás is igaz: ha τ maximális, akkor vagy teljes, azaz (1.2) fennáll egyenlőséggel vagy nem, és akkor léteznek az U^* , H^* halmazok, amelyek

(1.5)–(1.8)-at teljesítik. (Természetesen (1.5)–(1.8) felírható τ -val és Γ -val is T és G helyett.)

Már megjegyeztük, hogy az I. algoritmus végén $U^* = \{u \in U: r(u, H^*) > 0\}$. Valójában U^* és H^* nem függenek az I. algoritmustól. U^* következő jellemzésére lesz szükségünk, amelyből látszik, hogy csak a $P(U, H, \Gamma, r, t)$ feladattól függ.

1.10. ÁLLÍTÁS. Tekintsük U^* -ot az I. algoritmus végén.

$$U^* = \{u \in U: v(r^{(u)}) = v(r)\},$$

ahol

$$r^{(u)}(x) = \begin{cases} r(x) - 1, & \text{ha } x = u \\ t(x), & \text{ha } x \in U, x \neq u. \end{cases} \quad \square$$

Vagy ezzel ekvivalens módon $u \in U \setminus U^*$ akkor és csak akkor, ha $v(r^{(u)}) = v(r) - 1$.

Bizonyítás. Ha $u \in U \setminus U^*$, akkor egy u -hoz illeszkedő piros él elhagyásával a piros élek r helyett $r^{(u)}$ -val és T helyett $T \setminus e$ -vel elégítik ki (1.1)-et, (1.2)-t és (1.3)-at. Mivel U^* , H^* és T kielégítik (1.5)–(1.8)-at (lásd 1.5. megjegyzést), következik, hogy T -t $T \setminus e$ -vel és r -et $r^{(u)}$ -val helyettesítve U^* és H^* kielégítik (1.5)–(1.8)-at. Illy módon az 1.9. tétel alapján $|E(T) \setminus e| = v(r^{(u)})$ ($T \setminus e$ maximális $P(U, H, \Gamma, r^{(u)}, t)$ -re), azaz $v(r^{(u)}) = v(r) - 1$. Ezzel „ \supset ”-t bizonyítottuk.

Ha $u \in U^*$, akkor u olyan pont, amelyet egyszer megcímkéztünk az 5. lépésben (vagy az 1. lépésben). Ha u telítetlen (azaz az 1. lépésben kapott címkét), akkor világos, hogy $v(r^{(u)}) = v(r)$. Ha u telített, akkor az 5. lépésben kapott címkét, így létezik egy telítetlen i pontból u -ba vezető P kék-piros alternáló út. Ha felcseréljük a P éleinek a színét, a piros élek száma nem változik, míg (1.1), (1.2) és (1.3) teljesül r -et $r^{(u)}$ -val felcserélve, azaz egy $P(U, H, \Gamma, r^{(u)}, t)$ -re vonatkozó maximális órarend készült. Tehát $v(r^{(u)}) = v(r)$. \square

Az implementációban használjuk az I. algoritmus és az 1.8. tétel súlyozott változatát is. Bizonyítások nélkül foglaljuk össze az eredményeket, az olvasó ezeket könnyen ellenőrizheti:

1.11. DEFINÍCIÓ. Legyen $w: U \times H \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ha τ órarend, akkor

$$\sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \tau(u, h) w(u, h)$$

a τ órarend értéke. Ha τ^* olyan órarend, amelyre

$$\sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \tau^*(u, h) w(u, h) = \max_{\tau} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \tau(u, h) w(u, h)$$

(ahol τ az összes órarenden fut végig), akkor τ^* -ot w -hez tartozó optimális órarendnek fogjuk nevezni. Az

$$\omega(w) = \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \tau^*(u, h) w(u, h)$$

szám az optimum értéke.

Ha $w(u, h) > 0 \Leftrightarrow h \in \Gamma(u)$, akkor azt mondjuk, hogy w kompatibilis (Γ -val vagy G -vel). Világos, hogy egy maximális órarend optimális a következő súlyfüggvénnyel:

$$w_0(u, h) = \begin{cases} 1, & \text{ha } h \in \Gamma(u) \\ 0, & \text{ha } h \in H \setminus \Gamma(u). \end{cases}$$

1.12. TÉTEL.

$$\omega(w) = \min \left\{ \sum_{u \in U} \xi(u)r(u) + \sum_{h \in H} \eta(h)t(h) + \sum_{u \in U} \sum_{h \in H} \max(0, w(u, h) - \xi(u) - \eta(h)) \right\},$$

ahol a minimum a jobb oldalon az összes $\xi: U \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $\eta: H \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ függvény-páron fut.

Ezt a minimax tételt a tapasztalt olvasó könnyen bebizonyíthatja a max-folyammin-vágás algoritmus súlyozott változatának a felhasználásával. (lásd [7]). Az implementációban az *Egerváry—Kuhn primál-duál algoritmust* általánosítottuk (l. [7]) úgy, hogy az általánosított algoritmus időigénye az eredetiével megegyezik. Az $1 = r(u) = t(h)$ ($\forall u \in U, \forall h \in H$) esetre az 1.12. tétel az *Egerváry—Kuhn tételt* adja (lásd [7]). Az 1.12. tételnek érdekes „gazdasági” értelmezés adható.

A 4. részben szó lesz arról is, hogy a gyakorlatban a w -t hogyan kell választani.

Nem lehet a felhasználókra bízni a definiálását és nagyon óvatosnak kell lenni, hogy i megválasztásának ne legyenek kártékony mellékhatásai, pl. a terminálok kihasználtságával kapcsolatban.

Megköveteljük, hogy egy optimális órarend maximális is legyen (tehát w -re és w_0 -ra is optimális), így w -nek speciális alakúnak kell lennie.

2. Az igények igazságos csökkentése

Ebben a részben azt az esetet vizsgáljuk, amikor az I. algoritmus teljes órarend elkészítése nélkül áll le. Definiáljuk az „igazságosság” fogalmát, majd megadunk egy olyan algoritmust, amely igazságos órarendet készít. Először néhány definícióra és lemmára lesz szükségünk.

Tegyük fel, hogy minden $u \in U$ -ra adott egy $p_u: \{0, 1, \dots, r_u\} \rightarrow \mathbb{N}$ monoton nemcsökkenő függvény. A $p_u(d)$ függvényértéknek ($0 \leq d \leq r_u$, d egész szám) az a heurisztikus jelentése, hogy méri, mennyire kerül „kedvező helyzetbe” az u felhasználó, ha d órát kap az órarendben. Az igazságosság valamiféle „egyenletességet” vagy „egyensúlyt” fog jelenteni az idő elosztásánál és a mérték megadásához lesz szükségünk a $P_u(u \in U)$ függvényekre: a szigorú egyenletesség nem volna helyes, a felhasználók szükségleteire, megbízhatóságára stb. tekintettel kell lennünk. Feltételezzük, hogy p_u tartalmazza mindezeket a különbségeket és a legigazságosabb megoldás az lenne, ami teljesíti $p_i(d_i) = p_j(d_j)$ -t $\forall i, j \in U$. ($d_i = \sum_{h \in H} \tau(i, h)$, az i felhasználó által kapott idő.) Természetesen ez általában nem lehetséges: a $\{d = (d_1, \dots, d_n): d_i = d_T(i), T \text{ egy órarend}\}$ halmaz a Γ függvény szerkezetétől függ, vagy ami ezzel ekvivalens a G gráfétól. Tehát az „igazságosság” fogalmának a G -től is függnie kell.

Először egy rendezést definiálunk $U \times \mathbb{N}$ -en.

2.1. DEFINÍCIÓ. $(u_1, d_1) < (u_2, d_2)$ ($u_i \in U, d_i \in \mathbb{N}, 0 \leq d_i \leq r_i, i = 1, 2$), olvasd: a d_1 órával rendelkező u_1 felhasználó rosszabbul jár mint a d_2 órával rendelkező u_2 felhasználó, ha a következő feltételek közül mindkettő teljesül:

1. $d_1 < r_1$
2. $p_{u_1}(d_1 + 1) - p_{u_1}(d_2 - 1) < p_{u_2}(d_2) - p_{u_2}(d_1)$.

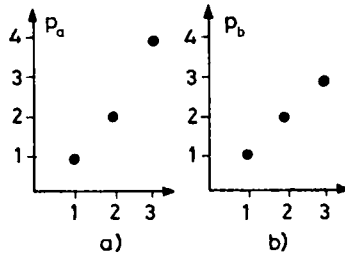
2.2. ÁLLÍTÁS.

a) Ha $(u_1, d_1) < (u_2, d_2)$, akkor $p_{u_1}(d_1) < p_{u_2}(d_2)$

b) $<$ részben rendezés, azaz irreflexív, tranzitív antiszimmetrikus reláció. \square

Bizonyítás. a) is és b) is nyilvánvaló a 2.1. definíció 1. és 2. és p_{u_i} ($i=1, 2$) függvények monotonitásának felhasználásával. $\square \square$

2.3. *Példa.* Legyen A és B két felhasználó, $r_A=r_B=3$, és a p_A és p_B a 2. ábrán látható függvények.



2. ábra

Az 1 órával rendelkező B felhasználó nem jár rosszabbul mint 2 órával rendelkező A felhasználó, de $(B, 2) < (A, 3)$ mert

$$1 = p_B(3) - p_A(2) < p_A(3) - p_B(2) = 2.$$

Ez azt jelenti, hogy még akkor is, ha $p_A(d_A) < p_B(d_B)$ fennáll, csak akkor mondjuk, hogy az A felhasználó rosszabbul jár mint B , ha B -től 1 órát elvéve és A -nak adva a közöttük levő különbség előjelet vált de nem csökken, vagy nem vált előjelet. Másképpen szólva $(A, d_A) < (B, d_B)$ akkor és csak akkor, ha $p_A(d_A) < p_B(d_B)$, és $d_A + d_B$ óra igazságosan elosztható A és B között, azaz úgy, hogy $|p_A(d_A) - p_B(d_B)|$ kisebb legyen. A példában igazságos, ha B 3 órát kap és A 2-t, ha pedig fordítva történik, az nem igazságos.

2.4. DEFINÍCIÓ. Adott (G, r, t) -re azt mondjuk, hogy $d: U \rightarrow \mathbb{N}$ elosztás, ha létezik egy $P(G, r, t)$ -hez tartozó T órarend, amelyre $d(u) = d_T(u)$. Az elosztás igazságos, ha

1. T maximális

2. $(u_1, d(u_1)) < (u_2, d(u_2))$ -ből következik, hogy a következő d' nem elosztás:

$$d'(u) = \begin{cases} d(u) + 1, & \text{ha } u = u_1 \\ d(u) - 1, & \text{ha } u = u_2 \\ d(u), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2.5. *Megjegyzés.* Az 1. feltétel túlzottnak tűnhet, de az alábbi 2.6. állítás ismeretében nincs okunk rá, hogy feladjuk a maximalitást. A 2. feltétel azt jelenti, hogy

igazságos elosztás esetén nem lehetnek olyan felhasználók, akik tudnak 1 órát adni olyan felhasználóknak, akik náluk rosszabbul jártak.

2.6. ÁLLÍTÁS. Ha T_1 tetszőleges órarend, akkor létezik egy T_2 maximális órarend úgy, hogy $d_{T_2}(u) \equiv d_{T_1}(u) \quad \forall u \in U$. \square

Bizonyítás. Színezzük pirosra a T_1 éleit, és ebből kiindulva használjuk az I. algoritmust egy maximális órarend konstruálására. Jelöljük ez utóbbit T_2 -vel. Nyilvánvalóan $d_{T_2}(u) \equiv d_{T_1}(u)$, $\forall u \in U$ ugyanis egy alternáló út mentén a színeket megváltoztatva, nem csökken egy pontnak a foka sem. $\square \square$

Most leírjuk a „csökkentő algoritmust”, amely az 1.10. állításon alapszik, és azután megmutatjuk, hogy pontosan azok az igazságos elosztások, amelyeket ez az algoritmus határoz meg.

II. algoritmus.

Input: G, r, t .

Output: $d: U \rightarrow \mathbb{N}$ igazságos elosztás.

0. lépés: Hívjuk meg az I. algoritmust. Az eredmény egy T maximális órarend, és $U^* \subset U$.

1. lépés: Ha $U^* = \emptyset$, akkor menjünk az 5. lépésre, egyébként menjünk a 2. lépésre.

2. lépés: Válasszuk $u \in U^*$ -ot a következőképpen:

$$p_u(d_T(u)) + p_u(d_T(u) - 1) = \max_{i \in U^*} p_i(d_T(i)) + p_i(d_T(i) - 1)$$

menjünk a 3. lépésre.

3. lépés: a) Ha $r(u) > d_T(u)$, menjünk a 4. lépésre.

b) Ha $r(u) = d_T(u)$, akkor $u \in U^*$ -ból következik, hogy van olyan $u' \in U^*$ $r(u') > d_T(u')$, hogy u és u' között van kék-piros alternáló út. Cseréljük fel ennek az útnak a színeit. Menjünk a 4. lépésre.

4. lépés: $r(u) \leftarrow r(u) - 1$

és módosítsuk a címkéket, (az igény függvény és a T módosítása ezt valószínűleg szükségessé teszi. Ezzel meghatározzuk U^* -ot. Ha $r(u) > d_T(u)$ még mindig teljesül, akkor U^* nem változott.) Menjünk az 1. lépésre.

5. lépés: $d(u) \leftarrow r(u) (\forall u \in U)$

STOP.

Megjegyzés. Első látásra furcsának tűnhet az a mennyiség, amelynek a maximumát vesszük a 2. lépésben. Pedig természetes még heurisztikusan is, hogy mind $p_u(d_T(u))$ -nak, mind $p_u(d_T(u) - 1)$ -nek hatással kell lennie arra, hogy kitől veszünk el egy órát: u i. jelenleg $p_u(d_T(u))$ méri, hogy az u felhasználó mennyire jár jól és ha egy órát elveszünk tőle, akkor $p_u(d_T(u) - 1)$ fogja mérni.

2.7. TÉTEL. A II. algoritmus által meghatározott d igazságos elosztás. Megfordítva, ha d igazságos elosztás, akkor d a II. algoritmusból származik az $u \in U^*$ valamilyen választásával a 2.1. lépésben. \square

Bizonyítás. Először bebizonyítjuk, hogy d igazságos elosztás. A 2.4. definíció „1.” része nyilvánvalóan teljesül rá, mivel sohasem csökkentettük $|E(T)|$ -t, és 1.10

pontosan igazolja, hogy miért nem kellett ezt tennünk. (Azt mondja ki, hogy ha $r(u)-t$, ($u \in U^*$) 1-gyel csökkentjük, akkor v nem csökken.)

Tegyük föl most, hogy $(A, d(A)) < (B, d(B))$, és bizonyítsuk be a 2.4. definíció „2.” részét. $(A, d(A)) < (B, d(B))$ a következőket jelenti (lásd 2.1. definíciót):

$$(2.1) \quad d(A) < r(A)$$

$$(2.2) \quad p_A(d(A)+1) - p_B(d(B)-1) < p_A(d(A)) - p_B(d(B)).$$

A (2.1)-ből következik, hogy a 2. lépésnek legalább egy előfordulásában $u \in U^*$ a kiválasztott felhasználó. Legyen d^* a d_T fokszám függvény aktuális értéke az A legutolsó előfordulása előtt. Ekkor:

$$(2.3) \quad p_A(d^*(A)) + p_A(d^*(A)-1) \cong p_x(d^*(x)) + p_x(d^*(x)-1)$$

minden $x \in U^*$ -ra, ugyanis A a kiválasztott felhasználó a 2. lépésben és

$$(2.4) \quad d^*(A) = d(A) + 1$$

mert ez A utolsó előfordulása a 2. lépésben.

Helyettesítsük (2.4)-et (2.3)-ba és használjuk $d^*(x) \cong d(x)$ -et és p_x monotonitását. Átrendezés után:

$$(2.5) \quad p_A(d(A)+1) - p_x(d(x)-1) \cong p_x(d(x)) - p_A(d(A))$$

minden $u \in U^*$ -ra. Ha összehasonlítjuk (2.5)-öt (2.2)-vel, akkor azt kapjuk, hogy $B \notin U^*$ abban a lépésben, amelyet most tekintünk. Ebből következik, hogy $B \notin U^*$ az algoritmus további lépéseiben is és ezért $d(B) = d^*(B)$. Másrészt egy B -hez illeszkedő piros élt törölve, a $d'(B) = d^*(B) - 1$, $d'(x) = d^*(x)$ definícióval (1.5)–(1.8) teljesül a módosított órarendre és a d' igényfüggvényre. Az 1.9. tételt alkalmazva ez a piros élek által meghatározott órarend maximalitását jelenti. Így $v(d') = v(d) - 1$.

Legyen

$$d'' = \begin{cases} d(u)+1, & \text{ha } u = A \\ d(u)-1, & \text{ha } u = B \\ d(u), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel $d'' \cong d'$, bebizonyítottuk, hogy $v(d'') \cong v(d') \cong v(d) - 1$, és

$$\sum_{u \in U} d''(u) = \sum_{u \in U} d(u) = v(d)$$

miatt azt kaptuk, hogy d'' nem elosztás. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a 2.4. definíció 2. része szintén teljesül, így d igazságos elosztás, és a tétel 1. része be van bizonyítva.

Legyen most d egy tetszőleges igazságos elosztás. Vázzuk annak a bizonyítását, hogy d lehet a II. algoritmus outputja. Futtassuk a II. algoritmust azzal a módosítással, hogy ha a 2. lépésben több lehetőség adódik, akkor azt az $u \in U^*$ -ot választjuk, amelyre $d_T(u) > d(u)$ teljesül. Ha ez mindig lehetséges, akkor d az algoritmus outputja. Indirekt módon tegyük fel, hogy ez nem mindig lehetséges, vagyis van az algoritmusnak egy olyan lépése, amikor $U^* \neq \emptyset$ és ráadásul a következő M_1, M_2 halmazok diszjunktak:

$$M_1 := \{x \in U^*: p_x(d_T(x)) + p_x(d_T(x)-1) = \max_{u \in U^*} p_u(d_T(u)) + p_u(d_T(u)-1)\}$$

és

$$M_2 := \{x \in U^* : d_T(u) > d(u)\}.$$

(d_T az adott állapot fokszámait jelöli.) $M_2 \neq \emptyset$, mert $M_2 \neq \emptyset$ azt jelentené, hogy $d_T(u) = d(u)$, ha $u \in U^*$ és ebből következne, hogy $d_T = d$ ellentmondásban azzal, hogy $U^* \neq \emptyset$. $M_1 \neq \emptyset$ nyilvánvaló, és $d_T(u) = d(u)$, ha $u \in M_1$. Legyen $A \in M_2$ és $B \in M_1$ tetszőleges. Mivel $A \in M_2$:

$$(2.6) \quad r(A) \cong d_T(A) > d(A)$$

és mivel $A \notin M_1$ és $A \in U^*$:

$$(2.7) \quad p_B(d(B)) + p_B(d(B) - 1) = p_B(d_T(B)) + p_B(d_T(B) - 1) > \\ > p_A(d_T(A)) + p_A(d_T(A) - 1) \cong p_A(d(A) + 1) + p_A(d(A)).$$

(2.6)-ból és (2.7)-ből következik $(A, d(A)) < (B, d(B))$. Pedig $u = B$ -t kiválaszthatjuk az algoritmus következő „2. lépésében”. Ebből könnyen következik, hogy d' igazságos elosztás:

$$d'(x) = \begin{cases} d(x) + 1, & \text{ha } x = A \\ d(x) - 1, & \text{ha } x = B \\ d(x), & \text{egyébként} \end{cases}$$

szintén elosztás, ami ellentmondásban áll azzal a feltételezéssel, hogy d igazságos elosztás. Ugyanis ellentmond a 2.4. definíció 2. pontjának. A tétel be van bizonyítva. $\square \square$

Megjegyzések. 1. Az implementációban a $p_u(r) = l_u + r(u \in U, r \in \mathbb{N})$ függvényt használjuk, ahol $l_u \in \mathbb{N}$ az U felhasználó paramétereitől függő szám (azaz attól függ, hogy milyen megbízhatóan használja ki a terminálidőt, mennyi CPU időt szokott használni stb.). Minél kisebb az l_u , annál jobb az u felhasználónak.

Erre a speciális esetre a 2. tétel erősíthető: Ekkor lényegében csak egyetlen igazságos elosztás van. A következő állítások igazak:

a) Vannak olyan $d_u (u \in U)$ számok, hogy minden igazságos d elosztásra és $u \in U$ -ra vagy $d(u) = d_u$ vagy $d(u) = d_u + 1$.

b) Létezik a felhasználóknak egy $\{P_i : 1 \leq i \leq p\}$ partíciója és egy $\{k_i : 1 \leq i \leq p\}$ számhalmaz úgy, hogy $l_u + d_u$ konstans minden P_i -ben és minden d igazságos elosztásban:

$$|\{u \in P_i : d(u) = d_u + 1\}| = k_i \quad (i = 1, \dots, p).$$

Ez azt jelenti, hogy csak 1 óra függhet a szerencsétől, és minden igazságos elosztásban ugyanannyi „szerencsés” felhasználó van kiválasztva egy partíció egyes elemeiből, ahol a partíció egy eleme „egyenlően kedvezményezett” felhasználókat tartalmaz. Az $l_u + d_u$ által mért különbségek a feladat szerkezete miatt keletkeznek és nem lehet ezen segíteni, hacsak el nem veszünk néhány órát kedvezményezett felhasználóktól és nem adjuk ezeket senkinek, ami nyilvánvalóan nem ésszerű.

Ebben a speciális esetben az igazságos elosztások a $d(u_1), d(u_2), \dots, d(u_m)$ sorozatnak a $d(u_1) \cong d(u_2) \cong \dots \cong d(u_m)$ rendezéssel a lexikografikus minimumát adják (d az elosztásokon fut).

2. Az általános esetben az algoritmus outputjaként előforduló elosztások halmaza, (vagyis az igazságos elosztások halmaza) megegyezik a következő sorozatok lokális lexikografikus minimumainak a halmazával.

$$p_{u_1}(d(u_1)), \dots, p_{u_m}(d(u_m)) (p_{u_1}(d_{u_1}) \cong \dots \cong p_{u_m}(d_{u_m})).$$

Sajnos általában több lokális optimum van, de a $p_u(r) = l_u + r$ esetben csak egy.

3. A II. algoritmust helyettesíthetjük az I. algoritmus egy módosításával, amely olyan felhasználókból kiinduló alternáló utak mentén növel, akikre

$$p_u(d_T(u)) + p_u(d_T(u) + 1) \text{ minimális.}^2$$

Ez a megjegyzés sok esetben lehetővé teszi az algoritmus felgyorsítását.

4. Tekintsük az $f: I_n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, ahol

$$I_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = 1\},$$

és tegyük fel, hogy f konvex, szimmetrikus és minimuma az $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ pontban van.

Legyen

$$D = \left\{ \frac{t_1}{\sum_{u=1}^m t_u}, \dots, \frac{t_m}{\sum_{u=1}^m t_u} : t_u = p_u(d(u)) \text{ és } d \text{ elosztás} \right\}.$$

Ekkor az igazságos elosztások minimalizálják f -et D -n a $p_u(r) = l_u + r$ esetben (és lokális minimumok az általános esetben). Ha a $p_u(r) = r$ speciális esetet vesszük és $f(x_1, \dots, x_n) = -H(x_1, \dots, x_n)$, ahol H a Shannon entrópia vagy $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2$, akkor eredményünket úgy interpretálhatjuk, mint az entrópia függvény maximalizálását vagy az utóbbi függvény minimalizálását az elosztások halmazán. Ez más megfogalmazása annak, hogy az igazságos elosztások az időt a „legegyenleesebben” osztják el a felhasználók között.

3. Az órarendek módosításai

Ebben a részben egy módszert ismertetünk, amellyel kész órarendeket lehet módosítani. A cél az, hogy az új órarend további feltételeknek is eleget tegyen és az eredeti elosztás jó tulajdonságait is megőrizze. Az implementációban ezt a módszert arra használjuk fel, hogy egymás utáni órákat tudjunk adni olyan felhasználóknak, akiknek erre szükségük van. Érdemes ezt a példát végig szem előtt tartani.

Ha adva van párok egy (u_i, h_i) ($i = 1, 2, \dots, s$) halmaza úgy, hogy $h_i \neq h_j$ ($i \neq j$), $(u_i, h_i) \in T$ ($i = 1, \dots, s$), akkor az $\{1, \dots, s\}$ halmaz egy olyan π permutációját keressük, hogy

$$(u_{\pi(i)}, h_i) \in T \quad (i = 1, \dots, s).$$

² A lexikografikus rendezésre és a II. algoritmus alternatívájára vonatkozó megjegyzések (lásd 1. és 3.) KAS PÉTERTŐL származnak a SZTAKI hálózati folyam csoportjából.

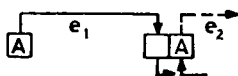
Ekkor

$$T' = (T \setminus \{(u_i, h_i) : i = 1, \dots, s\}) \cup \{(u_{\pi(i)}, h_i) : i = 1, \dots, s\}$$

szintén órarend, és olyan T' -t keresünk, amely „jobb tulajdonságok”-kal rendelkezik, mint T . A következő heurisztikus gondolatmenetben egy ilyen T' órarendet a T *órarend permutációjának* nevezzük.

A fő gondolat a következő: egy órarend permutációi között egy előnyösebb órarendet keresünk, de mivel tetszőleges permutációk tekintése túl időigényes volna, a ciklikus permutációkra szorítkozunk. Ezután amíg csak lehet ismételt ciklikus permutációkat alkalmazunk. Mivel minden permutációt felírhatunk ciklikus permutációk szorzataként, az általánosságot csak annyiban szorítjuk meg, hogy minden ciklikus permutációtól elvárjuk az órarend javítását, azaz nem tekintjük azokat a „jó” permutációkat, amelyek nem állnak elő „jó” ciklikus permutációk szorzataként.

H -n egy olyan irányított gráfot definiálunk, amely tükrözi a lehetséges és kívánatos változásokat. Azután ebben az irányított gráfban egy ciklust fogunk keresni. A talált ciklus egy ciklikus permutációt definiál, amelynek mentén végrehajtjuk a változásokat. Ezután újra definiáljuk az irányított gráfot, és előlről kezdjük az eljárást. Az algoritmus akkor áll meg, ha nincs több ciklus a definiált irányított gráfban.



3. ábra

Egy ilyen hozzáállás bizonyos nehézségekkel jár: a 3. ábrán e_1 egy „kívánt” és e_2 egy „lehetséges” változást jelent. Ha mind e_1 -et, mind e_2 -t tartalmazza egy permutáció, és e_1 -nek az a célja, hogy két egymásutáni órát állítson elő az A felhasználónak, akkor a permutáció nem éri el a célját. Ennek a nehézségnek az elkerülése érdekében megköveteljük, hogy minden felhasználóhoz csak egy változtatás tartozzon minden permutációban. A permutált órarendtől az eredeti órarend minden jó tulajdonságát is meg fogjuk követelni (pl. optimalitást az adott súlyfüggvényre vonatkozóan).

Egy olyan módszer leírásához, amely teljesíti ezeket a követelményeket, a feladat pontosabb megfogalmazására lesz szükségünk.

Tegyük fel, hogy adott egy T órarend a $P(G, r, t)$ feladatra és egy $w: U \times H \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ súlyfüggvény (w kompatibilis G -vel).

3.1. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy Ω irányított gráf az $u \in U$ felhasználóhoz tartozik (T szerint), ha $V(\Omega) \subset \Gamma(u)$ és minden $e = (h_1, h_2) \in E(\Omega)$

$$(3.1) \quad h_1 \in \Gamma_T(u) (\subset \Gamma_G(u)), \quad h_2 \in \Gamma_G(u) \setminus \Gamma_T(u)$$

$$(3.2) \quad w(u, h_1) \leq w(u, h_2). \quad \square$$

((3.1) azt jelenti, hogy T szerint u minden $e \in E(\Omega)$ kezdőpontjában dolgozik, de nem dolgozik a végpontban és (3.2) azt jelenti, hogy egy e mentén bekövetkezett változás nem csökkenti az u értékét.)

Minden u felhasználóhoz két hozzá tartozó irányított gráfot rendelünk: egy „kívánság gráfot” és egy „szaggatott gráfot”. Egy (h_1, h_2) „kívánság nyíl” egy „kívánt

változást" jelent, azaz olyat, amely javítja u helyzetét, „ha semmi más nem történik az u óráival”. Másrészt egy u -hoz tartozó (h_1, h_2) szaggatott él azt jelenti, hogy u számára közömbös, hogy a h_1 vagy a h_2 órában dolgozik-e.

3.2. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy a W_u, D_u irányított gráfok az $u \in U$ -hoz tartozó *kívánság gráf és szaggatott gráf*, ha

a) W_u és D_u u -hoz tartozik T szerint;

b) ha $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in E(W_u) \cup E(D_u)$ és $w(u, a_1) = w(u, a_2)$, akkor $(a_1, b_2), (a_2, b_1) \in E(W_u) \cup E(D_u)$.

Ezenkívül, ha $(a_1, b_1) \in E(W_u)$ szintén fennáll, akkor vagy $(a_1, b_2) \in E(W_u)$ vagy $(a_2, b_1) \in E(W_u)$. \square

A b) első része ekvivalens azzal, hogy $W_u \cup D_u$ egy teljes páros gráf és izolált pontok uniója.

A 3.2. definíciói teljesülnek, vagy majdnem teljesülnek a felmerülő alkalmazásokban. Ez nem meglepő, ha belegondolunk a nyílak jelentésébe: pl. a b) második része azt jelenti, hogy az u felhasználó számára $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in E(W_u) \cup E(D_u)$ esetén vagy b_2 is jobb a_1 -nél vagy b_1 jobb mint a_2 . Ez nem meglepő, mivel $(a_1, b_1) \in E(W_u)$ vagy azt jelenti, hogy a_1 nem elég jó u számára vagy azt, hogy b_1 nagyon jó u számára. Az, hogy ezek a feltételek teljesülnek, nagy „szerencse”, ugyanis a) és b) módszerünk használhatóságának fontos feltételei:

Legyen adott minden $u \in U$ -hoz az u -hoz tartozó W_u, D_u kívánság és szaggatott gráfokból álló pár és legyen $W = \bigcup_{u \in U} W_u, D = \bigcup_{u \in U} D_u$. $e \in E(W)$ -t *kívánság nyílnak* és $e \in E(D)$ -t *szaggatott nyílnak* nevezzük. Ha $C = (x_1, \dots, x_s)$ ciklus és $C' = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ szintén ciklus, akkor C' -t C rész ciklusának nevezzük. Legyen $\Delta_u = W_u \cup D_u, \Delta = \bigcup_{u \in U} \Delta_u$.

Ennek a résznek a fő eredménye a következő:

3.4. TÉTEL. Ha T optimális órarend a $P(G, r, t)$ -problémához és a w súlyfüggvényhez, akkor minden olyan ciklusban, amely legalább egy kívánság nyílat tartalmaz, van olyan rész ciklus, amely legalább egy kívánság nyílat tartalmaz és legfeljebb egy élt minden $\Delta_u (u \in U)$ -ból. \square

3.5. Következmény. Annak a ciklusnak, amelynek minimális számú éle van a legalább egy kívánság éllel rendelkező ciklusok közül, legfeljebb egy éle van minden Δ_u -ban. $\square \square \square$

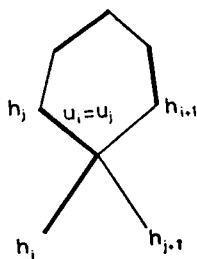
A 3.4. tétel bizonyításának az alábbi 3.6. lemma az alapja. Jegyezzük meg, hogy az Ω irányított gráfban egy (h_1, \dots, h_s) sétának egy $(h_1, u_1, h_2, u_2, h_{s-1}, u_{s-1}, h_s)$ *piros-kék alternáló út felel meg G -ben, ahol $(h_i, h_{i+1}) \in \Delta u_i$* . Ez abból következik, hogy $\Delta = \bigcup_{u \in U} \Delta_u$ és ezért $\exists u_1 \in U: (h_i, h_{i+1}) \in \Delta u_i$. Másrészt, mivel Δu_i u_i -hez tartozik, azért $h_i \in \Gamma_T(u_i), h_{i+1} \in \Gamma_G(u_i) \setminus \Gamma_T(u_i)$, és így az élsorozat piros-kék.

3.6. LEMMA. Ha T optimális órarend és $(h_1, u_1, h_2, u_2, \dots, u_{s-1}, h_s)$ zárt piros-kék alternáló élsorozat, amely kielégíti

(3.3) $w(h_i, u_i) \equiv w(u_i, h_{i+1})$ -et, akkor $u_i = u_j$ -ből következik

$$w(h_i, u_i) = w(h_j, u_j) = w(u_i, h_{i+1}) = w(u_j, h_{j+1})$$

(l. 4. ábra). \square



4. ábra

Bizonyítás. Mivel T optimális, (3.3) mindig egyenlőséggel teljesül. Indirekt módon tegyük fel, hogy pl.

$$w(h_i, u_i) = w(u_i, h_{i+1}) = w_1 < w_2 = w(h_j, u_j) = w(u_j, h_{j+1}).$$

Az általánosság megszakítása nélkül feltehetjük, hogy $i < j$. Most $u_i = u_j$ -ből következik, hogy

$$P' = (u_i, h_{i+1}, u_{i+1}, h_{i+1}, \dots, h_j, u_j)$$

szintén egy zárt alternáló séta. Ha felcseréljük P' színeit, növeljük az órarend súlyát, ami ellentmond T optimalitásának.

A 3.4. tétel bizonyítása. Legyen $C = (h_1, \dots, h_s)$ egy ciklus Δ -ban, amely tartalmaz egy kívánság élt. Ha $\exists u \in U$ és $i < j$ úgy, hogy

$$(3.4) \quad (h_i, h_{i+1}), (h_j, h_{j+1}) \in \Delta_u,$$

akkor bebizonyítjuk, hogy C -nek van egy megfelelő részciklusa Δ -ban, amelyben van kívánság él. Ebből az állítás már könnyen következik.

Tudjuk, hogy $(h_i, h_{i+1}) \in \Delta_{u_i}$ valamely $u_i \in U$ -ra ($i = 1, 2, \dots, s$) és $(h_s, h_1) \in \Delta_{u_s}$ valamely $u_s \in U$ -ra. Feltevésünk szerint $(h_1, u_1, h_2, u_2, \dots, h_s)$ zárt alternáló élsorozat, és $u_i = u_j = u$.

$w(h_i, u_i) \leq w(u_i, h_{i+1})$ mivel Δ_i u_i -hoz tartozik. Így teljesülnek a 3.6. lemma feltételei. A 3.6. lemma alapján $w(u, h_i) = w(u, h_j)$. Mivel W_u és D_u kívánság gráf és szaggatott gráf és $\Delta_u = W_u \cup D_u$, a (3.4) és a (3.2) definíció alapján adódik, hogy mind $(h_i, h_{j+1}) \in E(\Delta_u)$, mind $(h_j, h_{i+1}) \in E(\Delta_u)$ teljesül. $C_1 = (h_1, \dots, h_i, h_{j+1}, \dots, h_s)$ és $C_2 = (h_{i+1}, \dots, h_j, h_{i+1})$ a C részkörei és C minden élét, kivéve (h_i, h_{i+1}) -et és (h_j, h_{j+1}) -et tartalmazza vagy C_1 vagy C_2 . Így, ha (h_i, h_{i+1}) és (h_j, h_{j+1}) is szaggatott, akkor vagy C_1 vagy C_2 tartalmazza a C kívánság éle(i)t, és az állítás be van bizonyítva. Másrészt, (h_i, h_{i+1}) és (h_j, h_{j+1}) -re (3.4) teljesül, így, ha legalább egyikük kívánság él, akkor a 3.2. definíció b) része alapján tudjuk, hogy (h_i, h_{i+1}) és (h_j, h_{i+1}) közül legalább az egyik szintén kívánság él. Az előbbi C_1 , az utóbbit C_2 tartalmazza, így vagy C_1 vagy C_2 vagy mindkettő mindenképpen tartalmaz egy kívánság élt. $\square \square$

A 3.5. következményből egy megfelelő órarendeket készítő algoritmus kiolvasható: könnyű elkészíteni azt a minimális kört, amelynek van kívánság éle, bármelyik minimális út kereső algoritmus segítségével (lásd pl. [7] vagy [8]). A következő algoritmust javasoljuk.

III. algoritmus.

0. lépés: Készítsünk el egy $P(G, r, t)$ -hez és w -hez tartozó optimális T órarendet. Menjünk az 1. lépésre.
1. lépés: Defináljuk minden $u \in U$ felhasználóhoz a kívánság gráfot és a D_u szaggatott gráfot úgy, hogy a 3.2. definíció feltételei teljesüljenek. Határozzuk meg a $W = \bigcup_{u \in U} W_u$, $D = \bigcup_{u \in U} D_u$ irányított gráfokat és $\Delta = W \cup D$ -t. Menjünk a 2. lépésre.
2. lépés: Keressünk Δ -ban egy olyan minimális kört, amelynek van éle W -ben. Menjünk a 3. lépésre.
3. lépés: Ha találunk egy C ciklust, menjünk a 4. lépésre. Ha nincs ilyen ciklus, STOP.
4. lépés: Hajtsuk végre a C nyilainak megfelelő változtatásokat. Legyen T az új órarend. (T a megfelelő alternáló út színeinek a felcseréléséből származik, lásd 3.5. következményt és 3.6. lemmát). Menjünk az 1. lépésre. \square

Mivel T optimális órarend és W_u, D_u $u \in U$ -hoz tartozik, az új órarend a 4. lépés után szintén optimális: (3.2)-ből és a T optimalitásából következik, hogy $w(u_i, h_i) = w(h_i, u_{i+1})$ (lásd 3.6. lemma). Így az 1. lépés minden előfordulásánál újra és újra el kell döntenünk, melyek azok a nyilak, amelyek kívánságokat fejeznek ki, (kívánság gráf), és a nem tiltott, de nem is kívánt „közömbös” változtatásokat jelölik (szaggatott gráf). Ez a legidőigényesebb eljárás az implementációban (bár, ha legymás utáni órák előállítására használjuk $O((n+m)^3)$ -bel becsülhető).

Az algoritmus akkor áll meg, ha *nincs több javító ciklus*. Bár nem tudunk erősebbet mondani (pl. nem tudunk készíteni olyan célfüggvényt, amelyet ez az algoritmus optimalizálna), reméljük, erre a megközelítésre elegendő indoklást adunk a dolgozat következő részében: okunk van azt hinni, hogy még a legegyszerűbb pontos optimalizálási követelmények is nagyságrenddel nagyobb futási időt igényelnek.

4. Egyéb

Ebben a részben röviden összefoglaljuk a feladat gyakorlatban előforduló különböző módosításainak és általánosításainak az elemzését, és végül néhány szót ejtünk a számítógépes tapasztalatokról.

A bonyolultságvizsgálat nagy szerepet játszott feladatunk megoldásában: a polinomialitásnak és az NP teljességnek nagyon valóságos, gyakorlati jelentése van itt. Az NP teljesség bizonyítása azt jelenti, hogy az általunk használt módszerek már nem alkalmazhatók az adott módosításra vagy általánosításra. Ily módon a bonyolultságvizsgálat lehetővé tette, hogy ne veszítsünk időt kezelhetetlen általánosításokkal.

Felsoroljuk most azokat a további megkötéseket, amelyeket megkövetelhetünk az órarendünktől.

1. Az egy órás terminálidők számának minimalizálása vagy a megszakítások számának minimalizálása.

Ezek a feladatok (azaz a megfelelő „eldöntési problémák”) NP-teljesek: számos ismert NP-teljes ütemezési feladatot könnyen vissza lehet vezetni ezeknek a felada-

toknak egyszerű speciális eseteire (pl. [10]-ben) SEQUENCING ON ONE PROCESSOR-t vissza lehet vezetni a $|T|=1$ speciális esetre. Így megelégszünk azzal a módszerrel, amelyet a 3. részben írtunk le, és amely ciklikus permutációkkal nem javítható állapot elérésére törekszik. Több hónapi számítógépes tapasztalat után elmondhatjuk, hogy ez a megközelítés teljes mértékben kielégíti a gyakorlati szükségleteket.

2. *Lehetséges-e kiterjeszteni az eredményeket arra az általánosabb modellre, amikor minden $u \in U$ -hoz adott egy $H_u = \{H_{(u,1)}, \dots, H_{(u,s_u)}\}$ ($H_{u,j} \subset H$) halmaz rendszer és egy $r_u = (r_{(u,1)}, \dots, r_{(u,s_u)})$ vektor, ami azt fejezi ki, hogy az u igénye $H_{(u,1)}$ -ben $r_{(u,1)}$ -et?*

(Pl. az a kérdés, hogy a következő típusú igények megengedettek-e: „9 órát szeretnék, kettőt a hét első felére, 4-et, amikor a B diszk van fent, és két órát pedig délután.) A SET PACKING feladatot könnyen vissza lehet vezetni még az $|U|=2$ speciális esetre is.³ (SET PACKING az $Ax \leq 1$, $x \in \{0, 1\}^n$, $\max \sum_{i=1}^n x_i$ diszkrét programozási feladat, A egy $m \times n$ -es 0–1 mátrix. Ez a probléma NP-teljes, (lásd [10]).)

A gyakorlatban azonban elég a

$$(4.1) \quad \forall u \in U: H_{u,i} \cap H_{u,j} = \emptyset \quad (i \neq j)$$

speciális esetet tekinteni, és ezt meg lehet oldani a módszereinkkel polinomiális időben. Ez lehetővé tesz például a hét minden napjára vagy délelőttre és délutánra részletezett igényeket, és minden felhasználó diszjunkt részekre oszthatja a hetet.

Jegyezzük meg, hogy ha egy új $u_i \in U$, $1 \leq i \leq s_u$ felhasználót megfeleltetünk minden (u, i) párnak, akkor az általánosított feladatot visszavezetjük az eredetire. Természetesen ez a transzformáció jelentősen megnöveli a feladat méretét. Ezért nem ezt használjuk, hanem helyette úgy módosítottuk a címkéző eljárást, hogy az kezelni tudjon ilyen igényeket is a futási idő jelentős növelése nélkül.

3. *Néhány felhasználó csoportosan szeretne dolgozni*, és a csoportbeli felhasználóknak nincs szükségük egyszerre két terminálra (pl. nem tudnak egyszerre logonolni vagy inkább egy terminált szeretnének hosszabb időre, és nem sok terminált rövid időre). Ha a felhasználó több csoportban vehet részt, a feladat NP teljes (visszavezetés ismét a SET PACKING-ből), de ha minden felhasználó legfeljebb egy csoporthoz tartozik, folyam módszereket alkalmazhatunk erre az esetre is, sőt még arra az általánosításra is, amikor a követelmény az, hogy minden csoport legfeljebb l terminált kaphat egyszerre. Gyakorlati szempontból a diszjunkt csoportok teljesen kielégítőek.

4. *Hogyan oldjuk meg a feladatot, ha különbség van a terminálok között?* (Ezt a feladatot feltétlenül meg kellett oldani a gyakorlatban, mert létrejött egy második terminálszoba különböző terminálokkal. Egy teletype és két fajta display van benne.) Ha minden felhasználó minden terminálra igényel időt, akkor a feladat NP

³ Ha $A = (a_{ij})$ egy 0–1 mátrix, legyen $A_i = \{1 \leq j \leq n: a_{ij} = 1\}$ és legyen $U = \{u, v\}$, $H = \{1, 2, \dots, n\}$, $H_{u,i} = A_i$, $r_{u,i} = |A_i| - 1$ ($i = 1, \dots, m$) és $H_v = H$, $r_v = c$ ($c \in \mathbb{R}$ adott szám). Ezekkel az adatokkal akkor és csak akkor létezik teljes órarend, ha létezik egy x megoldás $Ax = 1$ $\sum_{i=1}^n x_i = c$.

teljes. (Ez megegyezik a TIMETABLE DESIGN-nal [10]-ben.) Ha minden felhasználónak csak egy összesített időigénye van, de a terminálok csak egy részhalmaza megfelelő a számára, akkor egy általánosabb hálózati folyam modell oldja meg a feladatot ugyanolyan nagyságrendű időigénnyel. Ezt a megközelítést azonban nem használjuk, mert igazságtalansághoz vezethet a terminálok elosztásában. Ehelyett felhasználó-terminál súlyozást használunk minden $h \in H$ -ra, és egy súlyozott felhasználó-terminál házasságproblémát oldunk meg minden $h \in H$ -ra. A súlyok definiálásakor persze azt is figyelembe kell vennünk, hogy a felhasználók nem akarnak terminált változtatni, ha több órát dolgoznak.

5. *Diszkek.* Az IBM 3031 számítóközpontban a diszkek és diszk-drive-ok mennyisége még szűkebb keresztmetszet, mint a terminálok száma, erre is vonatkozik az amerikai embargo. A legtöbb felhasználó olyan diszken tárolja a programját, amely csak akkor van fenn, amikor legalább egyik felhasználójának terminál ideje van. Két diszk-drive van és sok diszk, minden diszken több felhasználó számára van tárolási hely. Mivel csak öt terminál van, a diszkeknek a felhasználójuk terminál-idejével való összehangolása gondot okozhat. Célszerű, ha minden órában több olyan felhasználó dolgozik, aki ugyanazt a diszket használja. Ezért egy diszk-idő órarendre van szükség.

Ha már készen van a τ felhasználó-idő órarend, akkor a diszk-idő elosztás feladata ugyanaz, mint a felhasználó-idő feladat: ha az $U_d \subset U$ felhasználók a d diszket használják, akkor legyen:

$$(4.2) \quad w(d, h) = |\{u \in U_d : \tau(u, h) = 1\}|$$

és

$$(4.3) \quad r(d) = \left| \bigcup_{u \in U(d)} \{h : \tau(u, h) = 1\} \right|.$$

A diszkek a felhasználók és a diszk-drive-ok a terminálok szerepét játsszák, és a $w(d, h)$ súlyok olyanok, hogy egy optimális δ órarend erre a feladatra az „összehangolt” *hármások teljes számának a maximumát adja*, azaz azon (u, d, h) hármások számának maximumát, amelyekre

$$\tau(u, h) = 1, \quad \delta(d, h) = 1, \quad h \in U_d.$$

Nem ésszerű azonban felhasználó-idő órarendet készíteni először: ez az órarend nem fog arra törekedni, hogy azonos időre osszon be olyan felhasználókat, akiknek ugyanarra a diszkre van szükségük. Ugyanakkor a diszk-idő órarendet nem lehet a felhasználó-idő órarend előtt elkészíteni, mivel $w(d, h)$ -t és $r(d)$ -t nem lehet τ nélkül definiálni.

Kompromisszumként először egy sztochasztikus felhasználó-idő órarendet készítünk, és azután egy diszk-idő órarendet úgy, hogy

$$(4.4) \quad w(d, h) = M(|\{u \in U_d : \tau(u, h) = 1\}|)$$

$$(4.5) \quad r(d) = M\left(\left| \bigcup_{u \in U_d} \{h : \tau(u, h) = 1\} \right|\right),$$

ahol $\tau(u, h)$ valószínűségi változó, és M a várható értéket jelöli. A τ valószínűségi változót úgy definiáljuk, hogy feltételezzük, minden $u \in U$ felhasználó számára $\Gamma(u)$ minden

olyan részhalmaza, amelynek $r(u)$ eleme van egyformán valószínű vagy a valószínűség arányos a halmazok súlyával. Ebből a feltevésből a (4.4) és (4.5) várható értékeket elemi eszközökkel ki lehet számolni, és egy első δ diszk-órarendet készítünk ezekkel az adatokkal. Ezután úgy módosítjuk a súlyfüggvényt, hogy $w(u, h)$ -t növeljük, ha létezik $d \in D$ úgy, hogy $u \in U_d$ és $\delta(d, h) = 1$. Ezután elkészítjük a $\tau P(U, H, \Gamma, r, \tau)$ -re és w -re optimális órarendet. τ újra definiálja a (4.2)-t és (4.3)-at teljesítő diszkek adatait, és így végül elkészítjük a végleges diszk-órarendet ezekkel az új adatokkal.

6. *A súlyfüggvény definíciója.* Az implementációban a felhasználók 3 fajta súlyt jelölhetnek meg minden órára: 1. rossz időszak; 2. semleges időszak; 3. igen jó időszak. Magukat a súlyokat nem lehet a felhasználókhöz kötni, mert ez „inflációt” okozna. Úgy definiáljuk a súlyfüggvényt, hogy az optimális megoldásnak maximálisnak is kell lennie, azaz optimálisnak a következő súlyfüggvényre is:

$$w_0(u, h) = \begin{cases} 1, & \text{ha } w(u, h) > 0, \text{ (azaz } (u, h) \in E(G)) \\ 0, & \text{ha } w(u, h) = 0, \text{ (azaz } (u, h) \notin E(G)). \end{cases}$$

Ezt azért követeljük meg, mert úgy gondoljuk, hogy azon órák számának, amennyit a felhasználók terminál mellett töltenek, nem szabad a súlyfüggvénytől függnie: nem lenne ésszerű, hogy az a felhasználó, akinek nagy súlyai vannak, több időt kapjon.

Könnyű belátni, hogy ha azt akarjuk, hogy a felhasználók súlyai s különböző szám közül kerüljenek ki, akkor, ha a súlyokat az

$$\{s|U|^*|H|, \quad s|U|^*|H| + 1, \dots, s'|U|^*|H| + s - 1\}$$

halmazból választjuk ki, akkor feltételeink teljesülnek: egy optimális megoldás w_0 -ra is optimális. Itt $|U|^*|H|$ -t $\max\{|U|, |H|\}$ -val lehet helyettesíteni. (Ezt a megjegyzést az algoritmus elemzésével lehet bebizonyítani, és hasznos a primál-duál módszer futási idejének a csökkentéséhez, amely a feladat súlyozott változatát oldja meg (lásd 1. fejezet).

Implementáció és számítógépes tapasztalatok

Az eredmények implementálását *APL* nyelven kódoltuk az IBM 3031 számítógép CMS operációs rendszerében a SZTAKI-ban. KIRÁLY LÁSZLÓ a software osztályról felhasználó interface-eket készített, amely kényelmessé teszi a felhasználók számára a szükséges információ közlését és az órarend elolvasását.

Az egész rendszer outputja egy felhasználó-terminál/idő órarend és egy felhasználó/idő órarend (lásd 1. és 2. táblázat) egy hétre.

Az algoritmus inputját KIRÁLY LÁSZLÓ programja adja, amely — a felhasználók által szolgáltatott adatokon kívül — figyelembe veszi a számítógép központtal kapcsolatos adatokat is (a számítógép működési ideje, a működő terminálok száma stb.) és a felhasználókkal kapcsolatos néhány adatot, amely lehetővé teszi az „ I_u ”-k kiszámítását (lásd 2. rész).

Egy kész órarend átalakítása abból a célból, hogy több egymás utáni órája legyen az ezt igénylő felhasználóknak (lásd 3. rész) néhány percnyi CPU-időt igényel, az algoritmus összes többi része pedig kevesebb, mint egy percig fut. A gyakorlatban az algoritmus viselkedése lineárisnak tűnik a felhasználók számában és négyzetesnek az időben.

Köszönettel tartozom az MTA SZTAKI *Operációkutatási Osztálya Diszkrét Programozási Csoportjának*, valamint BACSÓ GÁBORNAK és KAS PÉTERNEK, segítségükért. Külön köszönet illeti meg KIRÁLY LÁSZLÓT, a *Software Osztály* munkatársát, akivel együtt valósítottuk meg az implementációt, és aki a program megrendelőjeként is, kérdéseivel, ötleteivel nagymértékben segítette munkámat.

IRODALOM

- [1] DE WERRA, D., "Construction of school timetables by flow methods", *Infor-Canad. Journal of Operational Research and Information Processing* 9 (1971) 12—22.
- [2] HORN, I. W. A., "Some simple scheduling algorithms", *Naval Research Logistics Quarterly* 21 (1974) 177—185.
- [3] EWEN, S., ITAI, A. and SHAMIR, A., "On the complexity of timetable and multicommodity flow problems", *SIAM Journal on Computing* 5 (1976) 691—703.
- [4] GRAHAM, R. L., LAWLER, E. L., LENSTRA, J. K. and RINNOOY KAN, A. H. G., "Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey", *Annals of Discrete Mathematics* 5 (1979) 287—326.
- [5] SCHMIDT, J. G. and STRÖHLEIN, T., "Timetable construction — an annotated bibliography", *The Computer Journal* 23 (1981) 307—316.
- [6] MULVEY, J. M., "A classroom/time assignment model", *European Journal of Operational Research* 9 (1982) 64—70.
- [7] FORD, L. R. JR. and FULKERSON, O. R., *Flows in Networks* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962).
- [8] LAWLER, E. L., *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids* (Holt Rinehart and Winston, 1976).
- [9] LOVÁSZ, L., *Combinatorial Problems and Exercises* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979).
- [10] JOHNSON, G., *Computers and Intractability* (W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1979).
- [11] SEBŐ, A., A particular timetable problem: terminal scheduling, SZTAKI Working Paper, MO/39.

(Beérkezett: 1985. június 6.)

SEBŐ ANDRÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U. 18.

APPLICATION OF NETWORK FLOW METHODS IN THE SCHEDULING OF TERMINAL SESSIONS

A. SEBŐ

A timetable algorithm which is used to schedule user-terminal timetables is described. With the approach laid out in the paper a wide range of timetable problems can be treated efficiently. The subroutines used by the algorithm are simple and quick network flow algorithms.

1. TÁBLÁZAT

NÉV	USERID	BÜNT	KÉRT	KAPOTT	HÉTFŐ	U-	05/05&	KEDD	A605/060	SZERDA	HKB05/07	CSÜTÖR *A	05/08	PÉNTEK	HA05/09Ö	HÖJHC&M HA 0
ÁRVAI	IB25YKRU	0	6	6	+			+		+		+		+	AB0123	+
ALEXICS	IB21VALE	0	3	3	+	9AB		+		+		+		+		+
BALAZS	IB13CVIR	0	3	3	+			+	345	+		+		+		+
BALAZS	IB28XV47	0	8	8	+		6	+	67	+	23	+	345	+		+
BARABÁS	IB28XV14	0	4	4	+			+	89	+		+		+	567	+
BARTHA	IB26CVIR	0	8	8	+	89AB		+	89AB	+		+		+		+
DEAK	IB3EMDEA	0	2	2	+			+		+		+		+	34	+
DENES	IB19TVIV	0	15	15	+	012		+	9AB012	+	1	+	0 2	+	B0 2	+
FARKAS	IB21VVFA	0	20	20	+	01 34567		+	0 345	+	567	+	567	+	456	+
FULOP	IB21OVIP	0	10	10	+	12		+	12	+	12	+	12	+	12	+
GYURÁCZ	IB21VVID	0	20	20	+	1234		+	1234	+	1234	+	1234	+	1234	+
GYURACZ	IB21VVG	0	20	20	+	1 34567		+	0 56	+	4567	+	4567	+	456	+
HAJDU	IB19TTER	0	5	5	+	9		+	8	+	8	+	8	+	8	+
HARS	IB27AJEN	0	7	7	+	23		+	8	+	89	+	89	+	8	+
HIDAS	IB19TVIK	0	15	15	+	8 0		+	89AB0	+	8 0	+	8 B0	+	8 B0	+
HORVÁTH	IB28XHOR	0	2	2	+	8		+		45 89	+			8		+
HORVÁTH	IB3EMSZA	0	4	4	+			+		789 9	+	789 9	+	789 9	+	789 9
HORVATH	IB18PVIB	0	20	17.5	+	0 2 5		+	A 1234 6	+	567	+	567	+	67	+
KELEN	IB21VVKM	0	20	20	+			+								
KISS	IB21VVIL	0	8	8	+	23		+	23	+	AB	+		+	9A	+
KISS	IB19NTM1	0	7	7	+			+	89	+	89A	+		+	89	+
KONTRA	IB18GMIK	0	6	6	+			+		+	B01234	+		+		+
KRÁMLI	IB21VVKR	0	3	3	+			+		+		+		+	9AB	+
KULCSAR	IB18URTO	0	4	4	+			+	67	+		+			67	+
LADUNGA	IB21HVIR	0	10	11	+		67	+	67	+	9A	+		789	+	789
LOGO	IB24KVIM	0	6	6	+		567	+		+		+	67	+	5	+
MAROSI	IB21VVMJ	0	6	6	+	AB		+		+	AB	+	12	+		+
MERKL	IB28XV34	0	5	5	+		45	+		+	5	+	5	+	4	+
NEUMANN	IB21CNEU	0	6	6	+	89A		+		+	89A	+		+		+
PRILL	IB21OPRI	0	12	12	+	B0		+	B01	+	01	+	B0	+	B01	+
RATKO	IB21VVRI	0	6	6	+	9AB		+	567	+		+		+		+
RATKO	IB41VVIM	0	4	4	+			+		+		+	89AB	+		+
RUDA	IB21VVRM	0	7	7	+	B0		+		+	B0	+	89A	+		+
RUDA	IB18TVIR	0	8	8	+			+		+	0 345	+	0 345	+		+
SOLTÉSZ	IB21VVSJ	0	3	3	+			+	9AB	+		+		+		+
SOLTÉSZ	IB21VVIR	0	3	3	+			+		+	9AB	+		+		+
SOLTÉSZ	IB21VVIE	0	3	3	+			+		+		+	9AB	+		+
TOTH	IB21OTTH	0	8	8	+	9A		+		+	9A	+		+	9A	+
TOTH	IB21VVIT	0	20	20	+	1 3456789		+	0 5 89	+	56789	+	56 89	+	56 89	+
UHRIN	IB21VVUB	0	6	6	+			+	AB	+	23	+	89	+		+
VANDOR	IB28XV30	0	11	11	+		4	+	1234	+	4	+	1 34	+	12	+
VARGA	IB28XTAM	0	2	2	+			+	8	+		+		+	8	+
VARGA	IB28XVAR	0	1	1	+			+		+		+			3	+
VERTSE	IB25YVIR	0	6	6	+			+		+		+	AB0123	+		+

2. TÁBLÁZAT

TERMINÁLBEOSZTÁS IDŐPONTOK SZERINT

VICTOR HUGO

1986 MÁJUS

4. VASÁRNAP

	321	322	323	324	325	VIDEOTON—1	VIDEOTON—2	
08 —	IB19TVIV DENES ERVIN	IB28XTAM VARGA TAMÁS	IB24KVIM LOGO JANOS	IB19TTER HAJDU KALMAN	IB19TVIK HIDAS PAL	IB21VVUB UHRIN BÉLA	IB27HVIS KABOS SÁNDOR	— 08
09 —	—	—	IB28XV35 JUHÁSZ ÉVA	—	—	—	—	— 09
10 —	—	IB24KVIM LOGO JANOS	—	—	—	IB28XV30 VANDOR	—	— 10
11 —	—	—	—	IB21OPRI PRILL MARIA	—	—	IB21VVKM KELEN MIKLOS	— 11
12 —	—	IB21VVIT TOTH ARPAD	—	—	—	IB21VVUB UHRIN BÉLA	—	— 12
13 —	IB19NTM1 KISS MIHÁLYNÉ	IB21OVIP FÜLÖP JANOS	—	—	IB21VVID GYURÁ CZ N. TERÉZ	—	IB21VVGT GYURACZ N.	— 13
14 —	—	—	IB28XV34 MERKL ILDIKO	IB21VVIT TOTH ARPAD	—	IB21VVFA FARKAS ATTILA	—	— 14
15 —	IB21VVKM KELEN MIKLOS	IB28XV30 VANDOR	—	—	—	—	—	— 15
16 —	—	IB3ESVIR BOROS- TYAN	—	—	—	—	—	— 16
17 —	—	—	—	—	IB24KVIM LOGO JANOS	—	—	— 17
18 —	—	—	IB18URTO KULCSÁR TAMÁS	—	IB18MVIR BARTOSIE- WICZ	—	—	— 18
19 —	—	—	—	—	—	—	—	— 19
20 —	IB27HVIS KABOS SÁNDOR	—	—	—	—	—	—	— 20
21 —	—	—	—	—	—	—	—	— 21
ZÁRÁS —	—	—	—	—	—	—	—	— ZÁRÁS

EGY SPECIÁLIS 0—1-ES FELADAT HALMAZFEDÉSI FELADATTÁ RELAXÁLÁSA

MAGA FERENC—VIZVÁRI BÉLA

Újfehértó

Budapest

Ebben a dolgozatban egy lineáris célfüggvényű és polinomiális feltételekkel korlátozott diszkrét programozási feladatra vonatkozó eredményt általánosítunk. A bevezetésben ismertetjük D. GRANOT, F. GRANOT és J. KALBERG nemnegatív együththatós feladatra elért eredményeit. A 2. szakaszban ezt tetszőleges valós együththatós feltételekre általánosítjuk.

1. Bevezetés

A diszkrét programozás irodalmán belül viszonylag szerényebb helyet foglalnak el a nemlineáris problémák. A terület egy részét feldolgozta egy német nyelvű monográfia [2]. A jelen dolgozat témája a polinomiális 0—1-es feladat, vagyis az a feladat, amikor valamennyi változó csak a 0 és 1 értéket veheti fel, a célfüggvény és a feltételekben szereplő kifejezések polinomok. Erről a területről jó összefoglalást ad a [6] dolgozat. Bár elvben tetszőleges tiszta 0—1 programozási feladat megfogalmazható ebben az alakban, a gyakorlat szempontjából megszorítást jelent, hogy a polinomokkal dolgozunk, hiszen értelemszerűen az egyes polinomok tagjainak száma túl nagy nem lehet. Az első dolgozatok [1], [3], [4] megpróbálták a feladatot új változók és feltételek bevezetésével visszavezetni a lineáris esetre. Ekkor azonban erősen megnő a feladat mérete, így a ténylegesen csak kicsi feladatok oldhatók meg. A [7] munka megpróbálja átmenteni közvetlenül a polinomiális feladatra a lineáris problémáknál alkalmazott leszámplálási módszert. A jelen dolgozat tárgya egy harmadik megközelítés. Nem magát a feladatot vagy egy vele ekvivalens másikat adunk meg közvetlenül, hanem egyszerű szerkezetű — az adott esetben halmazfedési — feladatok sorozatát, ahol ezek az eredetinek relaxáltjai.

Kiinduló pontul az [5] cikk eredményei szolgálnak, ezért ebben az első szakaszban ezeket ismertetjük röviden. A megoldandó feladat a következő

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ (1.1) \quad & g_i(x) \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in \{0, 1\}^n, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}^n$ és $c > 0$ rögzített vektor, a $g_i(x)$ függvény pedig

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^{p_i} a_{ik} \prod_{j \in H_{ik}} x_j$$

alakú polinom, melynek valamennyi együtthatója c vektor komponenseihez hasonlóan pozitív. A probléma ilyen megfogalmazása az általános polinomiális 0—1-es feladathoz képest az alábbi megszorításokat tartalmazza: (a) a célfüggvény lineáris, benne 0 együtthatók nem szerepelhetnek, (b) a feltételi függvények monoton növekvők.

Tekintsünk először egyetlen feltételt

$$(1.2) \quad \sum_{k=1}^p a_k \prod_{j \in H_k} x_j \leq 1.$$

A továbbiakban ezt vizsgáljuk, figyelembe véve, hogy a változók 0 vagy 1 értékűek, az együtthatók pozitívak.

1.1. DEFINÍCIÓ. Az $U \subset \{1, \dots, p\}$ halmaz az (1.2) feltétel fedése ha

$$\sum_{k \in U} a_k > 1.$$

1.2. DEFINÍCIÓ. Az (1.2) feltétel U fedését prímfedésnek nevezzük, ha

$$\forall V \subset U, \quad V \neq U \quad \text{esetén} \quad \sum_{k \in V} a_k \leq 1.$$

Megjegyezzük, hogy az együtthatók pozitivitása miatt a fedések azzal a monoton tulajdonsággal rendelkeznek, hogy ha U fedés és $U \subset W \subset \{1, \dots, p\}$, akkor W is fedés. A prímfedés fogalma valójában ezt a monoton tulajdonságot használja ki. Egy fedésről igen egyszerű eldönteni, hogy prímfedés-e. Ugyanis egy U fedés akkor és csak akkor prímfedés, ha egyetlen V részhalmaza, amely pontosan eggyel kevesebb elemet tartalmaz mint U , sem fedés. Ez a következő egyszerű módon ellenőrizhető. Legyen ugyanis

$$a_{i_0} = \min_{i \in U} a_i.$$

Ekkor az U fedés pontosan akkor prímfedés, ha

$$\sum_{\substack{i \in U \\ i \neq i_0}} a_i \leq 1.$$

Az is látszik, hogy egy tetszőleges U fedésből kiindulva ezzel a módszerrel tudunk találni olyan V prímfedést, amely részhalmaza U -nak.

Jelöljük az (1.2) prímfedéseinek halmazát \mathcal{U} -val, valamint legyen

$$y_k = \prod_{j \in H_k} x_j, \quad k = 1, \dots, p.$$

Ekkor y_k értéke szintén 0 vagy 1 minden szóbajövő k esetén. A tett jelölések mellett nyilvánvaló, hogy (1.2) pontosan akkor teljesül, ha

$$\forall U \in \mathcal{U} \quad \text{esetén} \quad \prod_{k \in U} y_k = 0,$$

ahol az egyenlőség azt fejezi ki, hogy legalább egy y_k -nak nullának kell lenni. Ez tovább írható:

$$\prod_{k \in U} \prod_{j \in H_k} x_j = 0.$$

Legyen az \bar{x} vektor az x vektor komplementere, azaz $\bar{x}_j = 1 - x_j$, $j = 1, \dots, n$. Ekkor az (1.2) feltétel teljesülése ekvivalens azzal, hogy minden $U \in \mathcal{U}$ esetén

$$(1.3) \quad \sum_{j \in U} \bar{x}_j \geq 1, \quad \text{ahol} \quad \bar{U} = \bigcup_{k \in U} H_k.$$

Itt elég csak a prímfedésekre szorítkoznunk, hiszen minden fedés tartalmaz prímfedést és az utóbbira felírt feltétel teljesülése magával vonja a fedésre vonatkozó ugyanilyen egyenlőtlenség teljesülését is. Másfelől az említett monoton tulajdonság miatt egyetlen prímfedésre felírt feltétel sem zár ki egyetlen megengedett pontot sem. Ennek alapján az (1.2) polinominális feltételt helyettesíthetjük több — a komplementerváltozókra vonatkozó — halmazfedési feltétellel. Emiatt azt is figyelembe véve, hogy $c^T x$ maximalizálása ekvivalens $c^T \bar{x}$ minimalizálásával, bebizonyítottuk a következőt.

1.1. LEMMA. Az (1.1) feladat ekvivalens az alábbi problémával

$$(1.4) \quad \begin{aligned} &\min c^T x \\ &\sum_{j \in U} \bar{x}_j \geq 1 \quad \forall U \in \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i \quad \text{és} \quad \bar{U} = \bigcup_{k \in U} H_{ik} \\ &\bar{x} \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

ahol \mathcal{U}_i az (1.1) i -edik feltétel prímfedéseinek halmaza. Az ekvivalencia azt jelenti, hogy az optimális megoldások egymás komplementerei.

Az [5] dolgozat szerzői (1.4) megoldására egy relaxációs algoritmust ajánlanak:

1. Algoritmus

0. lépés: A feltétel nélküli halmazfedési feladat felírása.

1. lépés: A halmazfedési feladat megoldása. Az optimumhely \bar{x}^* . Legyen

$$x_j^* = 1 - \bar{x}_j^*, \quad j = 1, \dots, n.$$

2. lépés: Ha x^* megengedett megoldása (1.1)-nek, akkor STOP.

3. lépés: Ha x^* nem megengedett (1.1)-ben, akkor legyen i egy megsértett feltétel indexe, továbbá

$$W = \{k: k \in \{1, \dots, p_i\}: \prod_{j \in H_{ik}} x_j^* = 1\}.$$

Ekkor a W fedésből generáljuk $U \subset W$ prímfedést, melyre felírjuk az (1.3) alakú feltételt, ezt csatoljuk a halmazfedési feladathoz és megyünk az 1. lépésre.

A fentebb mondottak szerint az algoritmus során a halmazfedési feladat mindig relaxációja (1.4)-nek. Ha tehát a 2. lépés szerint megállunk, akkor az optimális megoldásnál vagyunk. Másfelől ameddig nem állunk meg, addig mindig egy új prímfedést tudunk generálni. Tekintve, hogy ezek száma véges, igaz a következő

1.2. TÉTEL. A fenti algoritmus véges számú lépésben eljut az (1.4) feladat optimumához.

2. Az előjelmegkötés nélküli feltételrendszer

A bevezetőben vázolt algoritmust fogjuk általánosítani arra az esetre, amikor az a_{ik} együtthatókra nem teszünk előjelmegkötést, de továbbra is megtartjuk a $c_j > 0$, $j = 1, \dots, n$ megszorítást. A tárgyalás menete hasonló lesz az előzőhöz. Most is egyetlen feltételt vizsgálunk először, a fedés helyett azonban egy új fogalmat vezetünk be. Tekintsük tehát a

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^p a_k \prod_{j \in H_k} x_j \leq 1$$

egyenlőtlenséget. Legyen az összegbeli kifejezések indexhalmaza P , azaz $P = \{1, \dots, p\}$.

2.1. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $R \subset P$ halmazhoz tartozik az x vektor és megfordítva, ha

$$\forall k \in R \text{ és } \forall j \in H_k \text{ esetén } x_j = 1$$

$$\text{és } \forall j \text{ amelyre } \forall k \in R, j \notin H_k \text{ akkor } x_j = 0.$$

2.2. DEFINÍCIÓ. Az $U \subseteq P$ indexhalmazt a (2.1) feltétel takarójának nevezzük, ha minden olyan R esetén, amire $U \subseteq R \subseteq P$ igaz,

$$(2.2) \quad \sum_{j \in R} a_j > 1$$

is teljesül.

Felmerül a kérdés, hogy egy U halmaz mikor takaró. Vezessük be a szokásos $|a|_- = \min\{0, a\}$ jelölést, ahol a tetszőleges valós szám:

2.1. LEMMA. Az U halmaz akkor és csak akkor takaró, ha

$$(2.3) \quad \sum_{j \in U} a_j + \sum_{j \in P \setminus U} |a_j|_- > 1.$$

Bizonyítás. Azt az $R \supseteq U$ halmazt kell megkeresni, amelyre (2.2) baloldala minimális lesz. Ez az R nem más, mint

$$R = U \cup \{j: j \in P \setminus U; a_j < 0\}.$$

Erre az R halmazra nézve (2.2) és (2.3) baloldala ugyanaz.

Megjegyezzük, hogy nemnegatív együtthatók esetén a fedés és a takaró fogalma egybeesik, hiszen (2.3)-ban a második összeg üres. Ebből az is látszik, hogy akkor a fedés fogalma lényegében egybeesett a nem-megengedett pont fogalmával. A takarónál nem ez a helyzet. Az ugyan rá is igaz, hogy egy takarónál minden bővebb halmaz is takaró, abból azonban, hogy egy pont nem megengedett, nem következik, hogy a megfelelő indexhalmaz takaró volna, hiszen most lehetnek nála bővebb halmazok, melyekhez tartozó x vektor megengedett.

Legyen (2.1) feltételnek U egy takarója. Ekkor tehát

$$\sum_{k \in U} a_k > 1$$

teljesül. Vizsgáljuk azt az x vektort, amelyhez U tartozik. Nyilván

$$j \in \bigcup_{k \in U} H_k \text{ esetén } x_j = 1.$$

A takaró definíciójából az is következik azonban, hogy (2.1)-et nem tudjuk további változók 1-re rögzítésével teljesíteni. Ezért ebben az esetben tehát mindenképpen ki kell zárni azt, hogy valamennyi U -beli k -ra

$$\prod_{j \in H_k} x_j = 1$$

legyen, azaz a komplementerváltozókra a

$$(2.4) \quad \sum_{j \in U} \bar{x}_j \geq 1, \quad \text{ahol} \quad \bar{U} = \bigcup_{k \in U} H_k$$

halmazfedési feltételt kapjuk. Az azonban most nem igaz, hogy felírva az összes (2.4) alakú feltételt, azok ekvivalensek lennének (2.1)-gyel.

Most megfogalmazzuk a megoldás algoritmusát. A

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{k=1}^{p_i} a_{ik} \prod_{j \in H_{ik}} x_j \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

feladattal foglalkozunk, ahol $c_j > 0$, $j = 1, \dots, n$; a_{ik} tetszőleges valós szám, $H_{ik} \subset \{1, \dots, n\}$ alkalmas indexhalmaz minden (i, k) indexpár esetén. Nem közvetlenül (2.5)-öt oldjuk meg, hanem az $\bar{x}_j = 1 - x_j$ ($j = 1, \dots, n$) komplementerváltozókra értelmezett

$$(2.6) \quad \begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \\ & \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{x}_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, T \\ & \bar{x}_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

halmazfedési feladatok egy sorozatát alkalmas $b_{ij} \in \{0, 1\}$ együtthatókkal. Minden (2.6) alakú feladat (2.5) relaxációja lesz abban az értelemben, hogy (2.6) feltételei (2.5) egyetlen megengedett megoldásának komplementerét sem zárják ki.

2. Algoritmus

0. lépés: A feltétel nélküli halmazfedési feladat felírása.

1. lépés: A halmazfedési feladat megoldása. Ha nincs megengedett megoldás, akkor STOP. Különben az optimumhely \bar{x}^* . Legyen

$$x_j^* = 1 - \bar{x}_j^*, \quad j = 1, \dots, n.$$

2. lépés: Ha x^* megengedett megoldása (2.5)-nek, akkor STOP.

3. lépés: Ha x^* nem megengedett (2.5)-ben, akkor a

$$(2.7) \quad \sum_{j: \bar{x}_j^* = 0} \bar{x}_j \geq 1$$

feltételt csatoljuk (2.6)-hoz és megyünk az 1. lépésre.

1. *Megjegyzés.* A (2.7) feltétel tartalma az, hogy \mathbf{x}^* -ban még mindig túl sok komponens értéke 1.

2. *Megjegyzés.* Az előző algoritmussal ellentétben a 3. lépésben nem vizsgáljuk, hogy a kapott pont takaró-e. Ez részint felveti a módszer elméleti jóságának kérdését, részint lassítja a módszert. Mindkét problémára visszatérünk. Megjegyezzük azonban, hogy a c együtthatók pozitivitása miatt a legelső alkalommal, amikor az 1. lépést végrehajtjuk, akkor — feltételek nem lévén — az optimális megoldás azaz \mathbf{x}^* az azonosan 1 vektor. Ha ez megengedett, akkor nyilván optimális. Ha nem megengedett, akkor takaró a neki megfelelő U .

2.2. TÉTEL. A 2. algoritmus végesszámú lépésben megoldja a (2.5) feladatot, vagy bebizonyítja, hogy nincs megengedett megoldás.

Bizonyítás. Az algoritmus legfeljebb 2^n iterációt végez az 1—3. lépés között, tehát véges. Ha nem találja meg a (2.5) feladat optimumának komplementerét, akkor vagy az történt, hogy nem talált megengedett megoldást, pedig van, vagy talált ilyen, de nem az optimumot. Mindkét esetben az történt, hogy legalább egy megengedett megoldást — nevezetesen az optimumhelyet — egy halmazfedési feltétellel levágtunk. A tétel állításához tehát annyit kell belátni, hogy a 3. lépésben bevezetett (2.7) alakú feltételek soha, egyetlen megengedett megoldást sem vágnak le. Mindenesetre ez nyilvánvalóan igaz akkor, ha \mathbf{x}^* (2.5) valamelyik feltételének egy takarójához tartozik. A 2. megjegyzés szerint a legelső iterációban \mathbf{x}^* -ként az azonosan 1 vektor adódik, ami vagy optimumhely, vagy takaró. Tehát ha egynél több iterációra van szükség, akkor mindenképpen van a (2.7) alakú feltételeknek egy olyan kezdő sorozata, amely nem vág le megengedett megoldást. Vizsgáljuk a következő (2.7) alakú feltételt. Csak azt az esetet kell tekintenünk, amikor \mathbf{x}^* egyik feltétel esetében sem tartozik takaróhoz. Mivel a célfüggvény együtthatói pozitívak, ezért egyetlen olyan $\bar{\mathbf{y}}$ vektor sem lehet megengedett (2.6)-ban, amelyre igazak az alábbiak:

$$(2.8) \quad \bar{\mathbf{y}} \in \{0, 1\}^n; \quad \bar{\mathbf{y}} \neq \bar{\mathbf{x}}; \quad \bar{\mathbf{y}}_j \leq \bar{\mathbf{x}}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

hiszen ellenkező esetben ellentmondásba kerülnénk $\bar{\mathbf{x}}^*$ optimalitásával. Tehát a (2.8) tulajdonságú pontokat már korábban kizárta egy olyan feltétel, ami nem vágott le — a feltételezés szerint — megengedett megoldást. Ez azt jelenti, hogy bár a vizsgált esetben a (2.5) feladat minden i feltételéhez van olyan (2.8) típusú $\bar{\mathbf{y}}$ vektor, hogy annak \mathbf{y} komplementere azt kielégíti, de minden olyan \mathbf{y} legalább egy másik q ($i \neq q$) feltételt megsért. Így a (2.7) feltétel bevezetése nem fog levágni megengedett megoldást.

3. *Megjegyzés.* Ha a (2.7) alakú feltételt egy takaró alapján írtuk fel, akkor elég volt egyetlen feltétel alapján dolgozni, míg a másik esetben az egész (2.5)-ben szereplő egyenlőtlenségrendszer figyelembe vettük és ezért mélyebben, de legfeljebb a megengedett tartomány „széléig” vágtunk.

4. *Megjegyzés.* A célfüggvény pozitivitása miatt ha a (2.5) feladat optimális megoldása hozzátartozik egy egymással összehasonlítható (az ún. parciális rendezésre nézve, vagyis a relációnak komponensenként kell teljesülnie) vektorok halmazához, akkor az a halmaz legnagyobb pontja, vagyis a megengedett tartomány „szélén” van.

5. *Megjegyzés.* Számítási szempontból a bizonyításban részletezett eset igen értékes. Ez ugyanis csak akkor fordulhat elő, ha $\{j: x_j^* = 1\}$ halmazt tartalmazó valamennyi takaró alapján generáltunk már halmazfedési feltételt, ill. ezeket a pontokat más feltételekkel kizártuk. A halmazfedési feltételek közül az az erősebb, amelyik csak a másik egy részhalmazán tartalmaz 1 komponenseket. Ez azonban a most generált egyenlőtlenség és a korábbi, a tartalmazó takarókból származók között fennáll. Így a feltételek száma csökkenthető.

3. Egy numerikus példa

Ebben a szakaszban példát mutatunk az algoritmus alkalmazására és néhány megjegyzést fűzünk hozzá.

A példában a triviális, üres halmazfedési feladattól indulva minden egyes lépésben az összes megszegett feltételre felírjuk a megfelelő U_i halmazt és az

$$\bar{U}_i = \bigcup_{k \in U_i} H_{ik}$$

indexhalmazra írjuk fel az újabb halmazfedési feltételt.

Oldjuk meg tehát a következő feladatot:

$$\begin{aligned} &0,5x_1x_2 + 0,3x_1x_3x_4 - 0,6x_2 + 0,8x_1x_3 \leq 1 \\ &0,1x_1x_2x_3 + 0,6x_2x_3x_4 + 0,6x_1 - 0,4x_3x_4 + 0,3x_1x_4 \leq 1 \\ &0,3x_1x_4 + 0,4x_2x_3 + 0,3x_1x_2x_4 - 0,5x_1x_2x_3 - 0,8x_4 \leq 1 \\ &0,2x_3x_4 - 0,8x_1x_2x_3x_4 + 0,8x_1 + 0,9x_2x_4 + 0,6x_3x_4 \leq 1 \\ &0,3x_3 + 0,7x_4 + 0,8x_3x_4 - 0,3x_2x_3 + 0,8x_1x_2 \leq 1 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \\ &\max (3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4). \end{aligned}$$

1. *Iteráció.* Az üres halmazfedési feladat

$$(3.1) \quad \min (3\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + 4\bar{x}_4).$$

Az optimális megoldás: $\bar{x}_1^{*T} = (0, 0, 0, 0)$

$$x_1^{*T} = (1, 1, 1, 1).$$

Ekkor a feltételek közül a 2., a 4. és az 5. nem teljesül. Ekkor

$$U_2 = U_4 = U_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{és} \quad \bar{U}_2 = \bar{U}_4 = \bar{U}_5 = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ebből a halmazfedési feltétel:

$$(3.2) \quad \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 \leq 1.$$

2. *Iteráció.* A feladat a (3.1) célfüggvény minimalizálása (3.2) mellett

Az optimális megoldás: $\bar{\mathbf{x}}_2^{*T} = (0, 0, 1, 0)$

$$\mathbf{x}_2^{*T} = (1, 1, 0, 1).$$

Most \mathbf{x}_2^* a 4. és 5. feltételt sérti meg. Így

$$U_4 = \{3, 4\} \quad \text{és} \quad \bar{U}_4 = \{1, 2, 4\}$$

$$U_5 = \{2, 5\} \quad \text{és} \quad \bar{U}_5 = \{1, 2, 4\}.$$

Megjegyzés. Ebben az esetben az U_4 és U_5 egyike sem takarója a megfelelő feltételnek, tehát csakis a 2. szakaszban leírtak alapján írhatjuk fel az új halmazfedési feltételt:

$$(3.3) \quad \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4 \geq 1.$$

Az is látszik, hogy most (3.3) erősebb (3.2)-nél, tehát az utóbbi elhagyható.

3. *Iteráció.* Tehát a feladat (3.1) optimalizálása (3.3) mellett.

Az optimális megoldás: $\bar{\mathbf{x}}_3^{*T} = (0, 1, 0, 0)$

$$\mathbf{x}_3^{*T} = (1, 0, 1, 1).$$

A pont megsérti az 1, 4, 5 feltételeket. Ekkor

$$U_1 = \{2, 4\} \quad \bar{U}_1 = \{1, 3, 4\}$$

$$U_4 = \{1, 3, 5\} \quad \bar{U}_4 = \{1, 3, 4\}$$

$$U_5 = \{1, 2, 3\} \quad \bar{U}_5 = \{3, 4\}.$$

Ezek közül az \bar{U}_5 -tel felírt feltétel a legerősebb.

$$(3.4) \quad \bar{x}_3 + \bar{x}_4 \geq 1.$$

4. *Iteráció.* A feladat (3.1) optimalizálása (3.3) és (2.4) mellett

Az optimális megoldás: $\bar{\mathbf{x}}^{*T} = (0, 1, 1, 0)$

$$\mathbf{x}^{*T} = (1, 0, 0, 1).$$

Ez már megengedett megoldása az eredeti feladatnak, tehát ez az eredeti feladat optimális megoldása. Az optimum értéke 7.

IRODALOM

- [1] BÄR, G., „Zur Linearisierung beliebiger 0—1 Optimierungsprobleme“, *Math. Operationsforschung u. Statistik* 2 (1976) 181—195.
- [2] GIRLICH, E., KOWALJOW, M. M., „Nichtlineare diskrete Optimierung“ in: *Mathematical Research Mathematische Forschung*, Band 6. Akademie-Verlag Berlin, 1981.
- [3] GLOVER, F., WOOLSEY, E., „Further reduction of zero-one polynomial programming problems to zero-one linear programming problems“, *Operations Research* 21 (1973) 156—161.
- [4] GLOVER, F., WOOLSEY, E., „Converting the 0—1 polynomial programming problem to 0—1 linear program“, *Operations Research* 22 (1974) 180—182.

- [5] GRANOT, D., GRANOT, F., KALLBERG, J., "Converting relaxation for positive 0—1 polynomial programs", *Management Science* **25** (1979) 264—273.
- [6] HANSEN, P., "Methods of nonlinear 0—1 programming", *Annals of Discrete Mathematics* **5** (1979) 53—70.
- [7] VIZVÁRI, B., „Leszámlálási algoritmusok a 0—1-es polinomiális programozásban”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **1** (1975) 373—384.

(Beérkezett: 1985. január 14.)

VIZVÁRI BÉLA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR H. U. 18.

MAGA FERENC
SZABOLCS-SZATMÁR MEGYEI VÍZ- ÉS CSATORNAMŰ VÁLLALAT
4400 NYÍREGYHÁZA, STADION U. 5.

THE RELAXATION OF A SPECIAL POLYNOMIAL ZERO—ONE PROGRAMMING PROBLEM TO SET COVERING PROBLEM

F. MAGA—B. VIZVÁRI

This paper generalizes a result concerning a discrete programming problem with a linear objective function and polynomial constraints. The introduction discusses the results of D. GRANOT, F. GRANOT and J. KALLBERG obtained for a nonnegative coefficient problem. In Section 2 this will be generalized for constraints with arbitrary coefficients. We introduce the notion of overlying point instead of cover and prime cover. This enables us to give a method to solve the more general case which is similar to the method of the previous authors.

DÖNTÉSEKTŐL FÜGGŐ ELLÁTÁSI FELADATOK DEKOMPOZÍCIÓS MEGOLDÁSAKOR FELLÉPŐ LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT ELEMZÉSE

PRILL MÁRIA

Budapest

A dolgozatban HOFFER JÁNOS „Döntésektől függő ellátási feladatok megoldása Benders dekompozícióval” ([2]) című cikkében felvetett lineáris programozási feladat megoldására adunk algoritmust a szimplex módszer segítségével. HOFFER JÁNOS módszerével — melyet a feladat duáljának megoldásával kapott — összehasonlítva az eljárás előnye, hogy bizonyos esetekben a feladat megengedett tartományának több extrémális pontját, illetve irányát adja meg, ami meggyorsítja a Benders dekompozíciót.

1. A feladat ismertetése

A dolgozatban ellátási feladatoknak nevezzük azoknak a gyakorlati feladatoknak a matematikai megfogalmazását, amelyeknek célja egy termék előírt mennyiségének több munkahelyen történő lehető legolcsóbb előállítás. Ha a munkahelyek gyártóképesége és az előállítandó összmennyiség döntésektől függ, akkor döntésektől függő ellátási feladatokról beszélünk. Formulákkal megfogalmazva a következő típusú lineáris, vegyes, egészértékű programozási feladatokkal foglalkozunk:

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & x_1 + f_1^T z \leq b_1, \\ & x_2 + f_2^T z \leq b_2, \\ & \vdots \\ & x_n + f_n^T z \leq b_n, \\ & x_1 + \dots + x_n + f_{n+1}^T z = b_{n+1}, \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad z \in \{0, 1\}^m, \\ & \min (c^T x + d^T z). \end{aligned}$$

(1.1)-ben x_i az i -edik munkahelyen előállítandó termékmennyiséget, z_j pedig a j -edik döntés eredményét jelöli.

Ez a feladattípus merült fel például a magyar villamosenergia-rendszer napi optimális menetrendjének meghatározásakor ([1]). Naponta mintegy 50—100 (1.1) típusú feladatot kell megoldani a menetrend meghatározásához, melyek mérete: $18 \leq n \leq 35$, $m \leq 21$.

Az (1.1) feladat Benders dekompozícióval történő megoldásakor egy iterációban egy egészértékű és egy lineáris programozási feladatot kell megoldani.

Ez utóbbi feladat — melynek megoldását a dolgozatban tárgyaljuk — nem más, mint az (1.1) feladat duálisa az egészértékű változók valamely rögzítése esetén. Ezt

a rögzítést az azonos iterációban megoldott egészértékű feladat optimális megoldásvektora szolgáltatja.

Jelölje \mathbf{z}^i az i -edik iterációban megoldott egészértékű feladat optimális megoldását. Bevezetve a

$$(1.2) \quad b_j - \mathbf{f}_j^T \mathbf{z}^i = g_j, \quad j = 1, \dots, n+1$$

jelölést, az (1.1) feladat a döntés-változók rögzítése esetén ($\mathbf{z} = \mathbf{z}^i$) az alábbi:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x_1 &\leq g_1, \\ x_2 &\leq g_2, \\ &\vdots \\ x_n &\leq g_n, \\ x_1 + \dots + x_n &= g_{n+1}, \\ x_1 &\geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ \mathbf{d}^T \mathbf{z}^i + \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Jelölje u_1, \dots, u_{n+1} az (1.3) feladat duálisának változóit. Ekkor a megoldandó lineáris programozási feladat a következő:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} u_1 + u_{n+1} &\leq -c_1, \\ u_2 + u_{n+1} &\leq -c_2, \\ &\vdots \\ u_n + u_{n+1} &\leq -c_n, \\ u_1 &\geq 0, \dots, u_n \geq 0, \\ \mathbf{d}^T \mathbf{z}^i + \max (-g_1 u_1 - g_2 u_2 - \dots - g_{n+1} u_{n+1}). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy az (1.4) feladat megengedett tartománya sohasem üres. Például

$$u_i = \max(-c_i, 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$u_{n+1} = 0$$

egy megengedett megoldás.

2. A feladat átfogalmazása

A *Benders dekompozíció* egyes iterációiban az (1.4) típusú feladat optimális megoldására van szükségünk, az optimum értékén kívül meg kell határoznunk a feladat megengedett tartományának legalább egy optimális csúcsát vagy — nem korlátozott esetben — legalább egy pozitív célfüggvényértékű extrémális irányát.

Mivel a szimplex módszert fogjuk alkalmazni, át kell alakítanunk az (1.4) feladat egyenlőtlenségeit egyenlőségekké. Vezessük be az y_1, \dots, y_n nemnegatív változókat, így a következő feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & u_1 - y_1 + u_{n+1} = -c_1, \\
 & u_2 - y_2 + u_{n+1} = -c_2, \\
 & \vdots \\
 & u_n - y_n + u_{n+1} = -c_n, \\
 & u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0, \\
 & y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0, \\
 & \max (-g_1 u_1 - g_2 u_2 - \dots - g_{n+1} u_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Az (1.4) feladat ekvivalens a (2.1) feladattal abban az értelemben, hogy a megengedett tartományok vektorai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, és az egymásnak megfelelő vektorokon a célfüggvény nem konstans részének értéke megegyezik (PRÉKOPA [3]). A következő, egyszerűen bizonyítható állítás megadja ezt a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést, továbbá azt is kimondja, hogy extrémális pont (irány) megfelelője is extrémális pont (irány). Ez utóbbi igen lényeges számunkra, mivel a *Benders dekompozíció* alkalmazásakor az (1.4) feladat extrémálisaira van szükségünk.

2.1. ÁLLÍTÁS. Tekintsük a

$$P_1 = \{x \in R^n: Ax \leq b, \quad x_i \geq 0 \quad (i \in I)\}$$

és a

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^{n+m}: Ax + y = b, \quad x_i \geq 0 \quad (i \in I), \quad y \geq 0 \right\}$$

poliédereket, ahol $A \in R^{m \times n}$ mátrix, $b \in R^m$ vektor és $I \subset \{1, \dots, n\}$ indexhalmaz.

a) Legyen $f: P_1 \rightarrow P_2$ olyan leképezés, hogy $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ b - Ax \end{pmatrix}$. Ekkor f kölcsönösen egyértelmű leképezése P_1 -nek P_2 -re, továbbá egy $x \in P_1$ vektor pontosan akkor extrémális pont, ha $f(x) \in P_2$ extrémális pont.

b) Legyen V_1 a P_1 poliéder megengedett irányainak halmaza, azaz $V_1 = \{v \in R^n: Av \leq 0, v_i \geq 0 \quad (i \in I)\}$, továbbá V_2 a P_2 poliéder megengedett irányainak halmaza, azaz $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in R^{n+m}: Av + w = 0, v_i \geq 0 \quad (i \in I), w \geq 0 \right\}$. Defináljuk a $g: V_1 \rightarrow$

V_2 leképezést a következőképpen: ha $v \in V_1$, legyen $g(v) = \begin{pmatrix} v \\ -Av \end{pmatrix}$. Ekkor g kölcsönösen egyértelműen képezi le V_1 -et V_2 -re, továbbá egy $v \in V_1$ vektor pontosan akkor extrémális iránya P_1 -nek, ha $g(v)$ extrémális iránya P_2 -nek.

Ezek után három segédállítást ismertetünk, melyek megmutatják, hogyan állíthatjuk elő a

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} : \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{n+1}x_{n+1} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad x_{n+1} \in R \right\}$$

poliéder extremálisait.

2.2. ÁLLÍTÁS. Legyen $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in P_3$, $I = \{i : x_i > 0, i \leq n\}$ indexhalmaz. Ekkor $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ pontosan akkor extremális pontja P_3 -nak, ha az $\{\mathbf{a}_i (i \in I), \mathbf{a}_{n+1}\}$ vektorrendszer lineárisan független.

2.3. ÁLLÍTÁS. Legyen $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ a P_3 poliéder megengedett iránya, $I = \{i : v_i > 0, i \leq n\}$ indexhalmaz. Ekkor $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ pontosan akkor extremális iránya P_3 -nak, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:

a) $v_{n+1} \neq 0$ és az $\{\mathbf{a}_i (i \in I), \mathbf{a}_{n+1}\}$ vektorrendszerből tetszőleges vektort elhagyva lineárisan független rendszert kapunk,

b) $v_{n+1} = 0$ és az $\{\mathbf{a}_i (i \in I)\}$ vektorrendszerből tetszőleges vektort elhagyva lineárisan független rendszert kapunk, továbbá az \mathbf{a}_{n+1} vektor lineárisan független az $\{\mathbf{a}_i (i \in I)\}$ vektorrendszertől.

A következő állításban PRÉKOPA [3] jelölésrendszerét használjuk a szimplex táblákban előforduló értékek jelölésére.

2.4. ÁLLÍTÁS. Tekintsük az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{n+1}x_{n+1} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

$$\max (\mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_{n+1}x_{n+1})$$

lineáris programozási feladatot, ahol $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ mátrix, $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in R^n$ és $\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b} \in R^m$ vektorok. Tegyük fel, hogy ezen feladat szimplex módszerrel történő megoldásakor valamely iterációban $(n+1) \in I_B$, és ezen iteráció szimplex táblájának k -adik oszlopában $z_k - c_k < 0$ és $d_{ik} \leq 0$ minden $i \in I_B \setminus \{n+1\}$ esetén, ha B az aktuális bázis és I_B a hozzátartozó indexhalmaz. Ekkor a

$$v_i = -d_{ik}, \quad i \in I_B,$$

$$v_k = 1,$$

$$v_i = 0, \quad i \notin I_B \cup \{k\}$$

egyenlőségekkel meghatározott \mathbf{v} vektor a feladat megengedett tartományának pozitív célfüggvényértékű extremális iránya.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a \mathbf{v} vektor pozitív célfüggvényértékű megengedett irány. A \mathbf{v} vektor megadásának felhasználásával a 2.3. állításból következik, hogy extrémális irány is.

A fejezetben leírtak alapján tehát a következőképpen oldhatjuk meg az (1.4) feladatot:

Megoldjuk a (2.1) feladatot a szimplex módszernek azzal a változatával, melynek során a nem korlátozott u_{n+1} változóhoz tartozó vektort állandóan benntartjuk a bázisban. A 2.2. állítás szerint az egyes lépésekben kapott bázismegoldások a (2.1) feladat megengedett tartományának extrémális pontjai.

Ha a (2.1) feladatnak van optimális megoldása, és $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ a szimplex módszerrel

kapott extrémális pont, akkor $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ az (1.4) feladat megengedett tartományának optimális extrémális pontja a 2.1. állítás miatt.

Ha a (2.1) feladat célfüggvénye nem korlátozott, akkor a 2.4. állításban leírt módon meghatározunk egy pozitív célfüggvényértékű extrémális irányt. Legyen ez $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

Ekkor $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ az (1.4) feladat megengedett tartományának pozitív célfüggvényértékű extrémális iránya a 2.1. állítás miatt.

3. Az átfogalmazott feladat megoldása szimplex módszerrel és az eredeti feladat extrémálisainak előállítása

Ebben a fejezetben a (2.1) feladatot oldjuk meg szimplex módszerrel, és az így kapott extrémálisokból előállítjuk az (1.4) feladat extrémálisait a 2. fejezetben leírt módon.

Tekintsük a (2.1) feladatot, és rendezzük sorba a c_1, \dots, c_n együtthatókat. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy

$$c_1 \leq \dots \leq c_n$$

teljesül. Ekkor

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{1}\}$$

a (2.1) feladat egy megengedett bázisa, a hozzátartozó bázismegoldás a következő:

$$\begin{aligned} u_i &= c_n - c_i, & y_i &= 0, & i &= 1, \dots, n-1, \\ (3.1) \quad u_n &= 0, & y_n &= 0, \\ u_{n+1} &= -c_n. \end{aligned}$$

	$u_1 \dots \dots \dots u_n$	$y_1 \dots \dots \dots y_n$	u_{n+1}
	$-g_1 \dots \dots \dots -g_n$	$0 \dots \dots \dots 0$	$-g_{n+1}$
$c_n - c_1$	1	-1	1
\vdots	\ddots	\ddots	\vdots
$c_n - c_{n-1}$		-1	1
$-c_n$			-1
$f^{(0)}$	0	$a^{(0)}$	0

$$\mathbf{g}_B^T = (-g_1, \dots, -g_{n-1}, -g_{n+1})$$

$$f^{(0)} = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_n) g_i + c_n g_{n+1}$$

$$a^{(0)} = \sum_{i=1}^n g_i - g_{n+1}$$

$$b^{(0)} = - \sum_{i=1}^{n-1} g_i + g_{n+1}$$

1. ábra. A (2.1) feladat (3.1) bázismegoldásához tartozó szimplex tábla

A (3.1) bázismegoldáshoz tartozó szimplex táblából (1. ábra) látható, hogy a következő esetek lehetségesek:

I. eset. Van olyan i index ($i \leq n$), hogy $g_i < 0$.

A további esetekben feltesszük, hogy $g_i \geq 0$, ha $i \leq n$.

II. eset. $\sum_{i=1}^n g_i < g_{n+1}$, azaz az 1. ábra jelöléseivel $a^{(0)} < 0$.

III. eset. $\sum_{i=1}^n g_i \geq g_{n+1}$, azaz $a^{(0)} \geq 0$.

Az alábbiakban külön-külön tárgyaljuk ezt a három esetet.

I. eset:

Van $g_i < 0$ ($i \leq n$). Ekkor a (2.1) feladat célfüggvénye nem korlátos, $(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ pozitív célfüggvényértékű extrémális irány ($i \leq (n-1)$ -re az 1., $i=n$ -re a 2. ábrából látható), így a 2. fejezetben leírtak szerint $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ az (1.4) feladat megengedett tartományának pozitív célfüggvényértékű extrémális iránya.

$c_{n-1} - c_1$	1	-1	-1	1	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$c_{n-1} - c_{n-2}$		1 - 1		-1 1	
$c_n - c_{n-1}$			1 - 1	-1 1	
$-c_{n-1}$			1	-1	1
$f^{(1)}$	0	...	0	$a^{(1)}$	g_n
	g_1	...	g_{n-2}	$b^{(1)}$	0

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_n) g_i + c_n g_{n+1} - (c_n - c_{n-1}) \left(- \sum_{i=1}^{n-1} g_i + g_{n+1} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} (c_i - c_{n-1}) g_i + c_{n-1} g_{n+1}$$

$$a^{(1)} = -b^{(0)} = \sum_{i=1}^{n-1} g_i - g_{n+1}$$

$$b^{(1)} = g_{n-1} + b^{(0)} = - \sum_{i=1}^{n-2} g_i + g_{n+1}$$

2. ábra. Az első báziscsere után a szimplex tábla a III. esetben

II. eset:

$\sum_{i=1}^n g_i < g_{n+1}$. Ekkor a 2.4. állítás felhasználásával az 1. ábrából látható, hogy $(e_1 + \dots + e_n - e_{2n+1}) \in R^{2n+1}$ a (2.1) feladat megengedett tartományának pozitív cél-függvényértékű extrémális iránya, így a 2.1. állítás miatt $(e_1 + \dots + e_n - e_{n+1}) \in R^{n+1}$ az (1.4) feladat megengedett tartományának pozitív cél-függvényértékű extrémális iránya.

III. eset:

$\sum_{i=1}^n g_i \geq g_{n+1}$. Ha $b^{(0)} \geq 0$, akkor optimális a szimplex tábla. Ha $b^{(0)} < 0$, akkor végezzük el az első báziscserét (2. ábra), és ha nem kapunk optimális megoldást, akkor a másodikat is. A c_1, \dots, c_n együtthatók nemcsökkenő sorrendje miatt a következő szabályszerűséget állapíthatjuk meg:

3.1. ÁLLÍTÁS. Ha a (2.1) feladat szimplex módszerrel történő megoldásakor az s -edik báziscseréig nem kaptunk optimális megoldást, akkor az s -edik báziscsere után a 3. ábrán látható szimplex táblát kapjuk. Ha $b^{(s)}$ negatív, akkor a következő báziscserénél az együttható-mátrix $(2n-s)$ -edik oszlopa kerül be a bázisba és az $(n-s-1)$ -edik oszlop kerül ki a bázisból, továbbá $a^{(s+1)}$ pozitív lesz.

Bizonyítás. Az s -edik szimplex táblából számoljuk ki az $(s+1)$ -ediket (3. és 4. ábra).

		$(n-s)$				$(2n-s)$			
$(n-s)$	$c_{n-s} - c_1$	1		-1		-1		1	
	\vdots	\cdot	\cdot	\cdot	\vdots	\cdot	\cdot	\cdot	\vdots
	$c_{n-s} - c_{n-s-1}$			1	-1			-1	1
	$c_{n-s+1} - c_{n-s}$				1	-1			\cdot
	\vdots				\vdots			\cdot	\cdot
	$c_n - c_{n-s}$				\cdot			\cdot	1
	$-c_{n-s}$				1			-1	
	$f^{(s)}$	0	\dots	0	$a^{(s)}$	g_{n-s+1}	\dots	g_n	1
		0	\dots	0	g_1	\dots	g_{n-s-1}	$b^{(s)}$	0

$$f^{(s)} = \sum_{i=1}^{n-s-1} (c_i - c_{n-s}) g_i + c_{n-s} g_{n+1}$$

$$a^{(s)} = \sum_{i=1}^{n-s} g_i - g_{n+1}$$

$$b^{(s)} = - \sum_{i=1}^{n-s-1} g_i + g_{n+1}$$

3. ábra. Az s -edik báziscsere után a szimplex tábla a III. esetben

		$(n-s-1)$				$(2n-s-1)$			
$(n-s-1)$	$c_{n-s-1} - c_1$	1		-1		-1		1	
	\vdots	\cdot	\cdot	\cdot	\vdots	\cdot	\cdot	\cdot	\vdots
	$c_{n-s-1} - c_{n-s-2}$			1	-1			-1	1
	$c_{n-s} - c_{n-s-1}$				1	-1			\cdot
	\vdots				\vdots			\cdot	\cdot
	$c_n - c_{n-s-1}$				\cdot			\cdot	1
	$-c_{n-s-1}$				1			-1	
	$f^{(s+1)}$	0	\dots	0	$a^{(s+1)}$	g_{n-s}	\dots	g_n	1
		0	\dots	0	g_1	\dots	g_{n-s-2}	$b^{(s+1)}$	0

$$f^{(s+1)} = \sum_{i=1}^{n-s-1} (c_i - c_{n-s}) g_i + c_{n-s} g_{n+1} - (c_{n-s} - c_{n-s-1}) \left(- \sum_{i=1}^{n-s-1} g_i + g_{n+1} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-s-2} (c_i - c_{n-s-1}) g_i + c_{n-s-1} g_{n+1}$$

$$a^{(s+1)} = -b^{(s)} = \sum_{i=1}^{n-s-1} g_i - g_{n+1}$$

$$b^{(s+1)} = g_{n-s-1} + b^{(s)} = - \sum_{i=1}^{n-s-2} g_i + g_{n+1}$$

4. ábra. Az $(s+1)$ -edik báziscsere után a szimplex tábla a III. esetben

A III. eseten belül további négy eset lehetséges:

a) Van olyan k index (tekintsük az első ilyen), melyre $\sum_{i=1}^k g_i = g_{n+1}$. Legyen m az első olyan természetes szám, melyre $\sum_{i=1}^{k+m} g_i > g_{n+1}$. Ha nincs ilyen, legyen $m = n - k$. Ekkor $s = (n - k - m)$ esetén az s -edik báziscsere után optimális a szimplex tábla. A 2. fejezetben leírtak alapján az (1.4) feladat következő optimális megoldását kapjuk:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_1 &= c_{k+m} - c_1, \\ &\vdots \\ u_{k+m-1} &= c_{k+m} - c_{k+m-1}, \\ u_{k+m} &= 0, \\ &\vdots \\ u_n &= 0, \\ u_{n+1} &= -c_{k+m}. \end{aligned}$$

Újabb báziscserékkel ettől eltérő megoldásokhoz juthatunk. Addig hajthatunk végre báziscseréket, amíg $b^{(s)} > 0$ nem teljesül, azaz míg $b^{(s)} = -\sum_{i=1}^{k-1} g_i + g_{n+1}$ lesz. Az így kapott megoldások közül a p -edik ($p = 1, \dots, m$) a következő:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u_1 &= c_{k+m-p} - c_1, \\ &\vdots \\ u_{k+m-p-1} &= c_{k+m-p} - c_{k+m-p-1}, \\ u_{k+m-p} &= 0, \\ &\vdots \\ u_n &= 0, \\ u_{n+1} &= -c_{k+m-p}. \end{aligned}$$

b) Van olyan k index, melyre $\sum_{i=1}^{k-1} g_i < g_{n+1} < \sum_{i=1}^k g_i$. Ekkor az $(n-k)$ -edik báziscsere után optimális a szimplex tábla, amelyből az eddigiekhez hasonlóan az (1.4) feladat megengedett tartományának következő optimális extrémis pontját kapjuk:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_1 &= c_k - c_1, \\ &\vdots \\ u_{k-1} &= c_k - c_{k-1}, \\ u_k &= 0, \\ &\vdots \\ u_n &= 0, \\ u_{n+1} &= -c_k. \end{aligned}$$

c) Ha az $(n-1)$ -edik báziscsere után sem optimális a szimplex tábla, azaz $b^{(n-1)} = g_{n+1}$ negatív, akkor — mint az 5. ábrából látható — a célfüggvény nem korlátos, $(e_{n+1} + \dots + e_{2n} + e_{2n+1}) \in R^{2n+1}$ a (2.1) feladat megengedett tartományának po-

4. Az (1.4) feladat megoldásának algoritmus

1. lépés: Vizsgáljuk meg a g_1, \dots, g_{n+1} együtthatókat. Ha valamennyi nemnegatív, térjünk rá a 2. lépésre. Ha például $g_i < 0$, akkor e_i pozitív célfüggvényértékű extrémális irány. *Itt az eljárás befejeződik.*

2. lépés: Ha $g_{n+1} > 0$, térjünk rá a 3. lépésre.
Ha $g_{n+1} = 0$, számítsuk ki a

$$c = \max(-c_1, \dots, -c_n)$$

értéket. Ekkor $c \cdot e_{n+1}$ optimális extrémális pont. *Itt az eljárás befejeződik.*

3. lépés: Ha $g_1 + \dots + g_n \geq g_{n+1}$, térjünk rá a 4. lépésre.
Ha $g_1 + \dots + g_n < g_{n+1}$, akkor az

$$e_1 + \dots + e_n - e_{n+1}$$

vektor pozitív célfüggvényértékű extrémális irány. *Itt az eljárás befejeződik.*

4. lépés: Rendezzük sorba a c_1, \dots, c_n együtthatókat:

$$c_{\pi(1)} \leq \dots \leq c_{\pi(n)}.$$

Itt $\pi(1), \dots, \pi(n)$ az $1, \dots, n$ számok egy permutációja. Legyen k az első index, melyre

$$g_{\pi(1)} + \dots + g_{\pi(k)} \geq g_{n+1}.$$

Ha $g_{\pi(1)} + \dots + g_{\pi(k)} = g_{n+1}$, térjünk rá az 5. lépésre.

Ha $g_{\pi(1)} + \dots + g_{\pi(k)} > g_{n+1}$, akkor

$$u_{\pi(i)} = c_{\pi(k)} - c_{\pi(i)}, \quad i < k,$$

$$u_{\pi(i)} = 0, \quad k \leq i \leq n,$$

$$u_{n+1} = -c_{\pi(k)}$$

optimális extrémális pont. *Itt az eljárás befejeződik.*

5. lépés: Legyen m a legkisebb olyan természetes szám — ha van ilyen —, melyre

$$g_{\pi(1)} + \dots + g_{\pi(k+m)} > g_{n+1}.$$

Ha nincs ilyen, legyen $m = n - k$. Ekkor az (1.4) feladatnak $(m+1)$ extrémális pontját állítottuk elő, melyek közül a p -edik ($p = 0, \dots, m$):

$$u_{\pi(i)} = c_{\pi(k+p)} - c_{\pi(i)}, \quad i < k+p,$$

$$u_{\pi(i)} = 0, \quad k+p \leq i \leq n,$$

$$u_{n+1} = -c_{\pi(k+p)}.$$

Megjegyezzük, hogy ezek a megoldások nem feltétlenül különbözőek. *Itt az eljárás befejeződik.*

IRODALOM

- [1] DEÁK, I., HOFFER, J., MAYER, J., NÉMETH, Á., POTE CZ, B., PRÉKOPA, A. és STRAZICKY, B., „Nagy-méretű, vegyesváltózós, matematikai modell termikus villamosenergia-rendszer rövidtávú, optimális menetrendjének meghatározására hálózati feltételek figyelembevételével”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 9 (1983) 221—337.
- [2] HOFFER, J., „Döntésektől függő ellátási feladatok megoldása Benders dekompozícióval”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 7 (1981) 73—82.
- [3] PRÉKOPA, A., *Lineáris programozás I.* (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968).

(Beérkezett: 1985. március 20.)

PRILL MÁRIA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE
1502 BUDAPEST, XI. KENDE U. 13—17.

THE ANALYSIS OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS,
RESULTING FROM THE DECOMPOSITIONAL SOLVING OF SUPPLY
PROBLEMS DEPENDENT ON DECISIONS

M. PRILL

The paper deals with linear programming problems resulting from the *Benders decompositional solving* supply problems dependent on decisions, furthermore with the presentation of the extreme points and directions of their set of feasible solutions.

For the mentioned questions we give you a simple algorithm by the help of the simplex method based on sorting.

SZŐLŐ TELEPÍTÉSE ÉS FELDOLGOZÁSA TÖBBCÉLÚ OPTIMALIZÁCIÓS MODELL ALAPJÁN

SZENTELEKI KÁROLY és SZIDAROVSKY FERENC

Budapest

Borexportunk növelése érdekében a legmegfelelőbb szőlőfajták telepítése és a termés minél jobb hasznosítása alapvető feladat. A mezőgazdasági és kertészeti gyakorlatban e problémák kezelésénél rendszerint megelégszenek egyetlen célfüggvényt tartalmazó matematikai modell kidolgozásával és megoldásával. Az általunk bemutatott modell nyereség maximalizálása mellett egy másik rendkívül jelentős körülmény optimalizálására, a szüreti munkacsúcsok minimalizálására is törekszik.

Az efficiens halmaz leírása után a legfontosabb többcélú programozási módszereket alkalmaztuk a probléma megoldására. Megvizsgáltuk a redukált feladatok linearitásán kívül a számszerű eredmények tendenciáit, és a vizsgált eredményeket összehasonlítottuk a numerikus eredmények alapján. Vizsgálatunk eredményeként a szakemberek a kiválasztott többcélú programozási módszerhez reális preferencia-rendszert tudnak definiálni.

1. Bevezetés

Borexportunk növelésének érdekében a legmegfelelőbb szőlőfajták telepítése és a termés minél jobb hasznosítása alapvető feladat. Jelen dolgozatunkban bemutatásra kerülő modell is ezt a célt tűzi maga elé. Hazánk egyik szőlőtermő területére dolgoztunk ki egy olyan többcélú programozási modellt, amely egyes gazdaságok számára a területi és technológiai korlátok mellett megadja az egyes szőlőfajták optimális termőterületeinek nagyságát, valamint a szőlőlé optimális hasznosítását sűrítmény, mistella és különböző fajborok készítésére.

A mezőgazdasági és kertészeti gyakorlatban rendszeresen alkalmaznak optimalizációs módszereket (I. SZABADKAI és SZIDAROVSKY, 1983). Azonban az alkalmazások során mindig megelégszenek egyetlen célfüggvény optimalizálásával. Nyilvánvaló, hogy komplex gazdasági rendszereket egyetlen célfüggvénnyel jellemezve megalapozatlan eredményre juthatunk, hiszen több más fontos gazdasági körülményt az optimális megoldásnál nem veszünk figyelembe. A dolgozatunkban bemutatásra kerülő modell több célfüggvénnyel dolgozik. Rájöttünk ugyanis arra, hogy csak a nyereség optimalizálásával olyan termelési program adódik, amely munkaerő igényét a szüreti csúcsidőszakban a gazdaság nem tudja biztosítani, illetve a munkaerő esetleges biztosítása esetén munkaszervezési, szállítási és feldolgozási nehézségek lépnek fel.

Nem hagyható továbbá figyelmen kívül az egyes szőlőfajtáknak a rothadásra való hajlamossága, továbbá a fagyérzékenysége sem. Így a nyereség mellett a munkacsúcsok lefaragása, a rothadásból eredő veszteség és a fagykár kockázatának csökkentése mind kitűzött céljai a gazdaságoknak. Az egyes szőlőfajták rothadási hajlamanak, illetve fagyérzékenységének mérésére a szőlőtermesztési szakemberek pont-

rendszert dolgoztak ki Magyarországon. A két utóbbi célfüggvény megfogalmazásakor mi is ezen pontrendszerre támaszkodtunk.

Modellünk konkrét elemzését először két célfüggvénnyel, a maximális nyereségre, illetve a munkacsúcok mérséklésére vonatkozó célok együttes vizsgálatával kezdtük. Mivel az itt kapott efficiens pontok mindegyikénél a rothadási hajlam, illetve az átlagos fagyérzékenység elfogadható szinten maradt, így ezen kritériumok optimalizálásától a továbbiakban eltekintettünk, s csak az első két célfüggvény kölcsönhatását vizsgáltuk.

Egycélú optimalizálási feladatok esetén az optimális megoldások ekvivalensek egymással, azaz bármelyik optimális megoldást is választjuk ki, a hozzátartozó célfüggvényérték mindig ugyanaz. Több célfüggvény együttes jelenléte esetén az optimalitást, mint megoldási kritériumot is felül kell vizsgálnunk. Tekintsük tehát az

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & \mathbf{x} \in L \\ & \varphi_i(\mathbf{x}) \rightarrow \max \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

többcélú optimalizálási feladatot, ahol L a lehetséges megoldások halmaza, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ pedig a célfüggvények. Az (1.1) feladat efficiens megoldása alatt olyan $\mathbf{x}^* \in L$ lehetséges megoldást értünk, amelyre nem létezik olyan $\mathbf{x} \in L$, hogy

- a) $\varphi_i(\mathbf{x}) \cong \varphi_i(\mathbf{x}^*) \quad (i = 1, \dots, n)$;
- b) legalább egy i_0 index esetén $\varphi_{i_0}(\mathbf{x}) > \varphi_{i_0}(\mathbf{x}^*)$.

A matematikai irodalomban az efficiens fogalom finomítását, efficiens megoldások létezését és numerikus meghatározását számos könyv, cikk is tárgyalja (l. GORCOECHEA ET AL., 1982, SZABADKAI és SZIDAROVSKY, 1983). Az optimalitással ellentétben efficiens megoldások általában nem ekvivalensek egymással és bármelyik célfüggvényt növelve legalább egy a többi célfüggvény közül feltétlenül csökken. Minthogy az efficiens megoldások száma általában végtelen vagy diszkrét esetben igen sok, a döntéshozó által kiválasztásra kerülő konkrét döntési alternatíva meghatározása további kritériumok alapján történik. Első lépésként célszerű a teljes efficiens halmazt meghatározni, és az összes efficiens megoldás ismeretében a döntéshozó már elhatározhatja, hogy a célfüggvények között milyen preferenciákat, korlátokat kíván érvényesíteni ahhoz, hogy egyértelmű döntéshez jusson.

Két célfüggvény esetén az efficiens megoldások halmazát könnyen megtalálhatjuk. Vezessük be ugyanis a

$$H = \{(f_1, f_2) | \exists \mathbf{x} \in L, f_i = \varphi_i(\mathbf{x}), (i = 1, 2)\}$$

ún. kifizetési halmazt. Tegyük fel, hogy H korlátos és konvex. Oldjuk meg először az

$$(1.2) \quad \begin{aligned} & (f_1, f_2) \in H \\ & f_2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

feladatot, majd az

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & (f_1, f_2) \in H \\ & f_1 \rightarrow \max \end{aligned}$$

problémát.

Jelölje $(f_1^{(1)}, f_2^{(1)})$, illetve $(f_1^{(2)}, f_2^{(2)})$ az (1.2) és (1.3) feladatok optimális megoldásához tartozó célfüggvényértékekből álló vektort. Az efficiens megoldások definíciójából következik, hogyha (f_1^*, f_2^*) efficiens pont, akkor $f_1^{(1)} \leq f_1^* \leq f_1^{(2)}$. Ugyanis $f_1^* < f_1^{(1)}$ esetén az (1.2) feladat alapján $f_2^* = f_2^{(1)}$ lenne, azaz (f_1^*, f_2^*) megoldást dominálná az $(f_1^{(1)}, f_2^{(1)})$ megoldás. Egyáltalán nem biztos viszont, hogy tetszőleges $f_1^{(1)}$ és $f_1^{(2)}$ közé eső f_1 értékhez található olyan efficiens megoldás, amelynek éppen f_1 az abszcisszája.

Legyen ezután $f_1^{(0)} \in [f_1^{(1)}, f_1^{(2)}]$ tetszőleges, és oldjuk meg az

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (f_1, f_2) &\in H \\ f_1 &= f_1^{(0)} \\ f_2 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

feladatot. Jelölje $f_2(f_1^{(0)})$ az optimális célfüggvényértéket. Ekkor az elmondottakból nyilvánvalóan következik, hogy

$$(1.5) \quad H^{(1)} = \{(f_1, f_2) | f_1 \in [f_1^{(1)}, f_1^{(2)}], f_2 = f_2(f_1)\}$$

halmaz tartalmazza az összes efficiens pontot. Az efficiens pontoknak a $H^{(1)}$ halmazból való kiszűrése is igen könnyű például grafikus ábrázolással a definíció alapján.

Az efficiens halmaz meghatározására természetesen más módszerek közül is választhatunk. Konkrét feladatunk megoldása során a fenti módszert alkalmaztuk.

Konkrét megoldásokat a többcélú programozási módszerek bármelyikének alkalmazásával kaphatunk. A konkrét módszerek kiválasztása és a módszerek paramétereinek megválasztása már egyértelműen meghatározza a megoldást. Egy-egy konkrét probléma megoldásához a legjobban megfelelő módszer kiválasztására nincs általános recept. Ebben a dolgozatunkban mi sem rögzítjük az alkalmazandó módszert, hanem a legfontosabb módszerek mindegyikét kipróbáljuk a módszer paramétereinek széles kombinációi mellett. Ezzel persze nem egyetlen döntési változatot, hanem döntési változatok alternatíva-rendszerét kapjuk. A döntéshozó ebből az alternatíva halmazból már kiválasztja a neki legjobban megfelelőt a módszerek preferencia-rendszere és a választott paraméterek alapján.

Megjegyezzük végül, hogy hasonló gondolatot alapszik PETERSON (1984) vizsgálata is, aki egy bányászati modell esetére végez analóg vizsgálatokat.

Konkrét számításaink során öt módszercsaládot vizsgáltunk meg.

M1. A *szekvenciális* módszernél először az

$$(1.6) \quad \begin{aligned} x &\in L \\ \varphi_1(x) &\rightarrow \max \end{aligned}$$

feladatot oldjuk meg. Ha egyértelmű az optimális megoldás, akkor készen vagyunk, ha nem, akkor ha φ_{10} jelöli az optimumot, akkor második lépésben az

$$(1.7) \quad \begin{aligned} x &\in L \\ \varphi_1(x) &= \varphi_{10} \\ \varphi_2(x) &\rightarrow \max \end{aligned}$$

problémát oldjuk meg és az eredeti feladat megoldásának ez utóbbi lépésben kapott megoldást fogadjuk el.

Ha a második célfüggvényből indulunk ki, ahol először az

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & \mathbf{x} \in L \\ & \varphi_2(\mathbf{x}) \rightarrow \max \end{aligned}$$

problémát oldjuk meg. Ha egyértelmű optimális megoldást kapunk, akkor most is készen vagyunk. Ellenkező esetben második lépésként az

$$(1.9) \quad \begin{aligned} & \mathbf{x} \in L \\ & \varphi_2(\mathbf{x}) = \varphi_{20} \\ & \varphi_1(\mathbf{x}) \rightarrow \max \end{aligned}$$

problémát kell megoldanunk, ahol φ_{20} az első lépés optimuma.

M2. A *korlátok módszerénél* is külön-külön optimalizáljuk a célfüggvényeket, viszont a másik célfüggvényre alsó korlátokat választottunk. Ha m_1, m_2 , ill. M_1, M_2 jelöli φ_1, φ_2 minimumát, ill. maximumát, akkor ennek a módszernek az alkalmazásakor először az

$$(1.10) \quad \begin{aligned} & \mathbf{x} \in L \\ & \varphi_2(\mathbf{x}) \cong m_2 + \frac{l}{20} \cdot (M_2 - m_2) = \varepsilon_2 \\ & \varphi_1(\mathbf{x}) \rightarrow \max \end{aligned}$$

feladatot, majd az ehhez hasonló

$$(1.11) \quad \begin{aligned} & \mathbf{x} \in L \\ & \varphi_1(\mathbf{x}) \cong m_1 + \frac{l}{20} \cdot (M_1 - m_1) = \varepsilon_1 \\ & \varphi_2(\mathbf{x}) \rightarrow \max \end{aligned}$$

feladatot oldottuk meg $l=0, 1, 2, \dots, 20$ esetén. Vegyük észre, hogy az (1.10) és (1.11) probléma esetén a φ_1 , illetve φ_2 célfüggvényre adott alsó korláttal egyenletesen végigfutottuk annak értékkészletét.

M3. A *súlyozásos* módszernél a két célfüggvény lineáris kombinációját optimalizáltuk, azaz az

$$(1.12) \quad \begin{aligned} & \mathbf{x} \in L \\ & \frac{l}{20} \varphi_1(\mathbf{x}) + \left(1 - \frac{l}{20}\right) \varphi_2(\mathbf{x}) \rightarrow \max \end{aligned}$$

feladatot oldottuk meg $l=0, 1, \dots, 20$ esetén.

M4. A *célprogramozási* eljárás alkalmazásakor az M_1, M_2 pontot választottuk ideálisnak, és az ettől való távolságot minimalizáltuk. Attól függően, hogy milyen

(ϱ_1 , ϱ_2 vagy ϱ_∞) távolságot választottunk, a következő problémák valamelyikét oldottuk meg:

$$(1.13) \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \in L \\ \frac{l}{20} \cdot (M_1 - \varphi_1(\mathbf{x})) + \left(1 - \frac{l}{20}\right) \cdot (M_2 - \varphi_2(\mathbf{x})) \rightarrow \min \end{array}$$

vagy

$$(1.14) \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \in L \\ \frac{l}{20} \cdot (M_1 - \varphi_1(\mathbf{x}))^2 + \left(1 - \frac{l}{20}\right) \cdot (M_2 - \varphi_2(\mathbf{x}))^2 \rightarrow \min \end{array}$$

vagy

$$(1.15) \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \in L \\ \max \left\{ \frac{l}{20} \cdot (M_1 - \varphi_1(\mathbf{x})); \left(1 - \frac{l}{20}\right) \cdot (M_2 - \varphi_2(\mathbf{x})) \right\} \rightarrow \min \end{array}$$

jelentette a megoldandó feladatot $l=0, 1, \dots, 20$ esetén.

M5. A *kompromisszum-programozási* módszer abban különbözik a célprogramozási eljárástól, hogy a φ_1 és φ_2 célfüggvényeket előbb normalizálnunk kell. A távolságtól függően most vagy az

$$(1.16) \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \in L \\ \frac{l}{20} \cdot \frac{M_1 - \varphi_1(\mathbf{x})}{M_1 - m_1} + \left(1 - \frac{l}{20}\right) \cdot \frac{M_2 - \varphi_2(\mathbf{x})}{M_2 - m_2} \rightarrow \min \end{array}$$

vagy az

$$(1.17) \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \in L \\ \frac{l}{20} \cdot \left(\frac{M_1 - \varphi_1(\mathbf{x})}{M_1 - m_1} \right)^2 + \left(1 - \frac{l}{20}\right) \cdot \left(\frac{M_2 - \varphi_2(\mathbf{x})}{M_2 - m_2} \right)^2 \rightarrow \min \end{array}$$

vagy az

$$(1.18) \quad \begin{array}{c} \mathbf{x} \in L \\ \max \left\{ \frac{l}{20} \cdot \frac{M_1 - \varphi_1(\mathbf{x})}{M_1 - m_1}; \left(1 - \frac{l}{20}\right) \cdot \frac{M_2 - \varphi_2(\mathbf{x})}{M_2 - m_2} \right\} \rightarrow \min \end{array}$$

problémát kell megoldanunk l különböző értékeire. Az M2—M5 módszerek esetén az l értékek 0-tól 20-ig változnak. A 20-as skála önkényes, de véleményünk szerint elégséges ahhoz, hogy a paraméterek folytonos változásának illusztrálására lehetőségünk legyen.

2. A matematikai modell leírása

Az általunk vizsgált területen 16 szőlőfajtát termesztenek. Az egyes szőlőfajták jelölésére a továbbiakban a k paramétert használjuk.

Az egyes szőlőfajták változóit további változókra bontottuk annak megfelelően, hogy mikor szüretelhetők. Legkorábban az augusztus hó 3. negyede jöhet számí-

tásba, legkésőbb pedig október 4. negyede. Így összesen 10 időszak jöhet szóba. Jelölje $k=1, \dots, 16$ esetén $H(k)$ azon változatok halmazát, amelyeket a k -adik fajta szőlőből ilymódon megkülönböztetünk. Ezeket a változatokat betakarításuk hónapja szerint indexszel különböztetjük meg. Esetünkben

$$\begin{aligned} H(1) &= \{3, 4\}; & H(2) &= \{1, 2\}; & H(3) &= \{5, 6, 7\}; & H(4) &= \{5, 6\}; \\ H(5) &= \{5, 6\}; & H(6) &= \{5, 6\}; & H(7) &= \{6, 7\}; & H(8) &= \{6, 7, 8\}; \\ H(9) &= \{7, 8, 9\}; & H(10) &= \{8, 9\}; & H(11) &= \{7, 8\}; & H(12) &= \{8, 9, 10\}; \\ H(13) &= \{9, 10\}; & H(14) &= \{8, 9\}; & H(15) &= \{7, 8, 9\}; & H(16) &= \{9, 10\}. \end{aligned}$$

A szőlőfajták és változatok alapján a következő változókat vezetjük be $k=1, \dots, 16$ esetén:

$x_k = k$ -adik szőlőfajtából rendelkezésre álló termőterület (ha);

$y_{ki} = k$ -adik szőlőfajta i indexű változatából rendelkezésre álló termőterület ($i \in H(k)$, (ha)).

A szőlőlé felhasználása szempontjából a következő termékeket vettük figyelembe:

sűrítmény	($l=1$)
mistella	($l=2$)
hazai olaszrizling	($l=3$)
hazai rizlingszilváni	($l=4$)
hazai chasselas	($l=5$)
hazai tramini	($l=6$)
hazai muscat	($l=7$)

Az egyes termékeket csak bizonyos fajta szőlő levéből lehet készíteni. Jelölj $l=1, \dots, 7$ esetén $M(l)$ azon szőlőfajták halmazát, amelyek az l -edik termék előállításakor szóba jöhetnek. Esetünkben

$$\begin{aligned} M(1) &= \{4\}; & M(2) &= \{8, 9, 10\}; & M(3) &= \{4, 1, 13, 16\}; & M(4) &= \{11, 10, 14, 5\}; \\ M(5) &= \{3, 4, 1, 15\}; & M(6) &= \{7, 10, 14, 3, 12, 6, 8\} \\ && && \text{és } M(7) &= \{5, 3, 16, 15, 10, 9\}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy $l=3$ esetben a szőlőleveleken kívül még mistellát, $l=4, 5, 6, 7$ esetben pedig mistellát és sűrítményt is keverünk a borokhoz. A termékekkel kapcsolatban a következő változókat vezettük be:

$Z_l = l$ -edik termékfajtából termelt mennyiség, (hl);

$u_{lk} = l$ -edik termékfajtához a k -adik szőlőfajtából felhasznált lé mennyiség ($k \in M(l)$), (hl);

$v_{1l} = l$ -edik termékfajtához felhasznált sűrítmény mennyisége (hl).

$v_{2l} = l$ -edik termékfajtához felhasznált mistella mennyisége (hl).

A többcélú elemzés futtatásainak egyszerűsítése érdekében a figyelembe veendő célfüggvényeket is bevezettük külön változóként. Legyen tehát

$\varphi_1 =$ éves hozam (eFt).

$\varphi_2 =$ maximális negyedhavi műszakszám.

A modell feltételrendszere a következő típusú feltételekből áll.

A teljes termőterület adott:

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^{16} x_k = T,$$

ahol T = összes termőterület nagysága.

A fajta-változatok egyedi termőterületeinek összege a fajta termőterületével azonos:

$$(2.2) \quad \sum_{i \in H(k)} y_{ki} = x_k \quad (1 \leq k \leq 16).$$

Az egyes szőlőfajták termőterületére alsó és felső korlátok adottak:

$$(2.3) \quad a_k \leq x_k \leq A_k \quad (1 \leq k \leq 16).$$

Ha valamelyik (vagy esetleg mindkét) korlát hiányzik, akkor az

$$a_k = 0, \quad A_k = T$$

választással kell élnünk.

A megtermelt és felhasznált szőlőlé egyensúlyegyenletei a következő alakúak

$$(2.4) \quad t_k \cdot x_k - \sum_{i=1}^7 \left(\sum_{k \in M(i)} u_{ik} \right) = 0, \quad (1 \leq k \leq 16), \quad k \neq 2),$$

ahol t_k jelöli a k -adik szőlőfajta 1 hektárnyi területéről adódó szőlőlé mennyiségét. A $k=2$ értéknek megfelelő csemege-szőlő csak gyümölcsként kerül értékesítésre.

A (2.4) alatt kapott sűrítmény, illetve mistella továbbfelhasználásra kerül az előállítandó fajborokhoz:

$$(2.5) \quad Z_i - \sum_{l=3}^7 v_{li} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Az egyes fajborok előállítására gazdasági megfontolásokból eredő mennyiségi korlátozások, illetve borászati előírásokból eredő technológiai kötöttségek érvényesek. Az egyes termékek előállított mennyiségeire alsó és (vagy) felső korlátok adottak:

$$(2.6) \quad b_l \leq Z_l \leq B_l \quad (l = 3, \dots, 7).$$

Látható, hogy a sűrítményre és mistellára nem adtunk korlátozó feltételt, ennek oka az, hogy a modell a jövedelmezőségre törekvés érdekében úgysem állít elő feleslegesen e termékekből, míg a szükséges mennyiséget az alább részletezésre kerülő technológiai feltételek biztosítják. Eszerint az egyes fajborok sűrítményből, mistellából, meghatározott szőlőfajtából csak meghatározott szint alatti, illetve szint feletti mennyiséget tartalmazhatnak. Jelölje $I(l)$, ($l=3, \dots, 7$) az l -edik termék technológiai korlátainak a számát, ekkor $1 \leq i \leq I(l)$ esetén ezen előírások általánosan így fogalmazhatók:

$$(2.7) \quad d_i^{(l)} \leq \sum_{k \in M(l)} c_{ik}^{(l)} u_{ik} + c_i^{(l)(1)} v_{i1} + c_i^{(l)(2)} v_{i2} - Z_l \leq D_i^{(l)}.$$

Itt a $c_{ik}^{(l)}$, $c_i^{(l)(1)}$, $c_i^{(l)(2)}$ konstansok a technológiai korlátok együtthatói.

A célfüggvényeket reprezentáló változókat a következőképpen definiáljuk. Az első célfüggvény

$$(2.8) \quad \varphi_1 = - \sum_{k=1}^{16} R_k x_k - \sum_{l=1}^2 Q_l Z_l + \sum_{i=3}^7 S_i Z_i + S^{(2)} x_2,$$

ahol $R_k = k$ -adik szőlőfajta 1 hektárjának éves művelési és betakarítási költsége;

$Q_l = 1$ hl sűrítmeny, illetve mistella előállításának közvetlen költsége;

$S_l = l$ -edik termék 1 hl-nél árbevétel — közvetlen költség;

$S^{(2)}$ = csemegeszőlő eladásából adódó egységnyi területre vonatkozó árbevétel.

A második célfüggvény, a maximálisan jelentkező heti műszaknap szükséglet felírása előtt vezessük be a következő változókat:

M_{ki} = k -adik szőlőfajta i -edik változatának 1 hektárnyi területéről való betakarításának műszaknap-igénye.

Ekkor az i -edik hét műszaknap-igénye ($i = 1, \dots, 10$);

$$\sum_{\substack{k \\ i \in H(k)}} M_{ki} y_{ki}$$

így a maximális φ_2 értéket a

$$(2.9) \quad \sum_{\substack{k \\ i \in H(k)}} M_{ki} y_{ki} - \varphi_2 \leq 0 \quad (i = 1, \dots, 10)$$

feltételekkel lehet meghatározni. Minthogy φ_1 maximumára és φ_2 minimumára törekszünk, egyszerre történő maximalizálási problémát nyerhetünk az

$$f_1 = \varphi_1, \quad f_2 = -\varphi_2$$

új célfüggvényekkel.

A modellel és annak kiértékelésével az adott gazdaság szőlőtermesztő ágazatának rekonstrukciós döntéseit kívántuk megalapozni. Mivel ezen ágazat nyereséges, és a gazdaság vezetői hosszú távon ugyanekkora szőlőterületet kívánnak fenntartani, nem kívánják ezen ágazatok jövedelmezőségét más ágazatokéval versenyeztetni. Ezért tekintettünk el a szőlőtelepítési beruházások költségátvezetőinek figyelembe vételétől. Ágazaton belül a költségek ugyancsak figyelmen kívül hagyhatók, mivel az időközben termelésből kikerült, előregedett ültetvények pótlásának költsége alig függ a telepítendő fajtától.

A fajlagos ráfordítási együtthatók, kizozatali mutatók, piaci árak, az időjárás hatása a termelési eredményekre véletlen változó. Ezen változók szakemberek által megbecsült várható értékeit építettük be modellünkbe, melyektől a realizálódó értékek természetesen eltérhetnek. Sztochasztikus modell felépítése, de elsősorban a kiértékelésének nehézségei nem nyújtának számunkra annyival megbízhatóbb eredményt, ami a befektetett többletmunkával szemben elvárható lenne.

3. Az efficiens halmaz numerikus meghatározása

Az előzőekben bemutatott modellt a *Kertészeti Egyetem Soroksári Tangazdaságának* szőlőtelepére alkalmaztuk. A probléma egy másik megközelítése megtalálható a TÓTH és SZENTELEKI (1983) cikkben és a DIMÉNY (1983) könyvben.

A vizsgált telepösszterülete 363 ha. Az egyes szőlőfajták területére adott alsó

és felső korlátok a következők voltak:

$$a_5 = 26, \quad a_{14} = 62, \quad A_2 = 15;$$

a többi alsó korlát 0, felső korlát pedig 363 értékű. Az egyes szőlőfajták hektáronkénti hozamait az 1. táblázat mutatja:

1. TÁBLÁZAT

Szőlőfajták hektáronkénti hozamai

	hl/ha															
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
t_k	56	—	70	77	56	70	56	77	63	91	84	63	70	56	77	56

Megjegyezzük, hogy a CSÉ 35 csemegeszőlőként kerül eladásra, így borszőlőként nem jelenik meg.

A végtermékekre adott alsó és felső korlátok a modellben közvetlenül nem jelennek meg, így $b_l = 0$, $B_l = \infty$, ($l = 1, \dots, 7$).

A technológiai együttthatók a borházasításnál ismert, a *Soroksári Tangazdaság* szakemberei által megadott értékek voltak. Részletezésüktől eltekintünk, minthogy az egy 30×38 típusú mátrix megadását jelentené.

Az egyes szőlőfajták hektáronkénti művelési és betakarítási költségét felbontva a 2. táblázat adja meg.

A csemegeszőlő $S^{(2)}$ egységnyi árbevétele 134 eFt/ha. Az egyes készborok költségei a következőkből tevődnek össze. A szőlőművelés és betakarítás költségeit itt nem számítjuk fel ismét.

A mustból történő borelőállítás költsége 166 Ft/hl minden alapbor esetén. Sűrítmény előállítási költsége 1500,— Ft/hl, mistella előállítási költsége pedig 9200,— Ft/hl.

2. TÁBLÁZAT

Szőlőfajták művelési és betakarítási egységköltségei

	eFt/ha		
k	Művelési költség	Betakarítás gépi költség	Betakarítás kézi munka költség
1	21,18	13,20	8,00
2	21,18	12,15	16,00
3	21,18	16,50	8,00
4	21,18	19,80	6,00
5	21,18	13,20	6,40
6	21,18	16,50	6,40
7	21,18	13,20	5,84
8	21,18	19,80	8,76
9	21,18	16,50	8,00
10	21,18	21,45	9,44
11	21,18	19,80	8,00
12	21,18	12,15	9,80
13	21,18	16,50	6,56
14	21,18	13,20	7,12
15	21,18	18,15	11,00
16	21,18	13,20	5,36

3. TÁBLÁZAT

Készborok értékesítési árai Ft/hl

3	4	5	6	7
2500	2740	2300	2970	2970

A készborok költsége tehát a felhasznált alapborok és segédanyagok önköltségével azonos. A készborok árait a 3. táblázat mutatja.

A második célfüggvény együtthatóit az egyes szőlőfajták betakarításának műszaknap/ha adatai jelentik, amelyeket a 4. táblázat tartalmazza.

4. TÁBLÁZAT

Szőlőfajták betakarításának munkanap igénye

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
M_{ki}	20	40	20	15	16	16	15	22	20	24	20	23	16	18	27	13

Mint hogy szőlőfajtánként és nem betakarítási időponttól függ a munkaerőszükséglet, M_{ki} értéke i -től független.

Az itt részletezett adatokkal rendelkező két célfüggvényes modell efficiens megoldásait állítottuk elő a dolgozat bevezetésekor részletezett módszer segítségével.

Az efficiens halmazon

$$\varphi_{1|_{\min}} = 2300 \text{ (eFt)}, \quad \varphi_{1|_{\max}} = 32\,053 \text{ (eFt)}$$

$$\varphi_{2|_{\min}} = 138 \text{ (fő)}, \quad \varphi_{2|_{\max}} = 394 \text{ (fő)}.$$

Itt a műszaknapok számát 5-tel osztva kapjuk a hétre esedékes munkások számát.

Az efficiens halmazt az 1. ábrán ábrázolt törtvonal adja meg. A végpontok:

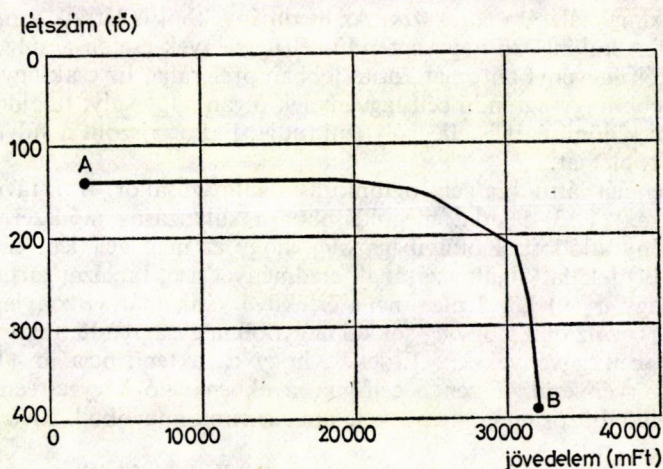
$$A(2300, 138) \text{ és } B(32\,053, 394).$$

Jól látható a két célfüggvény ellentmondó hatása, ugyanis minimális létszám csak minimális hasznót tud biztosítani, maximális létszám szükséges maximális haszon eléréséhez. Több mint 60 efficiens csúcspontot találtunk.

Az efficiens halmaz bármely pontja optimális olyan értelemben, hogy annál mindkét célfüggvényben egyszerre jobb megoldás nem adható. Így megoldásként elvileg bármelyikük elfogadható.

Konkrét döntések meghozatala érdekében az efficiens halmazon valamilyen preferenciát kell definiálnunk, és az ebből adódó többcélú programozási módszert alkalmazva adódik a legjobban preferált efficiens döntés.

A felépített matematikai modellünk 89 változóból és 112 feltételből állt. A mintegy 60 efficiens pont meghatározásához mintegy 100 számítógépes futtatásra volt szükségünk. Azért nem többre, mert modellünk a felhasználható munkaerőt tekintve diszkrét, így az efficiens pontok keresése lényegesen egyszerűbb, mint folytonos modellek esetében. Modellünkönél csak a [138, 394] intervallum egész értékeit kellett vizsgálnunk. Ezen egész értékeket felezéses eljárással választottuk ki, s az újabb



1. ábra. Az efficiens halmaz

számítógépes futtatásnál az előző optimális megoldásból, mint lehetséges bázisból indultunk ki.

A különféle módszerek alkalmazását, a számítási eredményeket és a módszerek összehasonlítását a következőkben elemezzük. A szekvenciális módszer alkalmazásakor mindkét esetben már az első lépés egyértelmű optimumot adott. Így a második lépcső számítására nem is került sor. Először az (1.6) feladatot oldottuk meg. Eredményül a

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 32\,053, \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = -394$$

adódott, vagyis φ_1 lehető legjobb értékét veszi fel, φ_2 értéke az efficiens halmazon pedig a lehető legkedvezőtlenebb. Az (1.8) feladat megoldásakor a

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 2300, \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = -138$$

értékek adódnak, amikor φ_2 a legkedvezőbb és egyúttal φ_1 a legkedvezőtlenebb értéket veszi fel. Azt is láthatjuk, hogy a szekvenciális módszer alkalmazásakor az efficiens halmaz két szélsőséges pontját kaphatjuk meg, alkalmazásával igazi „kompromisszum” nem érhető el a célfüggvények között. Így a módszer alkalmazását csak a fenti fenntartásokkal tudjuk javasolni a gyakorlatban.

A korlátok módszere az (1.10) és (1.11) feladatok megoldását jelenti. A φ_2 célfüggvény nagy l esetén változik jelentősen az (1.11) feladat esetén. Ezen érdekes jelenségeknek nemcsak az az oka, hogy a két célfüggvény ellentétes tendenciájú, hanem az is, hogy a φ_2 értéke mindig egész, és a $\varphi_2 = -139, -140, -141$ értékek között φ_1 igen változékony.

A súlyozásos módszer eredményeit az 5. táblázat tartalmazza. Igen érdekes, hogy φ_2 növelésével φ_1 értéke drasztikusan növekszik, hamar eléri maximumát és végig ott marad. Az efficiens halmazt az 1. ábrán ábráztuk, amiből ez a tulajdonság közvetlen le is olvasható, hiszen kis l érték esetén a célfüggvény egyenese közel párhuzamos a vízszintes tengellyel, valamint φ_1 értéke sokkal nagyobb, mint φ_2 . Itt a lineáris kombinációban nem túl kicsi l mellett a φ_1 -et tartalmazó tag dominál, ezért az (1.12)

feladat φ_1 maximalizálására törekszik. Az eredményekből is látszik a módszer nagy hibája, miszerint különböző nagyságrendű célfüggvények esetén a súlyozásos módszer az egyik célfüggvényt automatikusan jobban preferálja. Ez csak úgy ellensúlyozható, ha a kisebb nagyságrendű célfüggvénynek olyan nagy súlyt tulajdonítunk, ami a nagyságrendi különbséget is ellensúlyozni tudja. Ekkor viszont a súlyok meghatározása okoz problémát.

Hasonló tendenciát láttunk a célprogramozás alkalmazásakor. A φ_1 távolság választásakor, azaz az (1.13) feladat megoldásakor a súlyozásos módszerrel pontosan egyező eredmény adódott. Könnyű igazolni, hogy ez nem véletlen, ennek így kell lennie. Az (1.14) feladat alkalmazásának eredményét a 6. táblázat tartalmazza. Vegyük észre, hogy $\varphi_1(x)$ közel maximális értékűvé válik már viszonylag a táblázat elején. Ennek is az az oka, hogy φ_1 sokkal nagyobb nagyságrendű, mint φ_2 , így főleg φ_1 dominál a célfüggvényekben. Érdekes, hogy ez a tendencia az (1.14) feladat esetén jobban érvényesül, hiszen a célfüggvényekben való négyzetreemelés jobban széthúzza a különböző nagyságrendeket, amit a sima nagyobbik kiválasztása nem tesz meg.

A kompromisszumprogramozási módszerek alkalmazásakor azonos nagyságrendre transzformáljuk a célfüggvényeket, így l folyamatos változásával együtt mindkét célfüggvény értéke is viszonylag folyamatosan változik. A számszerű eredményt az (1.16) feladatra a 7. táblázat mutatja. Mindhárom változat esetén φ_1 értéke $l=0$ és $l=1$ között ugrik, utána lényegében egyenletesen változik. A φ_2 értéke pedig nagy l értékek mellett ugrik nagyokat, $l=18$ és $l=19$ esetén figyelhetők meg nagy ugrások, amikor több, mint 100-at ugrik. A két végpont ($l=0$ vagy $l=19,20$) elhagyásával a kompromisszum-programozás mellett a legegyszerűsebb az effi-

5. TÁBLÁZAT

Az (1.12) feladat alkalmazása

l	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0	2 300	-138
1	30 987	-226
2	31 043	-229
3	32 020	-380
4	32 020	-380
5	32 020	-380
6	32 053	-394
7	32 053	-394
8	32 053	-394
9	32 053	-394
10	32 053	-394
11	32 053	-394
12	32 053	-394
13	32 053	-394
14	32 053	-394
15	32 053	-394
16	32 053	-394
17	32 053	-394
18	32 053	-394
19	32 053	-394
20	32 053	-394

6. TÁBLÁZAT
Az (1.14) feladat alkalmazása

l	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0	2 300	-138
1	31 541	-303
2	31 765	-339
3	31 856	-353
4	31 902	-361
5	31 952	-369
6	31 964	-371
7	31 983	-374
8	31 995	-376
9	32 008	-378
10	32 014	-379
11	32 020	-380
12	32 020	-380
13	32 020	-380
14	32 020	-380
15	32 020	-380
16	32 027	-383
17	32 031	-385
18	32 040	-389
19	32 050	-393
20	32 053	-394

ciens pontok elhelyezkedése az efficiens halmazon. A súlyok (azaz l) folyamatos változtatásával az efficiens pont is közel egyenletesen mozog végig az efficiens halmazon, és a súlyok változásával az optimális döntéshez tartozó célfüggvények is egyenletesen változnak. Éppen ezért ebben az esetben érezzük a súlyok alkalmas megváltoztatásának a közvetlen hatását az eredményre.

Tehát a gyakorlatban ez a módszer látszik a legmegfelelőbbnek. A ϱ_1 , ϱ_2 és ϱ_∞ megválasztásának ebben az esetben nem látjuk különösebb jelentőségét. A φ_1 választásnak az a nagy előnye, hogy a feladat lineáris maradt, így standard módszerek alkalmazhatók megoldásukra.

Megjegyezzük végül, hogy az imént részletezett módszerek közül csak az (1.14) és (1.17) feladat vezetett nemlineáris programozási probléma megoldására. Látszólag az (1.15) és (1.18) feladat célfüggvénye sem lineáris, viszont a dimenzió bővítésével lineárisrá tehető. Az (1.14) és (1.17) feladatok esetén ilyen redukció nem létezik.

Modellünkkel, mint már említettük, elsősorban a gazdaság szőlőtelepítésre vonatkozó rekonstrukciós döntéseit kívántuk megalapozni. Modellünk e telepítési struktúrát a borászati feldolgozó vertikummal kölcsönhatásban vizsgálja, a vertikum együttes jövedelmezősége, költségviszonyai képezik a rekonstrukciós döntések alapját.

Modellünk akkor is alkalmazható, ha adott évben nem kerül sor rekonstrukciós döntésre, ugyanis a borházásításra vonatkozó blokk önállóan is működik. Ilyenkor természetesen rögzíteni kell a rendelkezésre álló termelési szerkezetet, módosítani az időközben esetlegesen megváltozott borellállítási költségeket, piaci árakat és egyéb értékesíthetőségre vonatkozó mennyiségi korlátokat, s a modell kiválasztja a becsült paraméterek közt legkedvezőbb feldolgozási stratégiát.

7. TÁBLÁZAT
Az (1.16) feladat alkalmazása

l	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0	2 300	-138
1	17 558	-140
2	19 485	-141
3	20 324	-142
4	20 920	-143
5	22 020	-146
6	24 870	-155
7	25 123	-156
8	25 489	-158
9	25 639	-159
10	25 639	-159
11	30 122	-204
12	30 293	-206
13	30 364	-207
14	30 364	-207
15	30 759	-217
16	30 831	-219
17	30 928	-223
18	31 043	-229
19	32 008	-378
20	32 053	-394

IRODALOM

- [1] TÓTH, J. és SZENTELEKI, K., „Mezőgazdasági vállalati célok elemzése kompromisszumprogramozás segítségével”, *SZIGMA* 16 (1983) 185—195.
 [2] DIMÉNY, I., (szerk.) *A kertgazdaság vállalati alapja* (Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1983).
 [3] SZABADKAI, A. és SZIDAROVSKY, F., *Döntéselőkészítési módszerek alkalmazása* (Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1983).
 [4] GOICOECHEA, A., D. HANSEN and L. DUCKSTEIN, (1982) *Introduction to Multiobjective Analysis with Engineering and Business Applications* (John Wiley, New York, 1982).
 [5] MOLNÁR, S. és SZIDAROVSKY, F., „Többkritériumú értékfüggvényekről”, *SZIGMA* 16 (1983) 197—207.
 [6] PETERSON, E., „Applications of Multiobjective Programming Methods in the Mining Industry”, Rendszerelméleti Konferencia, 1984. május 20—23, Salgótarján.

(Beérkezett: 1985. április 2.)

SZENTELEKI KÁROLY ÉS SZIDAROVSKY FERENC
KERTÉSZETI EGYETEM
MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK
1118 BUDAPEST, VILLÁNYI UT 29—35.

MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION MODEL FOR VINE PLANTING AND PROCESSING

K. SZENTELEKI and F. SZIDAROVSKY

The need for growing export of Hungarian wine requires the selection of the best kinds of vines and the optimal utilization of the grape juice. In the practical models for such agricultural problems usually only one objective function is considered. Our model has two objectives: the net profit is maximized, and the maximal manpower is minimized. The efficient solution set is first determined, and then, several multiobjective programming methods are applied for the numerical solution of the linear two-objective model. The results are compared, which can give useful guideline for method selection.

VALÓSZÍNŰSÉGGEL KORLÁTOZOTT SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELLEK KONVEXITÁSI PROBLÉMÁJÁRÓL

A. BURKAUSKAS

Vilnius

A dolgozatban olyan, valószínűséggel korlátozott lineáris sztochasztikus programozási feladatot vizsgálunk, amelyben a paraméterek együttes eloszlását ismerjük. Célunk az, hogy feltételeket adjunk a valószínűségi korlátok által meghatározott halmaz konvexitására normális és stabilis eloszlás esetén.

1. Bevezetés

Közismert, hogy számos optimalizálási probléma megfogalmazható a következő lineáris programozási feladat formájában:

$$\begin{aligned} & \min C^T x \\ (1.1) \quad & Ax \leq b, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Ez a modell leírhat például termelési, szállítási, keverési, hálózati és sok egyéb problémát is. Általában az A mátrix és a b , c vektorok elemeit adott számoknak tekintik. Számos gyakorlati esetben azonban kétségbe kell vonni ezt a feltételezést. Részletesebben vizsgálva az adatok természetét, sokszor tapasztalhatjuk, hogy ezek mérésekből, becslésekből, prognózisokból erednek, vagy egyéb statisztikai adatszerzési módszereken alapulnak, ezért inkább valószínűségi változóknak tekinthetők. Ha ezt figyelembe vesszük, nem helyeselhető az a hozzáállás sem, amikor a feladatban szereplő véletlen mennyiségeket várható értékükkel helyettesítik.

Általában, a döntést hozónak számolnia kell bizonyos kockázattal. Nem mindegy, hogy a várható eredménynek milyen a megbízhatósága, vagy például, mekkora a szórása. A várható értékek alkalmazása pedig „elmosza” ezt a valószínűségi információt.

Továbbiakban feltételezzük, hogy az (1.1) feladatban szereplő paraméterek véletlenek, és ismerjük az együttes valószínűségi eloszlásukat (ezzel elkülönítjük magunkat attól az esettől, amikor az információ meghatározhatatlan, amit néha szintén sztochasztikus programozásnak neveznek). A probléma megfogalmazása így módon még nem egyértelmű, mivel nincs meghatározva, hogyan is értelmezzük a véletlen változó minimalizálását és a véletlen korlátozó egyenlőtlenségek teljesülését. A korrekt átfogalmazás érdekében el kell fogadnunk valamilyen döntéshozatali elvet. Ennek több változata létezik, az áttekintésük megtalálható például [6]-ban.

Az egyik legtermészetesebb hozzáállás az, hogy a véletlen egyenlőtlenségek teljesülését egy meghatározott (általában egyhez közeli) p megbízhatósági szintnél nagyobb vagy egyenlő valószínűséggel követeljük meg. Ebben az esetben a megoldási

algoritmusok alkalmazásának szempontjából alapvető probléma az

$$(1.2) \quad \{x \equiv 0, P(Ax \leq b) \equiv p\}$$

valószínűségi korlátok halmazának konvexitása.

Ha csak a b vektor véletlen, akkor a megoldást a PRÉKOPA által kidolgozott logaritmikusan konkáv mértékek elmélete adja meg ([7], [8]). Ha az A mátrix is véletlen, [9]-ben található az (1.2) halmaz konvexitásának bizonyítása speciális struktúrájú normális eloszlású paraméterek esetében. Ennek az eredménynek általánosítása található meg [1]-ben.

A dolgozat célja a konvexitási feltételek kidolgozása véletlen (A, b) mátrix esetében.

Fontoljuk meg röviden azt, hogy milyen feltevéseket engedhetünk meg a feladatban szereplő valószínűségi változók eloszlására. Az (1.2) halmaz konvexitása az

$$(1.3) \quad F(x) = P(Ax \leq b)$$

korlátozó függvények tulajdonságain múlik. Tehát a probléma vizsgálatára kiindulópontunk az (1.3) függvény analitikus alakja lehet, ezt pedig a valószínűségi változók (vektorok) lineáris kombinációjának az eloszlásfüggvénye határozza meg. Az utóbbi megjegyzés, valamint a már megvizsgált eloszlások (*normális, Cauchy*) esete arra késztet, hogy a stabilis eloszlásokat vizsgáljuk. Azon kívül, hogy a stabilis eloszlások a lineáris kombinációkat tekintve zárt osztályt alkotnak (azonos karakterisztikus α -paraméter mellett), a statisztikai adatleírás szempontjából is eléggé hatékonyak a többparaméteresek miatt. A stabilis eloszlások melletti döntés javára még néhány érv szól. Először is, ez az egyetlen osztály, amely eloszlásainak „vonzási tartományuk” van, más szóval, ezek határeloszlások (éppen emiatt olyan fontos a normális eloszlás). Ami a valóság adekvát leírását illeti, sokszor előfordul (különösen közgazdaságban), hogy a véletlen változók szórása végtelen (gyakori a $P(\xi > x) \sim x^{-\alpha}$, $x \rightarrow \infty$ approximáció, ami *Pareto-stabilis eloszlásoknak* felel meg) és például a normális eloszlás használata helytelen.

Jegyezzük meg, hogy e osztályon belül lényeges eltérések vannak, a normális ($\alpha=2$) és nemnormális ($1 < \alpha < 2$) eset között. Először, az utóbbi esetben a sűrűségfüggvények aszimptotikusan úgy viselkednek, mint a törtfüggvények, és nem exponenciálisan csökkennek, ezért sokkal laposabbak. Másodszor, maguk a függvények kifejezett alakjának hiánya nehezíti a pontos eredmények elérését. Ezért e két esetet külön-külön vizsgáljuk.

A probléma megközelítéséhez a következő megfontolások szolgálhatnak segítséggel:

1. Az elhelyezkedési és a szóródási paraméterek relatív nagysága játszhat némi szerepet (a határt jelentő elfajult esetben, amikor az utóbbiak nullával egyenlők, a megengedett halmaz poliéder).

2. Az $F(x)$ korlátozó függvény, a konkávitás szempontjából „rossz” alakja ellenére, eléggé nagy p mellett olyan $\{x: F(x) \geq p\}$ színhalmazt határozhat meg, amely konvex lehet, ha az $F(x)$ függvény némi unimodálitási tulajdonságokkal rendelkezik.

3. E két feltételezés nem tűnik természetellenesnek, mivel a gyakorlatban a véletlen tényezők szórása viszonylag kisebb, mint az abszolút értékük, a p megbízhatósági szint pedig eléggé magas szokott lenni (általában közel egyhez).

2. Korlátozó függvény vizsgálata normális eloszlás esetén

Tegyük fel, hogy az (A, b) véletlen mátrix sorai független normális eloszlású vektorok. Akkor

$$F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m F_i(\mathbf{x}), \quad F_i(\mathbf{x}) = P(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i), \quad i = 1, \dots, m$$

itt \mathbf{a}_i — az A mátrix sora, b_i — a b vektor eleme.

Tudjuk, hogy logkonkáv és H -konkáv¹ függvények szorzási műveletre vonatkozóan zárt osztályt alkotnak. Ezért a továbbiakban az $F_i(\mathbf{x})$ függvény konkávitási tulajdonságait vizsgáljuk, annál is inkább, mert e problémának önálló jelentősége van. Például a célfüggvény vagy a korlátozó függvény a soronkénti valószínűségi korlátokban lehet ilyen alakú. Bár kvázikonkávításuk megállapítása könnyű (mint kvázikonkáv függvények monoton transzformációja), technikai (a megoldási algoritmusok alkalmazására vonatkozó) megfontolások miatt gyakran erősebb konkávitási tulajdonságuk kívánatos.

Amíg az

$$(2.1) \quad F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b)$$

szorzandó elemzése folyik, mellőzzük az i sorindexet. Az eredmények a H -konkávításra, mint a leggyengébb követelésre vonatkoznak, de egyszerű módosításokkal a konkávitásra, illetve logkonkávításra is átvihetők. Természetesen a korlátozó függvény (általánosított) konkávitási tartománya akkor szűkebb lesz.

Tegyük fel egyelőre, hogy a b valószínűségi változó független az a véletlen vektortól. Akkor

$$F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b) = P\left(\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{x} - b + \mu - \mathbf{m}^T \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sigma^2}} \leq \frac{\mu - \mathbf{m}^T \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sigma^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - \mathbf{m}^T \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sigma^2}}\right),$$

itt

$$\mathbf{m} = E\mathbf{a}, \quad \mu = Eb, \quad \mathbf{Q} = E(\mathbf{a} - \mathbf{m})(\mathbf{a} - \mathbf{m})^T, \quad \sigma^2 = D(b),$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Rövidítés céljából vezessük be a következő jelöléseket:

$$l = \mu - \mathbf{m}^T \mathbf{x}, \quad s^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}, \quad z = \frac{l}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}}, \quad h(z) = z^2 + 2z \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)}.$$

Továbbiakban mindenütt a z (ezzel együtt az l) nemnegativitását a $p \cong \frac{1}{2}$ természetes feltétel biztosítja, mivel

$$\Phi(z) = P(\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b) \cong p \cong \frac{1}{2} \Rightarrow z \cong 0.$$

¹ Az $F \geq 0$ függvényt H -konkávnak nevezzük a C konvex halmazon, ha minden $x, y \in C$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetében teljesül $F(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \left(\frac{\lambda}{F(x)} + \frac{1-\lambda}{F(y)}\right)^{-1}$. Érvényes a logkonkáv $\Rightarrow H$ -konkáv \Rightarrow kvázikonkáv implikáció [3].

1. LEMMA. Ha $z \geq 0$, akkor a $h(z)$ függvény monoton növekvő.

Bizonyítás. Ellenőrizzük a $h(z)$ deriváltjának pozitívását:

$$h'(z) = 2z + 2 \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)} - 2z \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)} \left(z + \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)} \right) = 2 \frac{z\Phi(z) + \varphi(z)}{\Phi^2(z)} (\Phi(z) - z\varphi(z)).$$

Most csak azt kell bizonyítanunk, hogy a második szorzandó pozitív:

$$\begin{aligned} \Phi(z) - z\varphi(z) &= \int_{-\infty}^z \varphi(t) dt - z\varphi(z) = \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt + \int_0^z \varphi(t) dt - \int_0^z \varphi(z) dt = \\ &= \Phi(0) + \int_0^z (\varphi(t) - \varphi(z)) dt > 0, \end{aligned}$$

mivel

$$\varphi(t) \geq \varphi(z), \quad t \in [0, z].$$

2. LEMMA. Az $f(l, s) = \Phi(z)$ függvény H -konkáv, ha

$$(2.2) \quad h(z) \geq \frac{s^2}{\sigma^2}.$$

Bizonyítás. Tudjuk ([1]), hogy kétszer differenciálható függvény H -konkavitási feltétele a függvény

$$H\left(f, \frac{2}{f}\right) = \nabla^2 f - \frac{2}{f} \nabla f (\nabla f)^T$$

bővített Hessianja negatív szemidefinit volta. Bizonyosodjunk meg, hogy akkor elegendő a z függvény vizsgálata. Valóban,

$$\nabla f = \nabla z \varphi(z), \quad \nabla^2 f = (\nabla^2 z - z \nabla z (\nabla z)^T) \varphi(z),$$

$$H\left(f, \frac{2}{f}\right) = \nabla^2 f - \frac{2}{f} \nabla f (\nabla f)^T = \left(\nabla^2 z - \frac{1}{z} h(z) \nabla z (\nabla z)^T \right) \varphi(z).$$

Mivel $\varphi(z)$ pozitív, a $H\left(z, \frac{h(z)}{z}\right)$ mátrix negatív szemidefinit voltát kell bebizonyítanunk. Számítsuk ki a függvény deriváltjait:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{zs}{s^2 + \sigma^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial l^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial l} = -\frac{s}{(\sqrt{s^2 + \sigma^2})^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{z}{(s^2 + \sigma^2)^2} (2s^2 - \sigma^2).$$

Nyilvánvalóan a $H\left(z, \frac{h(z)}{z}\right)$ mátrix (1,1)-es eleme nempozitív, a (2,2)-esre pedig a

következő becslés érvényes

$$\begin{aligned} & \frac{z}{(s^2 + \sigma^2)^2} (2s^2 - \sigma^2) - h(z) \frac{zs^2}{(s^2 + \sigma^2)^2} \cong \\ & \cong \frac{z}{(s^2 + \sigma^2)^2} \left(2s^2 - \sigma^2 - \frac{s^4}{\sigma^2} \right) = \frac{-z}{\sigma^2 (s^2 + \sigma^2)^2} (s^2 - \sigma^2)^2 \end{aligned}$$

tehát, szintén nempozitív (az egyenlőtlenség a (2.2) feltételből adódik). A determináns kiszámítására a [10, Prop. 10] képletet használjuk fel:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{H} &= \det(\nabla^2 z) + \frac{h(z)}{z} \det \begin{pmatrix} 0 & (\nabla z)^T \\ (\nabla z) & \nabla^2 z \end{pmatrix} = \\ &= - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial l} \right)^2 + \frac{h(z)}{z} \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial l} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial l} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{(s^2 + \sigma^2)^3} \left(h(z) - \frac{s^2}{\sigma^2} \right) \cong 0, \end{aligned}$$

tehát $\mathbf{H} \left(z, \frac{h(z)}{z} \right)$ mátrix negatív szemidefinit, ezért

$$\mathbf{H} \left(f, \frac{2}{f} \right) = \varphi(z) \cdot \mathbf{H} \left(z, \frac{h(z)}{z} \right)$$

szintén negatív szemidefinit, mivel $\varphi(z) > 0$.

A bizonyítás befejezésül megjegyezzük, hogy az

$$\left\{ (l, s): h(z) \cong \frac{s^2}{\sigma^2} \right\}$$

halmaz konvex. Ez a z függvény kvázikonkavitásából és az 1. lemmából adódik.

A következő tételekben a fenti észrevételeket az $F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b)$ korlátozó függvény H -konkavitási halmazának meghatározására használjuk fel.

Legyen $\hat{\mathbf{M}}$ és $\hat{\mathbf{Q}}$ a következő két $(n+1) \times (n+1)$ -es mátrix:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}\mathbf{m}^T & -\mu\mathbf{m} \\ -\mu\mathbf{m}^T & \mu^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Definíció. Az \mathbf{A} mátrix kopozitív, ha $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ teljesül minden $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ esetén.

1. TÉTEL. Ha létezik olyan α pozitív szám, hogy az $\hat{\mathbf{M}} - \alpha^2 \hat{\mathbf{Q}}$ mátrix kopozitív, akkor a (2.1) függvény H -konkáv az $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq \gamma \delta^2\}$ halmazon, ahol $\gamma = h(\alpha)$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n, 1)^T$. Természetesen, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. A kopozitivitási feltételből a

$$0 \leq \mathbf{y}^T (\hat{\mathbf{M}} - \alpha^2 \hat{\mathbf{Q}}) \mathbf{y} = (\mu - \mathbf{m}^T \mathbf{x})^2 - \alpha^2 (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sigma^2)$$

egyenlőtlenség adódik, ebből pedig $z \geq \alpha$ következik. A $h(z)$ függvény monotonitása miatt $g(z) \geq \gamma$, és teljesülnek a 2. lemma feltételei, ha $\frac{s^2}{\sigma^2} \leq \gamma$. Tehát az $f(l, s)$

függvény H -konkáv az $\{l \geq 0, s^2 \leq \gamma \sigma^2\}$ halmazon. Vizsgáljuk meg az $f(l, s)$ függvény monotonitását:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}} \varphi \left(\frac{l}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}} \right) > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{ls}{(\sqrt{s^2 + \sigma^2})^3} \varphi \left(\frac{l}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}} \right) \leq 0.$$

Összefoglalva: az $f(l, s)$ függvény l -növekvő, s -csökkenő, az $l(\mathbf{x}) = \mu - \mathbf{m}^T \mathbf{x}$ függvény lineáris nemnegatív, az $s(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}$ pedig konvex. Teljesülnek az [1]. 3. tétel feltételei, ezért az $F(\mathbf{x}) = f(l(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$ kompozíció H -konkáv az $\{\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq \gamma \sigma^2\}$ halmazon.

Előfordulhat, hogy az $F(\mathbf{x})$ függvény H -konkavitási halmazának meghatározása a kovariancia kifejezésekben nem kívánatos (például a \mathbf{Q} mátrix olyan, hogy az $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \gamma \sigma^2$ hiperellipszoid szivar alakú). Akkor ugyanezt a várható értékek segítségével tehetjük meg.

2. TÉTEL: Ha létezik $\alpha > 0$ olyan, hogy az $\hat{\mathbf{M}} - \alpha^2 \hat{\mathbf{Q}}$ mátrix kopozitív, akkor a (2.1) függvény H -konkáv az $\{\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{m}^T \mathbf{x} \leq \mu - \delta\}$ halmazon. Itt $\delta = \alpha \sigma \sqrt{\gamma + 1}$.

Bizonyítás. Azonos módon folyik, mint az 1. tételé, csak a 2. lemma (2.2) feltétele kicserélendő következőképpen:

$$h(z) \geq \frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{s^2 + \sigma^2}{\sigma^2} - 1 = \frac{l^2}{z^2 \sigma^2} - 1,$$

$$z^2(h(z) + 1) \geq \frac{l^2}{\sigma^2}.$$

Nyilvánvalóan a $h(z)$ függvény monotonitásából a $z^2(h(z) + 1)$ függvény monotonitása is adódik.

Megjegyzések. 1. A kopozitivitás megállapítására véges lépésű tesztek léteznek [2], amelyekhez a *Silvester-féle kritériumhoz* hasonlóan ki kell számítani bizonyos determinánsokat. Adott a véletlen vektor és b véletlen változó esetében meg kell találni azt a maximális α -t, hogy az $\hat{\mathbf{M}} - \alpha \hat{\mathbf{Q}}$ mátrix kopozitív legyen, és minél nagyobb ez az α , annál bővebb az $F(\mathbf{x})$ függvény H -konkavitási tartománya.

2. Gyakorlat szempontjából a kopozitivitás követelése eléggé természetesnek tűnik: tulajdonképpen arról van szó, hogy a várható értékek egy bizonyos módon majorálják a szórásokat.

3. A tételek logkonkavitás, illetve konkavitás esetére is átfogalmazhatók, csak akkor $h(z) = z^2 + z \frac{\varphi(z)}{\Phi(z)}$, illetve $h(z) = z^2$. Az $F(\mathbf{x})$ függvény (log)konkavitási halmaza természetesen szűkebb lesz.

4. Az $F(\mathbf{x})$ függvény elsősorban mint korlátozó függvény érdekel bennünket, tehát csak az $F(\mathbf{x}) = p$ szint felett vizsgáljuk. Az eloszlásfüggvény monotonitása miatt az $F(\mathbf{x}) \geq p$ viszony a $z(\mathbf{x}) \geq \Phi^{-1}(p)$ -vel ekvivalens. Az utóbbi feltétel a konkavitási halmaz nagyságát meghatározó γ kiválasztásában a következő eljárást

teszi lehetővé. Legyen $\alpha^* = \max \{\alpha \geq 0, \hat{M} - \alpha^2 \hat{Q} \text{ mátrix kopozitív}\}$, ekkor $\gamma = h(\max \{\alpha^*, \Phi^{-1}(p)\})$.

5. Eddig feltételeztük, hogy a b valószínűségi változó független az a véletlen vektortól. E feltétel nélkül csak az $a^T x - b$ szórása változik. Nevezetesen

$$D^2(a^T x - b) = x^T Q x - 2q^T x + \sigma^2,$$

ahol

$$q = (q_1, \dots, q_n)^T, \quad q_i = E(a_i - m_i)(b - \mu), \quad i = 1, \dots, n.$$

Átalakíthatjuk ezt a kifejezést:

$$x^T Q x - 2q^T x + \sigma^2 = (x - Q^{-1}q)^T Q (x - Q^{-1}q) + \sigma^2 - q^T Q^{-1}q,$$

és megismételhetjük a vizsgálatot az $s^2 = (x - Q^{-1}q)^T Q (x - Q^{-1}q)$ függvénnyel.

6. Abban az esetben, amikor $\mu = 0$, az $\hat{M} - \alpha^2 \hat{Q}$ mátrix kopozitivitását nem lehet elérni semmilyen $\alpha > 0$ mellett, mivel a korlátozó függvény (általánosított) konkávitási halmazának meghatározásában szereplő σ pozitivitása lényeges. Ekkor érvényes a következő állítás:

3. TÉTEL. Ha $\mu = 0$ és létezik olyan $\alpha > 1$, hogy az $m m^T - \alpha Q$ mátrix kopozitív, akkor a (2.1) függvény konkáv az

$$\{x \geq 0, x^T Q x \leq \sigma^2(\alpha - 1)\}$$

halmazon.

Bizonyítás. Konkávitás esetére a 2. lemma (2.2) feltétele helyettesítendő a

$$z^2 \geq \frac{s^2}{\sigma^2}$$

feltétellel, amely ekvivalens a

$$\sigma^2 l^2 - s^4 - s^2 \sigma^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséggel, az utóbbit pedig az

$$\begin{cases} l^2 - \alpha s^2 \geq 0 \\ s^2 \leq \sigma^2(\alpha - 1) \end{cases}$$

két feltétel biztosítja. Egyébként az 1. tétel bizonyításának útja ismételendő.

Az előző három tételben a probléma kiinduló adatai a korlátozó függvény (általánosított) konkávitási halmazának nagyságát határozzák meg. Ha ezt figyelmen kívül hagyjuk, a konkávitási halmaz a következő módon írható le:

4. TÉTEL. Tetszőleges $\alpha > 0$ esetében a (2.1) függvény konkáv az

$$\left\{x: m^T x \leq \mu - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sigma}\right\} \cap \left\{x: x^T Q x \leq \sqrt{\frac{\sigma^4}{4} + \alpha} - \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

halmazon.

Bizonyítás. Azonos módon folyik, mint az előző tételeké. Megjegyezzük, hogy a konkávitás esetéhez szükséges

$$\sigma^2 l^2 - s^4 - s^2 \sigma^2 \geq 0$$

feltételt az

$$\begin{cases} l^2 \equiv \frac{\alpha}{\sigma^2} \\ s^2 \equiv \sqrt{\frac{\sigma^4}{4} + \alpha} - \frac{\sigma^2}{2} \end{cases}$$

feltételek biztosítják.

A 1—4. tételek az (1.3) együttes valószínűségi korlátozó függvényre is könnyen átfogalmazhatók, mivel H -konkáv függvények szorzata H -konkáv, (log)konkáv pedig logkonkáv. Az (1.3) függvény általánosított konkávitási halmaza akkor is megfelelő halmazok metszete lesz.

Bár az 1—3. tételek alapján az (1.3) halmaz eléggé jó konvex megközelítést adhatjuk, sőt a feladat kiinduló pontul szolgáló adataitól függően maga a halmaz is lehet konvex, kíváncsún lenné a következő feltételhez kötöttségeket eltörölni.

Először is, a $\sigma > 0$ feltétel lényeges, és a σ nagysága jelentősen befolyásolja a konvex megközelítés pontosságát. Másfelől már megjegyeztük, hogy a p szint emelésével jobb konvex megközelítést kaphatunk, de akkor arra kell vigyázni, hogy az $\{\mathbf{x} \geq 0, P(\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}) \geq p\}$ halmaz ne maradjon üres, mivel $\sigma > 0$ meghatározza a $z(\mathbf{x})$ függvény korlátosságát. És végül, nem lehetne-e az (\mathbf{A}, \mathbf{b}) normális eloszlású mátrix *tetszőleges* paramétereire megmondani, hogy az $\{\mathbf{x} \geq 0, P(\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}) \geq p\}$ halmaz mikor konvex (akár magas p szint követelésével, mivel több irányítható paraméter nem áll rendelkezésünkre). Erre igenlő választ tudunk adni.

5. TÉTEL. Tegyük fel, hogy az (\mathbf{A}, \mathbf{b}) mátrix sorai független normális eloszlású vektorok és az \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, m$ vektorok nem elfajulóak. Ekkor létezik olyan p_0 , hogy az $F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b})$ függvény H -konkáv, ha $F(\mathbf{x}) \geq p_0$. A minimális p_0 értéke az \mathbf{A} normális mátrix paramétereivel határozható meg és független a \mathbf{b} vektortól.

Bizonyítás. Mint tudjuk már, elegendő az

$$F_i(\mathbf{x}) = \Phi \left(\frac{\mu_i - \mathbf{m}_i^T \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x} - 2\mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + \sigma_i^2}} \right), \quad i = 1, \dots, m$$

függvények H -konkávitása, ehelyett pedig a

$$z_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_i - \mathbf{m}_i^T \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x} - 2\mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + \sigma_i^2}}, \quad i = 1, \dots, m$$

függvényeket vizsgálhatjuk. Számítsuk ki a $\mathbf{H} \left(z_i, \frac{h(z_i)}{z_i} \right)$ bővített Hessianját. Rövidítés céljából használjuk a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1}{\mu_i - \mathbf{m}_i^T \mathbf{x}} \cdot \mathbf{m}_i, & v_i &= \frac{1}{\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x} - 2\mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + \sigma_i^2} \cdot (\mathbf{Q}_i \mathbf{x} - \mathbf{q}_i) \\ \beta_i &= \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x} - 2\mathbf{q}_i^T \mathbf{x} + \sigma_i^2, & i &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Akkor

$$\begin{aligned}\nabla z_i &= z_i(-\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i), \quad \nabla^2 z_i = z_i(-\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i)(-\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i)^T + z_i \left(-\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T - \frac{\mathbf{Q}_i}{\beta_i} + 2\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \right) \\ \mathbf{H} \left(z_i, \frac{h(z_i)}{z_i} \right) &= \nabla^2 z_i - \frac{h(z_i)}{z_i} \nabla z_i (\nabla z_i)^T = \\ &= z_i \left(\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T + 3\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T - \frac{\mathbf{Q}_i}{\beta_i} - h(z_i)(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T + \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T + \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) \right) = \\ &= -z_i \left(h(z_i) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T + (h(z_i) - 1)(\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T) + (h(z_i) - 3)\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T + \frac{\mathbf{Q}_i}{\beta_i} \right), \quad i = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Mivel $z_i \geq 0$, meg kell vizsgálnunk, hogy a külső zárójelek között levő mátrix mikor pozitív szemidefinit. Ennek érdekében válasszuk ki az $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ vektorok szerinti „teljes négyzetet”.

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \left(z_i, \frac{h(z_i)}{z_i} \right) &= -z_i \left((h(z_i) - 3) \left(\mathbf{v}_i + \frac{h(z_i) - 1}{h(z_i) - 3} \mathbf{u}_i \right) \left(\mathbf{v}_i + \frac{h(z_i) - 1}{h(z_i) - 3} \mathbf{u}_i \right)^T + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{Q}_i}{\beta_i} - \frac{h(z_i) + 1}{h(z_i) - 3} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right), \quad i = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $h(z_i) > 3$, $i = 1, \dots, m$. Ekkor a külső zárójelek közötti első összeadandó mátrix nyilvánvalóan pozitív szemidefinit. A maradék összeadandó mátrixot pedig, figyelembe véve az \mathbf{u}_i és β_i jelentését, a következő módon alakíthatjuk át:

$$\frac{\mathbf{Q}_i}{\beta_i} - \frac{h(z_i) + 1}{h(z_i) - 3} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T = \frac{1}{\beta_i} \left(\mathbf{Q}_i - \frac{h(z_i) + 1}{z_i^2(h(z_i) - 3)} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T \right), \quad i = 1, \dots, m.$$

A cél eléréséhez csak az utóbbi mátrix pozitív szemidefinit volta szükséges. Vezessük be a következő jelölést:

$$d(z) = \frac{h(z) + 1}{z^2(h(z) - 3)}.$$

Ez a függvény monoton csökkenő, mivel

$$d'(z) = d(z) \left(\frac{h'(z)}{h(z) + 1} - \frac{2}{z} - \frac{h'(z)}{h(z) - 3} \right) = 2d(z) \left(-\frac{h'(z)}{(h(z) + 1)(h(z) - 3)} - \frac{1}{z} \right) < 0.$$

Itt felhasználtuk a $h(z) > 3$ feltételt, valamint azt, hogy a $h(z)$ függvény monoton növekvő. Továbbá megállapíthatjuk, hogy

$$\lim_{z \rightarrow \infty} d(z) = 0, \quad \text{mivel} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \infty.$$

A \mathbf{Q}_i , $i = 1, \dots, m$ mátrixok pozitív definiték, ezért mindig lehet találni olyan α_i -t, hogy a

$$(2.3) \quad \mathbf{Q}_i - \alpha_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T$$

mátrix pozitív szemidefinit legyen. Valóban, a [10, Prop. 10] képlet alapján, tetszőlegesen választva az oszlopok és sorok I indexhalmazát,

$$(2.4) \quad \det(\mathbf{Q}_i - \alpha \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T)_I = \det(\mathbf{Q}_i)_I + \alpha_i \det \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m}_i^T \\ \mathbf{m}_i & \mathbf{Q}_i \end{pmatrix}_I.$$

Tetszőleges $I \subset \{1, \dots, n\}$ esetében $\det(\mathbf{Q}_i)_I > 0$, és létezik $\alpha_i > 0$, amelyre a (2.4) kifejezés nemnegatív. Legyen

$$\bar{\alpha}_i = \max\{\alpha_i > 0, \det(\mathbf{Q}_i - \alpha_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T)_I \geq 0, \forall I \subset \{1, \dots, n\}\}$$

(ehhez csak véges számú determináns kiszámítása szükséges), és

$$\bar{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq m} \{\bar{\alpha}_i\}.$$

Abból, hogy a $d(z)$ függvény monoton csökkenő, valamint $\lim_{z \rightarrow 0} d(z) = 0$, következik, hogy a

$$z_i \geq d^{-1}(\bar{\alpha}), \quad i = 1, \dots, m$$

feltétel biztosítja (2.3) mátrixok pozitív szemidefinit voltát, tehát egyben az $F_i(\mathbf{x})$ függvények H -konkavitását is. Figyelembe véve azt, hogy a $h(z_i) > 3$ feltétel eleve biztosított az $\alpha_i > 0$ feltétellel, összefoglalhatjuk az eredményeket. Legyen

$$p_0 = \Phi(d^{-1}(\bar{\alpha})).$$

Ha $p \geq p_0$, akkor az $F(\mathbf{x}) \geq p$ feltételből a

$$\Phi(z_i) \geq \prod_{i=1}^m \Phi(z_i) = F(\mathbf{x}) \geq p, \quad i = 1, \dots, m$$

összefüggés következik, ebből pedig a

$$z_i(\mathbf{x}) \geq \Phi^{-1}(p) \geq \Phi^{-1}(p_0) = d^{-1}(\bar{\alpha}), \quad i = 1, \dots, m,$$

ami az $F_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$ függvények, egyben az $F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b})$ függvény H -konkavitását biztosítja. Jegyezzük meg, hogy nem csak bizonyítottuk azt, hogy egy bizonyos szint felett az $F(\mathbf{x})$ függvény H -konkáv, hanem a bizonyítás során megkaptuk ennek a minimális szintnek a konstrukcióját is.

3. Normálistól különböző stabilis eloszlás esete

A tetszőleges stabilis eloszlás esetében a normális esetben használt módszerek alkalmazása már sokkal bonyolultabb feladat, mivel a vizsgálat során alapvető szerepet játszott az eloszlásfüggvény pontos alakja. Amikor stabilis eloszlás karakterisztikus paramétere nagyobb mint egy és kisebb mint kettő, az eloszlásfüggvény ismétetének hiánya nehezíti a konstruktív eredmények elérését. Ennek ellenére közvetett módon, kihasználva a stabilis valószínűségi változók tulajdonságait, a normális esetre hasonló állításokat bizonyíthatunk. Itt nem ismételjük az egész vizsgálatot, az egyszerűség kedvéért csak a korlátozó függvény konkavitását mutatjuk meg.

Legyenek a_1, \dots, a_n, b független szimmetrikus stabilis valószínűségi változók azonos karakterisztikus α paraméterrel és legyenek

$$G_\alpha(z, m_i, s_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad G_\alpha(z, \mu, \sigma)$$

az $a_i, i = 1, \dots, n$, illetve b eloszlásfüggvénye, itt m_i, μ az elhelyezkedési paraméterek (várható értékek, ha $\alpha > 1$) és s_i, σ a skálaparaméterek. Tudjuk [4], hogy akkor az $a^T x - b$ lineáris kombináció eloszlásfüggvénye szintén

$$G_\alpha(z, m, s)$$

és az elhelyezkedési, valamint skálaparaméterei következőképpen számíthatók ki:

$$m = \sum m_i x_i - \mu, \quad s = \sum_{i=1}^m s_i x_i^2 + \sigma.$$

Legyen $G_\alpha(z)$ a standard szimmetrikus stabilis valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, azaz

$$G_\alpha(z) = G_\alpha(z, 0, 1).$$

Minden ζ stabilis változó egy lineáris transzformáció segítségével standardizálható:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{s}} (\zeta - m),$$

itt m és s a ζ változó elhelyezkedési, illetve skálaparamétere. Ekkor

$$\begin{aligned} F(x) &= P\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\right) = P\left(\frac{\sum a_i x_i - b - \sum m_i x_i + \mu}{(\sum s_i x_i^2 + \sigma)^{1/\alpha}} \leq \frac{\mu - \sum m_i x_i}{(\sum s_i x_i^2 + \sigma)^{1/\alpha}}\right) = \\ &= G_\alpha\left(\frac{\mu - \sum m_i x_i}{(\sum s_i x_i^2 + \sigma)^{1/\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Látjuk, hogy az $F(x)$ függvény a $G_\alpha(z)$ standard szimmetrikus stabilis eloszlásfüggvény és a

$$z(x) = \frac{\mu - \sum m_i x_i}{(\sum s_i x_i^2 + \sigma)^{1/\alpha}}$$

függvény kompozíciójával írható fel. A következő észrevétel megmagyarázhatja a módszer kiválasztását: G_z függvény a konkávitás szempontjából „eléggé jó”, a z függvénynek pedig konkávitás „hiánya” van. Ezért egy mesterséges kompozíciót képzeljünk el:

$$F(x) = G_\alpha(h^{-1}(h(z(x))))$$

ahol $h(z(x))$ már konkáv függvény. A logaritmus függvény játszhatja a h függvény szerepét. A következő segédállításokra lesz szükségünk:

3. LEMMA. A $z(l, s) = \frac{l}{(s^\alpha + \sigma^\alpha)^{1/\alpha}}$ függvény logkonkáv, ha $s^\alpha \leq \sigma^\alpha(\alpha - 1)$, $l \geq 0$ és $\alpha > 1$.

Bizonyítás. Elemezzük az $\ln z$ függvény *Hessianját*:

$$\frac{\partial \ln z}{\partial l} = \frac{1}{l}, \quad \frac{\partial \ln z}{\partial s} = -\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \sigma^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln z}{\partial l^2} = -\frac{1}{l^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln z}{\partial l \partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln z}{\partial s^2} = -\frac{s^{\alpha-2}(\sigma^{\alpha}(\alpha-1) - s^{\alpha})}{(s^{\alpha} + \sigma^{\alpha})^2}$$

(ehát, a lemma feltételei mellett az $\ln(z)$ függvény *Hessianjának* (1.1)-es eleme negatív, t2.2)-es pedig nempozitív és $\det(\nabla^2 \ln(z))$ nempozitív.

Az eloszlásra vonatkozó kívánt tulajdonságok megmutatására használjuk fel z aszimptotikáját. Tudjuk [5], hogy $\alpha < 2$ esetében a $g_{\alpha}(z)$ stabilis sűrűségfüggvényre érvényes a következő állítás:

$$(3.1) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g_{\alpha}(z)}{\frac{1}{z} \alpha + 1} = C.$$

4. LEMMA. Létezik olyan z_0 , hogy $g_{\alpha}(z) + z g'_{\alpha}(z) \leq 0$, ha $z \geq z_0$.

Bizonyítás. A (3.1) összefüggésből megkaphatjuk a

$$(3.2) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g'_{\alpha}(z)}{-\frac{\alpha+1}{z^{\alpha+2}}} = C$$

állítást is (*L'Hospital szabály* alkalmazásával). Ekkor a (3.1), (3.2)-ből

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z_1 \text{ olyan, hogy } \left| g_{\alpha}(z) - \frac{c}{z^{\alpha+1}} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall z \geq z_1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z_2 \text{ olyan, hogy } \left| g'_{\alpha}(z) + \frac{(\alpha+1)c}{z^{\alpha+2}} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall z \geq z_2.$$

Ha $z \geq \max(z_1, z_2)$, akkor

$$g_{\alpha}(z) + z g'_{\alpha}(z) \leq \frac{c}{z^{\alpha+1}} + \varepsilon + z \left(-\frac{(\alpha+1)c}{z^{\alpha+2}} - \varepsilon \right) = -\frac{\alpha c}{z^{\alpha+1}} + \varepsilon(1-z) < 0, \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Megjegyzés. Bár a z_0 -nak csak a létezését bizonyítottuk, minden bizonyossággal tudhatjuk a nagyságát is. A numerikus elemzés azt mutatja, hogy ha α növekszik egytől kettőig, $z_0(\alpha)$ növekszik (monoton módon) egytől $\sqrt{2}$ -ig. A két határeset a sűrűségfüggvény ismeretében kiszámítható.

6. TÉTEL. Legyenek a_1, \dots, a_n, b független stabilis eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy az α karakterisztikus paraméterük nagyobb, mint egy. Legyen

$$G_{\alpha}(z, m_i, s_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{illetve} \quad G_{\alpha}(z, \mu, \sigma),$$

az a_i , $i=1, \dots, n$, illetve b eloszlásfüggvénye. Ekkor létezik olyan p_0 , hogy ha $p \geq p_0$, akkor az $F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b)$ függvény konkáv az

$$\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{x}) \geq p\} \cap \left\{ \left(\sum_{i=1}^n s_i x_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq \sigma(\alpha-1)^{1/\alpha} \right\}$$

halmazon.

Bizonyítás. Ha $G_\alpha(z)$ standard stabilis eloszlásfüggvény, akkor a korábbiakhoz hasonlóan az $F(\mathbf{x})$ függvény kompozíciós alakban írható fel. Legyen

$$f(l, s) = G_\alpha(z(l, s)),$$

$$z(l, s) = \frac{l}{(s^\alpha + \sigma^\alpha)^{1/\alpha}}, \quad l(\mathbf{x}) = \mu - \mathbf{m}^T \mathbf{x}, \quad s(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n s_i x_i^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

Az $l(\mathbf{x})$ függvény lineáris, az $s(\mathbf{x})$ konvex, ha $\alpha > 1$ (*Minkowski egyenlőtlenség* következménye) és

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial l} g_\alpha(z) > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s} g_\alpha(z) < 0,$$

tehát az $f(l, s)$ függvény l -növekvő és s -csökkenő. Akkor az

$$F(\mathbf{x}) = f(l(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$$

kompozíció konkávitásához az $f(l, s)$ függvény konkávitása kell. Ezt most megmutatjuk:

$$\nabla f = \nabla G_\alpha(z) = \nabla z g_\alpha(z)$$

$$\nabla^2 f = \nabla^2 z g_\alpha(z) + g'_\alpha(z) \nabla z (\nabla z)^T = g_\alpha(z) \left(\nabla^2 z + \frac{g'_\alpha(z)}{g_\alpha(z)} \nabla z (\nabla z)^T \right).$$

A lemmából tudjuk, hogy $\ln(z)$ függvény konkáv, tehát a $\nabla^2 z - z \nabla z (\nabla z)^T$ mátrix negatív szemidefinit, ha $s^\alpha \leq \sigma^\alpha(\alpha-1)$, a lemma alapján pedig létezik z_0 olyan, hogy $\frac{g'_\alpha(z)}{g_\alpha(z)} \leq -z$, ha $z \geq z_0$. Ezt egybevéve látjuk, hogy a

$$\nabla^2 z + \frac{g'_\alpha(z)}{g_\alpha(z)} \nabla z (\nabla z)^T$$

mátrix negatív szemidefinit, ha $z \geq z_0$, $\alpha > 1$ és $s^\alpha \leq \sigma^\alpha(\alpha-1)$, ami egyben biztosítja az $f(l, s)$ függvény konkávitását. Legyen $p_0 = G_\alpha(z_0)$, és megkapjuk a tétel állítását.

Megjegyzés. Az eloszlás-, illetve sűrűségfüggvény pontos alakjának hiánya ellenére számítási célokra használhatók a konvergáló sorfejtések:

$$g_{\alpha}(z) = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right)}{(2k)!} z^{2k}$$

$$G_{\alpha}(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma\left(\frac{2k-1}{\alpha}\right)}{(2k-1)!} z^{2k-1}.$$

IRODALOM

- [1] BURKAUSKAS, A., „Általánosított konkávitásról és a sztochasztikus programozásban való alkalmazásról” (oroszul) *Lit. Inf. Int. Közleményei*, № 13 75—85 (1985).
- [2] COTTLE, R. W., HABETLER, G. J., LEMKE, C. E., “On classes of copositive matrices”, *Lin. Alg. Appl.* 3 (1970) 295—310.
- [3] DAS, C., “Generalized convexity and optimization problems”, *Mat. Vesztnik* 5 (18) (1981) 349—359.
- [4] FAMA, E. F., “Portfolio analysis in a stable peration market”, *Man. Sci.* (1963) 11 (34—105).
- [5] FELLER, W., *Introductions to probability theory and its applications*, II., 1966.
- [6] KALL, P., *Stochastic linear programming*, 1976.
- [7] PRÉKOPA, A., “Logarithmic concave measures with applications to stochastic programming”, *Acta Sci. Math.* (1971) 32 301—316.
- [8] PRÉKOPA, A., “On logarithmic concave measures and functions”, *Acta Sci. Math.* (1973) 34 335—343.
- [9] PRÉKOPA, A., “Programming under probabilistic constraints with random technology matrix”, *Math. Op. Stat.*, (1974) 5 109—116.
- [10] SCHAIBLE, S., “Second order conditions on pseudoconvexity”, *Math. Progr.* (1978) 14 170—185.

(Beérkezett: 1985. szeptember 11.)

A. BURKAUSKAS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U. 18.

О ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОСТИ В МОДЕЛЯХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАМИРОВАНИЯ С ВЕРОЯТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. Буркаускас

Исследована область вероятностных ограничений задач линейного стохастического программирования, когда технологическая матрица и вектор ресурсов случайны. В случае нормального их распределения показано, что критерием выпуклости может быть относительная величина параметров расположения и параметров рассеивания, и, что область ограничений можно приблизить «хорошими» выпуклыми множествами (многогранниками и эллипсоидами). Показано также, что повышая уровень надежности, можно свести задачу к выпуклой. Минимальный уровень, как и выпуклое приближение, задается конструктивно, через численные характеристики случайных величин.

Эти результаты обобщаются и на класс устойчивых распределений с характеристическим показателем между единицей и двумя.

MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK PARCIÁLIS ASZIMPTOTIKUS BECSLÉSEI

KERTÉSZ VIKTOR

Budapest

Az $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$; $f(t, 0, 0) = 0$; $y \in \mathbb{R}$ differenciálegyenlet zérus egyensúlyi helyzetének stabilitás vizsgálatakor általában a $\sqrt{y^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ kifejezés aszimptotikus viselkedését vizsgálják, ahol $y(t)$ a differenciálegyenlet megoldása. Jelen munka célja ezzel szemben, hogy $|y(t)|$, illetve $|\dot{y}(t)|$ zérushoz tartásának feltételeit egymástól függetlenül kutassuk, olyan esetekben is, amikor az origó nem egyensúlyi helyzet. E célra speciális módszereket dolgozunk ki.

1. Bevezetés

Vizsgálatunk tárgya az

$$(1.1) \quad \ddot{y} + p(t, y, \dot{y})\dot{y} + q(t, y, \dot{y})y = f(t, y, \dot{y})$$

differenciálegyenlet, ahol

$$(1.2) \quad \begin{cases} (i) \ p, q \text{ és } f \text{ folytonos } I \times \mathbb{R}^2 - en; \ I = (t_0, \infty); \\ (ii) \text{ bármely } (s, y_0, \dot{y}_0) \in I \times \mathbb{R}^2 \text{ kezdeti értékű } y(t, s, y_0, \dot{y}_0) \text{ (vagy röviden : } y(t)) \\ \text{megoldás értelmezett minden } s \leq t\text{-re.} \end{cases}$$

Aszimptotikus (felső) becsléseket fogunk keresni $|y(t)|$ -re, illetve $|\dot{y}(t)|$ -re. Ezeket a becsléseket *parciálisaknak* nevezzük, szemben az általában külön jelző nélkül illetett, $\sqrt{y^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ -re vonatkozó aszimptotikus becslésekre. Az egyértelműség érdekében az utóbbi becsléseket *teljeseknek* fogjuk nevezni. Minket a *zérushoz tartás* feltételei (vagyis a *parciális stabilitás* problémái [5, 6] érdekelnek. A lehetséges esetek változatosságának bemutatására egy példát közlünk.

1.1. Példa. Az

$$(1.3) \quad \ddot{y} + \frac{1 - \alpha - 2\beta}{t} \dot{y} + \left(\alpha^2 t^{2\alpha - 2} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{t^2} \right) y = 0$$

differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása

$$(1.4) \quad \begin{cases} y_1 = t^\beta \sin t^\alpha & \text{és} & y_2 = t^\beta \cos t^\alpha, & \text{ha } \alpha \neq 0 \\ \text{illetve} \\ y_1 = t^\beta & & \text{és} & y_2 = t^\beta \ln t, & \text{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

(α és β tetszőleges konstansok).

- Legyen $y(t)$ valamely nem triviális megoldás.
- Ha $\beta > 0$, akkor $y(t)$ nem korlátos.
 - Ha $\beta = 0$, és $\alpha \neq 0$ akkor $y(t)$ korlátos és $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ nem létezik.
 - Ha $\beta < 0$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.
 - Ha $\beta - 1$ vagy $\alpha + \beta - 1$ pozitív, akkor $\dot{y}(t)$ nem korlátos.
 - Ha $\beta - 1$ és $\alpha + \beta - 1$ negatív, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = 0$.
 - Ha $\max(\beta - 1, \alpha + \beta - 1) = 0$ és $\alpha \neq 0$, akkor $\dot{y}(t)$ korlátos és $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t)$ nem létezik.

A további esetek felsorolásától eltekintünk.

A dolgozatban először (2. szakasz) ismertetjük az alkalmazott főbb összefüggéseket. Az alapvető gondolatok n -dimenzióban is alkalmazhatók, ezeket a 2.1. pontban ismertetjük. A speciálisan csak 2-dimenzióra vonatkozó kiindulási összefüggéseket, amelyeknél már támaszkodunk a 2.1. pont eredményeire, a 2.2. pontban írjuk le. Ezek birtokában aszimptotikus becsléseket adunk az (1.1) egyenletnél $|y(t)|$ -re (3. szakasz), ez dolgozatunk fő témája. Végül röviden utalunk $|\dot{y}(t)|$ -re vonatkozó becslések létrehozásának lehetőségére (4. szakasz).

2. Az alkalmazott főbb összefüggések

2.1. Az n -dimenzióra vonatkozó tételek

A parciális becsléseket teljes becslésekre fogjuk visszavezetni. Tekintsük az

$$(2.1.1) \quad \dot{x} = f(t, x); \quad x \in \mathbb{R}^n$$

egyenletet. x -et particionáljuk tetszőlegesen:

$$(2.1.2) \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \quad u \in \mathbb{R}^k; \quad v \in \mathbb{R}^m; \quad k + m = n.$$

Tételezzük fel, hogy u -ra keresünk parciális becslést. Az euklideszi normát alkalmazva $|u| \leq |x|$ alapján nyilvánvaló, hogy a teljes becslés parciális becslésként is alkalmazható. Ezzel azonban nem sokra megyünk, hiszen éppen azok az esetek az érdekesek, amikor $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$, azonban $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)|$ nem létezik vagy nem zérus.

Ezt a nehézséget sok esetben áthidalhatjuk, ha v -nél egy alkalmas $C(t)$ (amelyre többnyire $\lim_{t \rightarrow \infty} |C(t)| = 0$) folytonosan deriválható, reguláris mátrixszal a

$$(2.1.3) \quad w = C(t)v; \quad z = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

transzformációt hajtjuk végre. Ezek után a z -re kapható differenciálegyenlet alapján $z(t)$ -re teljes becslést keresünk és alkalmazzuk a

$$(2.1.4) \quad |u(t)| \leq \sqrt{u(t)^2 + |C(t)v(t)|^2} = |z(t)|$$

egyenlőtlenséget.

A teljes becsléshez a 2.1.1. tételt és annak 2.1.2. következményét fogjuk alkalmazni.

2.1.1. TÉTEL. Tekintsük az

$$(2.1.5) \quad \dot{x} = F(t, x)x; \quad x \in \mathbb{R}^n$$

differenciálegyenletet, ahol $F: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ -en értelmezett folytonos, $n \times n$ -es mátrix függvény. Bármely $(s, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ kezdeti értékű $x(t)$ megoldás legyen értelmezett minden $s \leq t$ -re. Legyen $S(t)$ I -n értelmezett tetszőleges, reguláris és folytonosan differenciálható $n \times n$ -es mátrix függvény. Ekkor $s \leq t$ -re az alábbi becslés érvényes ($|\cdot|$ az euklideszi vektor-, illetve az ezzel generált mátrix-normát jelöli és $\mu(A)$ az A mátrix szimmetrikus részének legnagyobb sajátértéke és végül $s \leq t$):

2.1.6)

$$|x(t)| \leq |x(s)| |S^{-1}(t)| |S(s)| \exp \int_s^t \mu(S(\tau)F(\tau, x(\tau))S^{-1}(\tau) + \dot{S}(\tau)S^{-1}(\tau)) d\tau.$$

A tétel bizonyítása [8]-ban található.

2.1.2. KÖVETKEZMÉNY. A 2.1.1. tételben legyen

$$(2.1.7) \quad F(t, x) = F_0(t, x) + \Delta F(t, x),$$

ahol F_0 és ΔF egyaránt folytonos $I \times \mathbb{R}^n$ -ben. Ekkor $s \leq t$ -re

$$(2.1.8) \quad |x(t)| \leq |x(s)| |S^{-1}(t)| |S(s)| \times \\ \times \exp \int_s^t [\mu(S(\tau)F_0(\tau, x(\tau))S^{-1}(\tau) + \dot{S}(\tau)S^{-1}(\tau)) + |S(\tau)| |S^{-1}(\tau)| |\Delta F(\tau, x(\tau))|] d\tau.$$

Bizonyítás. Vegyük figyelembe, hogy

$$\mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A) + |B|,$$

$$|ABC| \leq |A| |B| |C|$$

és alkalmazzuk a 2.1.1. tételt!

2.2. Kétdimenzióra vonatkozó tételek

Elsősorban a 2.1. pontra és [8]-ra támaszkodva kétdimenzióra vonatkozó teljes becsléseket ismertetünk. Ezeket fogjuk majd a 3. és 4. szakaszban parciális becslésekre használni.

2.2.1. TÉTEL. Tekintsük az

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t, x)x; & x \in \mathbb{R}^2; \\ A(t, x) = v(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t, x) \end{bmatrix} \end{cases}$$

differenciálegyenletet, ahol v és p folytonosak $I \times \mathbb{R}^2$ -n, és bármely $(s, x_0) \in I \times \mathbb{R}^2$ kezdeti értékű $x(t)$ megoldás értelmezett minden $s \leq t$ -re. Legyen $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőle-

ges, folytonosan deriválható függvény, amelyre

$$(i) \quad 0 < \delta(t) \leq 1.$$

$$(ii) \quad \dot{\delta}(t) \leq 0.$$

Akkor $s \leq t - \epsilon$ a következő teljes becslés érvényes:

(2.2.2)

$$|x(t)| \leq |x(s)| \sqrt{\frac{2+\delta(s)}{2-\delta(s)}} \exp \int_s^t v(\tau) \left[-\frac{p(\tau, x(\tau))}{2} + \frac{|\delta(\tau) - p(\tau, x(\tau))|}{\sqrt{4-\delta^2(\tau)}} \right] d\tau.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.1.1. tételt a következő $S(t)$ transzformáló mátrixszal [8]:

$$(2.2.3) \quad S(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(t) \\ 2 & \delta(t) \\ \beta(t) & \beta(t) \end{bmatrix},$$

ahol

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} \alpha(t) &= \sqrt{2+\delta(t)}, \\ \beta(t) &= \sqrt{2-\delta(t)}. \end{aligned}$$

Az alábbi egyenlőségek könnyen ellenőrizhetők:

$$\begin{aligned} |S^{-1}(t)| |S(s)| &= \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}; \\ \frac{1}{2} \{SAS^{-1} + \dot{S}S^{-1} + (SAS^{-1} + \dot{S}S^{-1})^T\} &= \begin{bmatrix} \frac{\dot{\delta}}{2\alpha^2} + v \left[(\delta - p) - \frac{\delta}{2} \right] & \frac{\dot{\delta}}{2\omega} + v \frac{\delta}{2\omega} (\delta - p) \\ \frac{\dot{\delta}}{2\omega} + v \frac{\delta}{2\omega} (\delta - p) & \frac{\dot{\delta}}{2\beta^2} - v \frac{\delta}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenletnél az egyszerűség kedvéért elhagytuk az argumentumokat és bevezettük az

$$(2.2.5) \quad \omega = \alpha\beta$$

jelölést.

Könnyen belátható továbbá, hogy (az argumentumokat ismét elhagyva):

$$\begin{aligned} \mu(SAS^{-1} + \dot{S}S^{-1}) &= \frac{\dot{\delta}}{\omega^2} - v \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{\omega^4} + v^2 \frac{(\delta - p)^2}{\omega^2}} \leq \\ &\leq v \left[-\frac{p}{2} + \frac{|\delta - p|}{\omega} \right] + \frac{\dot{\delta} + |\dot{\delta}|}{\omega^2} = v \left[-\frac{p}{2} + \frac{|\delta - p|}{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Mindezeket az összefüggéseket figyelembevéve és a 2.1.1. tételt alkalmazva a 2.2.1. tételt bebizonyítottuk!

Megjegyzés. Fontos látnunk, hogy a fenti becslésben

$$(2.2.6) \quad -\frac{p}{2} + \frac{|\delta - p|}{\omega} \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \delta, & \text{ha } 0 \leq p \leq \delta \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) \delta, & \text{ha } \delta \leq p \leq \frac{1}{\delta}. \end{cases}$$

2.2.2. KÖVETKEZMÉNY. A 2.2.1. tételben legyen

$$(2.2.7) \quad A(t, x) = v(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t, x) \end{bmatrix} + \Delta A(t, x),$$

ahol $\Delta A(t, x)$ is folytonos $I \times \mathbf{R}^n$ -en.

Akkor $s \leq t$ -re

$$(2.2.8) \quad |x(t)| \leq |x(s)| \sqrt{\frac{2+\delta(s)}{2-\delta(s)}} \exp \int_s^t \left[v(\tau) \left(-\frac{p(\tau, x(\tau))}{2} + \frac{|\delta(\tau) - p(\tau, x(\tau))|}{\sqrt{4-\delta^2(\tau)}} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2+\delta(\tau)}{2-\delta(\tau)}} |\Delta A(\tau, x(\tau))| \right] d\tau.$$

Bizonyítás. Vegyük figyelembe, hogy

$$|S(\tau)| |S^{-1}(\tau)| = \sqrt{\frac{2+\delta(\tau)}{2-\delta(\tau)}}$$

és alkalmazzuk a 2.1.2. következményt és a 2.2.1. tételt!

2.2.3. TÉTEL. A 2.2.1. tételben legyen

$$(2.2.9) \quad A(t, x)x = v(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t, x) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ h(t, x) \end{bmatrix}.$$

Teljesüljenek továbbá a következő feltételek:

- (i) $\delta(t) \leq p(t, x) \leq \frac{1}{\delta(t)}$;
- (ii) $\int_{t_0}^{\infty} v(t) \delta(t) dt = \infty$;
- (iii) $\frac{|h(t, x)|}{v(t) \delta(t)} \leq \varepsilon_1(t)$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1(t) = 0$;

ε_1 folytonos. Akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0.$$

Bizonyítás. Ha $v(t) \equiv 1$, akkor e tétel nem más, mint [9] 3.3. tétele. Az utóbbi tételben szerepel egy $q_0(t)$ függvény, amelyet a következőképpen kell választani:

$$-q_0(t) \equiv \mu(SA_0 S^{-1} + \dot{S} S^{-1}),$$

ahol $S = S(t)$ (2.2.3) szerinti és

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t, x) \end{bmatrix}.$$

Ha most A_0 helyett $v(t)A_0$ szerepel [9] 3.3. tételében, akkor e tétel nyilvánvalóan igaz marad a következő módosításokkal:

— $\varrho_0(t)$ úgy választandó, hogy

$$-\varrho_0(t) \equiv \mu(Sv(t)A_0S^{-1} + \dot{S}S^{-1}).$$

Figyelembe véve 2.2.1. tételt, ez azt jelenti, hogy a [9] 3.3. tételben a $\varrho_0(t) = \delta(t)/3$ választás helyett most $\varrho_0(t) = \frac{v(t)\delta(t)}{3}$ veendő, miközben az (i) feltétel és a $\delta(t)$ -re vonatkozó egyéb feltételek változatlanok maradnak.

— [9] 3.3. tételnek bizonyításában az együttható mátrixnak csupán $\varrho_0(t)$ meghatározásánál van szerepe. Így a bizonyításban mindenhol a fenti új $\varrho_0(t)$ függvényt kell helyettesítenünk. Vagyis az eredeti

$$3 \int_{t_0}^{\infty} \varrho_0(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} \varrho(t) dt = \infty$$

helyett a bizonyítandó tételünk (ii) feltétele és az eredeti

$$\frac{1}{3} \frac{|h(t, x)|}{\varrho_0(t)} = \frac{|h(t, x)|}{\delta(t)} \leq \varepsilon(t); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0;$$

ε folytonos, helyett tételünk (iii) feltétele veendő!

2.2.4. KÖVETKEZMÉNY. Tekintsük az

$$(2.2.10) \quad \dot{x} = v(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t, x) \end{bmatrix} x + \Delta A(t, x)x + \begin{bmatrix} 0 \\ h(t, x) \end{bmatrix}; \quad x \in \mathbb{R}^2$$

differenciálegyenletet, ahol v, p, h és a ΔA 2×2 -es mátrix függvény folytonosak $I \times \mathbb{R}^2$ -n, és minden $(s, x_0) \in I \times \mathbb{R}^2$ kezdeti értékű $x(t)$ megoldás értelmezve van minden $s \leq t$ -re.

Legyen $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges folytonosan deriválható függvény, amelyre

- (i) $0 < \delta(t) \leq 1$;
- (ii) $\dot{\delta}(t) \leq 0$;
- (iii) $\delta(t) \leq p(t, x) \leq \frac{1}{\delta(t)}$;
- (iv) $\int_{t_0}^{\infty} v(t)\delta(t) dt = \infty$;
- (v) $\frac{|h(t, x)|}{v(t)\delta(t)} \leq \varepsilon_1(t); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1(t) = 0$;

ε_1 folytonos

$$(vi) \frac{|AA(t, x)|}{v(t)\delta(t)} \leq \varepsilon < 0,24 < \frac{(\sqrt{3}-1)}{3}.$$

Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0.$$

Bizonyítás. Hasonló megfontolásokkal kell élnünk, mint amilyeneket a 2.2.3. tétel bizonyításakor tettünk. Nevezetesen: most $\varrho_0(t)$ a következők szerint választandó:

$$\begin{aligned} -\varrho_0(t) &\leq \mu \left[v(t)S(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t, x(t)) \end{bmatrix} S^{-1}(t) + \dot{S}(t)S^{-1}(t) + S(t)AA(t, x(t))S^{-1}(t) \right] \leq \\ &\leq \mu \left[v(t)S(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t, x(t)) \end{bmatrix} S^{-1}(t) + \dot{S}(t)S^{-1}(t) \right] + |S(t)||S^{-1}(t)||AA(t, x(t))| \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) v(t)\delta(t) + \sqrt{3} \varepsilon v(t)\delta(t) = \sqrt{3} \left(\frac{(1-\sqrt{3})}{3} + \varepsilon \right) v(t)\delta(t). \end{aligned}$$

Ezek után a 2.2.3. tétel bizonyítása értelemszerűen itt is alkalmazható, csupán

$$\varrho_0(t) = \frac{v(t)\delta(t)}{3} \quad \text{helyett} \quad \varrho_0(t) = \sqrt{3} \left(\frac{(1-\sqrt{3})}{3} + \varepsilon \right) \cdot v(t)\delta(t)$$

veendő!

3. Becslések $|y(t)|$ -re

3.1. TÉTEL. (1.1)-ben legyen $q=q(t)$; $q \in C^1$; $q > 0$; $f \equiv 0$, teljesüljön (1.2) és legyen $\delta(t)$ a 2.2.1. tétel szerinti. Akkor $s \leq t$ -re

$$(3.1) \quad |y(t)| \leq \sqrt{y^2(s) + \frac{1}{q(s)} \dot{y}^2(s)} \sqrt{\frac{2+\delta(s)}{2-\delta(s)}} \times \\ \times \exp \int_s^t \sqrt{q(\tau)} \left[-\frac{\tilde{p}(\tau, y(\tau), \dot{y}(\tau))}{2} + \frac{|\delta(\tau) - \tilde{p}(\tau, y(\tau), \dot{y}(\tau))|}{\sqrt{4-\delta^2(\tau)}} \right] d\tau,$$

ahol

$$(3.2) \quad \tilde{p}(\tau, y(\tau), \dot{y}(\tau)) = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}(\tau)}{q^{3/2}(\tau)} + \frac{p(\tau, y(\tau), \dot{y}(\tau))}{q^{1/2}(\tau)}.$$

Bizonyítás. Vezessük be az

$$(3.3) \quad x = \begin{bmatrix} y \\ \frac{1}{\sqrt{q(t)}} \dot{y} \end{bmatrix}$$

új változót, és $\tilde{p}(t, y, \dot{y})$ helyett írjunk egyszerűen $\tilde{p}(t, x)$ -et. Ekkor:

$$(3.4) \quad \dot{x} = \sqrt{q(t)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\tilde{p}(t, x) \end{bmatrix} x.$$

(3.4)-re alkalmazzuk a 2.2.1. tételt!

3.2. KÖVETKEZMÉNY. Teljesüljenek a 3.1. tétel feltételei, továbbá legyen

$$(3.5) \quad \delta(t) \leq \tilde{p}(t, x) \leq \frac{1}{\delta(t)}; \quad s \leq t.$$

Ekkor $s \leq t$ -re

$$(3.6) \quad |y(t)| \leq \sqrt{y^2(s) + \frac{11}{q(s)} \dot{y}^2(s)} \sqrt{\frac{2+\delta(s)}{2-\delta(s)}} \exp \int_s^t \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) \sqrt{q(\tau)} \delta(\tau) d\tau.$$

Bizonyítás. A 3.1. tétel mellett vegyük figyelembe a 2.2.1. tétel utáni megjegyzést!

3.3. KÖVETKEZMÉNY. A 3.2. következmény feltételei teljesüljenek azzal a különbséggel, hogy $f \equiv 0$ helyett

$$(3.7) \quad f(t, y, \dot{y}) = -\Delta q(t, y, \dot{y}) y$$

szerepel, amelyre a

$$(3.8) \quad \frac{|\Delta q(t, y, \dot{y})|}{q(t)\delta(t)} \leq \varepsilon \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad s \leq t$$

becslés érvényes valamely $0 < \varepsilon$ -ra.

Ekkor $s \leq t$ -re

$$(3.9) \quad |y(t)| \leq \sqrt{y^2(s) + \frac{1}{q(s)} \dot{y}^2(s)} \sqrt{\frac{1+\delta(s)}{2-\delta(s)}} \exp \int_s^t \left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) \sqrt{q(\tau)} \delta(\tau) d\tau.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.2.2. következményt. (Vegyük figyelembe a 3.1. tételt és a 3.2. következményt is!) Tekintettel arra, hogy most

$$\Delta A(t, x) = \frac{1}{\sqrt{q(t)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta q(t, x) & 0 \end{bmatrix},$$

és

$$1 < \sqrt{\frac{2+\delta(s)}{2-\delta(s)}} \leq \sqrt{3},$$

így a további bizonyítás már nyilvánvaló!

Tanulságos a 3.3. következménynek az a specializálása, amelynél $q(t) = a^2 t^{2\alpha_0}$. Az alábbi következményben csak azt az egyszerű esetet vizsgáljuk, amelyben

$$\sqrt{q(t)} \delta(t) = \frac{\varepsilon_0}{t}.$$

3.4. KÖVETKEZMÉNY. Tekintsük az

$$(3.10) \quad \ddot{y} + p(t, y, \dot{y})\dot{y} + (a^2 t^{\alpha_0} + \Delta q(t, y, \dot{y}))y = 0; \quad t > 0$$

egyenletet az (1.2) mellett a következő feltételekkel:

$$(i) \quad a > 0; \quad \alpha_0 \geq -2;$$

$$(ii) \quad \left(\varepsilon_0 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \frac{1}{t} \leq p(t, y, \dot{y}) \leq \frac{a^2}{\varepsilon_0} t^{1+\alpha_0} - \frac{\alpha_0}{2t};$$

$t \geq s > 0$ valamely $0 < \varepsilon_0$ -ra;

$$(iii) \quad |\Delta q(t, y, \dot{y})| \leq \varepsilon \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{3}} a t^{(\alpha_0/2)-1}; \quad 0 < \varepsilon; \quad t \geq s > 0,$$

akkor az alábbi becslés érvényes elég nagy s -re:

$$(3.11) \quad |y(t)| \leq \sqrt{y^2(s) + \frac{1}{a^2 s^{\alpha_0}} \dot{y}^2(s)} \sqrt{\frac{2 + \delta(s)}{2 - \delta(s)}} \left(\frac{t}{s} \right)^{\varepsilon_0(\varepsilon + (1/\sqrt{3}) - 1)},$$

ahol

$$\delta(t) = \frac{\varepsilon_0}{a} t^{-1 - (\alpha_0/2)}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.3. következményt.

$\delta(t)$ -re a szükséges feltételek nyilván teljesülnek, ha t elég nagy (vagyis s elég nagy). Legyen $q(t) = a^2 t^{\alpha_0}$. Ekkor

$$\sqrt{q(t)} \delta(t) = \frac{\varepsilon_0}{t},$$

$$\tilde{p} = \left(\frac{\alpha_0}{2t} + p \right) \frac{1}{a t^{\alpha_0/2}}.$$

(3.5) pontosan akkor teljesül, ha (ii) is igaz.

(3.8) nem más, mint (iii). Ezzel a (3.9) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk. Az exponenciális kifejezést kiszámítva:

$$\exp \int_s^t \left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) \sqrt{q(\tau)} \delta(\tau) d\tau = \left(\frac{t}{s} \right)^{\varepsilon_0(\varepsilon + (1/\sqrt{3}) - 1)}.$$

3.5. KÖVETKEZMÉNY. Teljesüljenek a 3.3. következmény feltételei azzal a különbséggel, hogy most $f \equiv 0$ helyett

$$(3.12) \quad f(t, y, \dot{y}) = -\Delta q(t, y, \dot{y})y + g(t, y, \dot{y})$$

szerepel. Δq -ra teljesüljön (3.8) elég kicsiny ε számmal, g -re pedig teljesüljön, hogy

$$(3.13) \quad \begin{cases} \frac{|g(t, y, \dot{y})|}{q(t)\delta(t)} \leq \varepsilon_1(t); & t \geq s \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1(t) = 0, & \varepsilon_1 \text{ folytonos,} \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\int_{t_0}^{\infty} \sqrt{q(t)} \delta(t) dt = \infty,$$

akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a bizonyítandó következmény

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t, y, \dot{y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta q(t, y, \dot{y}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t, y, \dot{y}) \end{bmatrix}$$

kiindulási egyenletére a (3.3) transzformációt. Az eredmény

$$\dot{x} = \sqrt{q(t)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\tilde{p}(t, x) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\Delta q(t, x)}{\sqrt{q(t)}} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g(t, x)}{\sqrt{q(t)}} \end{bmatrix}.$$

Az utóbbi egyenletre alkalmazható a 2.2.4. következmény, ahol

$$v(t) = \sqrt{q(t)},$$

$$\Delta A(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\Delta q(t, x)}{\sqrt{q(t)}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$h(t, x) = \frac{g(t, x)}{\sqrt{q(t)}}$$

és a 2.2.4. következményben $p(t, x)$ szerepét most $\tilde{p}(t, x)$ tölti be!

3.6. KÖVETKEZMÉNY. Tekintsük az

$$(3.14) \quad \ddot{y} + p(t, y, \dot{y})\dot{y} + (a^2 t^{\alpha_0} + \Delta q(t, y, \dot{y}))y = g(t, y, \dot{y}); \quad t > 0$$

egyenletet az (1.2) mellett a következő feltételek teljesülésével:

$$(i) \quad a > 0; \quad \alpha_0 \geq -2;$$

$$(ii) \quad \left(\varepsilon_0 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \frac{1}{t} \leq p(t, y, \dot{y}) \leq \frac{a^2}{\varepsilon_0} t^{1+\alpha_0} - \frac{\alpha_0}{2t};$$

$$t \geq s > 0; \quad \text{valamely } 0 < \varepsilon_0\text{-ra};$$

$$(iii) \quad |\Delta q(t, y, \dot{y})| \leq 0,24\varepsilon_0 a t^{(\alpha_0/2)-1}; \quad t \geq s > 0;$$

$$(iv) \quad |g(t, y, \dot{y})| \leq K t^{(\alpha_0/2)-1-\alpha_1}; \quad \text{valamely } K > 0 \text{ és}$$

$$\alpha_1 > 0\text{-ra}; \quad t \geq s > 0,$$

akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Bizonyítás. A 3.5. következményt használjuk és hasonlóképpen járunk el, mint ahogyan a 3.3. következményből a 3.4. következményt levezettük. Tehát legyen

$$\delta(t) = \frac{\varepsilon_0}{a} t^{-1-(\alpha_0/2)},$$

$$q(t) = a^2 t^{\alpha_0}.$$

3.3. következmény valamennyi feltétele és (3.13) egyaránt nyilván teljesül.

A $\int_0^\infty \sqrt{q(t)} \delta(t) dt = \infty$ reláció is igaz. A bizonyításhoz arra van még szükség, hogy belássuk:

$$\sqrt{3} \cdot 0,24 + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0!$$

E pont eddigi tételeinek és következményeinek alkalmazására példákat mutatunk be.

3.1. Példa. Az

$$(3.15) \quad \ddot{y} + \frac{1-\alpha-\beta}{t} \dot{y} + \frac{\alpha\beta}{t^2} y = 0; \quad t > 0$$

Euler típusú egyenlet két lineárisan független megoldása

$$y_1 = t^\alpha; \quad y_2 = t^\beta, \quad \text{ha } \alpha \neq \beta$$

$$y_1 = t^\alpha; \quad y_2 = t^\alpha \ln t, \quad \text{ha } \alpha = \beta.$$

A $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ reláció bármely megoldás esetében történő teljesülésének szükséges és elégséges feltétele, hogy $\alpha < 0$, $\beta < 0$ legyen. A 3.1. tételt alkalmazva (ahol δ elegendően kicsiny konstans legyen) megkapjuk a szükséges és elégséges feltételt.

3.2. Példa. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a 3.4 következmény $a^2, \alpha_0, \varepsilon_0$ és Δq alkalmas választása mellett a $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ reláció szükséges és elégséges feltételét szolgáltatja az (1.3) egyenletnél is.

3.3. Példa. Az

$$\ddot{y} + \frac{1-\alpha-2\beta}{t} \dot{y} + \left(\alpha^2 t^{2\alpha-2} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{t^2} \right) y = \alpha^2 t^{\beta+3\alpha-2};$$

$$\alpha \neq 0; \quad t > 0$$

egyenlet általános megoldása

$$y(t) = c_1 t^\beta \sin t^\alpha + c_2 t^\beta \cos t^\alpha + t^{\alpha+\beta}.$$

Felhasználva a 3.6. következményt, megállapíthatjuk, hogy $y(t)$ zérushoz tartásának feltétele, hogy vagy

$$(i) \quad \beta < 0 \quad \text{és} \quad \alpha < 0$$

vagy

$$(ii) \quad \beta < 0, \alpha > 0 \quad \text{és} \quad \beta + 2\alpha < 0.$$

A megoldások ismeretében ellenőrizhetjük, hogy a 3.6. következmény jelen esetben csak elégséges feltételt szolgáltat.

3.4. *Példa.* Tekintsük az

$$(3.16) \quad \ddot{y} + bt^\beta \dot{y} + a^2 t^{\alpha_0} y = 0; \quad a > 0; \quad \alpha_0 \geq -2; \quad t > 0$$

egyenletet. Alkalmazzuk a 3.4. következményt!

Legyen $\Delta q \equiv 0$, vagyis $\varepsilon = 0$. (i) és (iii) nyilvánvalóan teljesül.
(ii) akkor teljesül, ha

$$\beta = -1 \quad \text{esetén} \quad b > -\frac{\alpha_0}{2},$$

$$\beta > -1 \quad \text{és} \quad \alpha_0 > -2 \quad \text{esetén} \quad \beta < 1 + \alpha_0.$$

Az első esetben, tehát ha $\beta = -1$, akkor $\varepsilon_0 = b + \frac{\alpha_0}{2}$ választható és

$$(3.17) \quad |y(t)| \leq \sqrt{y^2(s) + \frac{\dot{y}^2(s)}{a^2 s^{\alpha_0}}} \sqrt{\frac{2 + \delta(s)}{2 - \delta(s)}} \left(\frac{t}{s}\right)^{(b + (\alpha_0/2))((1/\sqrt{3}) - 1)},$$

ahol

$$\delta(s) = \frac{\varepsilon_0}{a} s^{-1 - (\alpha_0/2)}$$

és s elég nagy.

A második esetben, tehát ha $\beta > -1$ és $\alpha_0 > -2$, akkor adott (és elég nagy) s -hez ε_0 úgy választandó, hogy (ii) és $\delta(s) \leq 1$ teljesüljön. Így:

$$(3.18) \quad |y(t)| \leq \sqrt{y^2(s) + \frac{\dot{y}^2(s)}{a^2 s^{\alpha_0}}} \sqrt{\frac{2 + \delta(s)}{2 - \delta(s)}} \left(\frac{t}{s}\right)^{\varepsilon_0((1/\sqrt{3}) - 1)}.$$

Vegyük észre, hogy ha minden s -hez a lehetséges legnagyobb ε_0 -t választjuk, akkor ε_0 s -nek monoton növekedő és ∞ -hez tartó függvénye.

Az alkalmazásokat tekintve különösen fontos az

$$(3.19) \quad \ddot{y} + q(t)y = 0; \quad q(t) > 0$$

egyenlet vizsgálata. (l. pl. [1, 2, 3, 4, 6, 7, 10]). Tanulmányozzuk ehelyett az általánosabb

$$(3.20) \quad y + (q(t) + \Delta q(t, y, \dot{y}))y = g(t, y, \dot{y})$$

egyenletet! $p(t, y, \dot{y}) \equiv 0$ helyettesítésével e pont valamennyi következménye és tétele felhasználható erre az esetre. A következő példákban a (3.20) egyenlet néhány speciális alakját tesszük vizsgálat tárgyává.

3.5. *Példa.* Az

$$\ddot{y} + \left(\alpha^2 t^{2(\alpha-1)} + \frac{1-\alpha^2}{4} \frac{1}{t^2} \right) y = 0; \quad \alpha \neq 0; \quad t > 0$$

egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$y_1 = t^{(1-\alpha)/2} \sin t^\alpha,$$

$$y_2 = t^{(1-\alpha)/2} \cos t^\alpha,$$

amelyből $y(t)$ zérushoz tartásának szükséges és elégséges feltétele, hogy $\alpha > 1$ legyen.

Alkalmazzuk most a 3.4. következményt!

Mivel $p \equiv 0$, ezért (ii) csak akkor lehet igaz, ha $\alpha_0 = 2(\alpha - 1)$ és $\alpha_0 > 0$, vagyis $\alpha > 1$ és $\varepsilon_0 \equiv \frac{\alpha_0}{2} = \alpha - 1$. Ha $\alpha > 1$, akkor az (iii) feltétel a következőt követeli meg:

$$\left| \frac{1-\alpha^2}{4} \right| \frac{1}{t^2} \leq \varepsilon_0 0,24\alpha t^{\alpha-2} \leq 0,24\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}.$$

Ez elég nagy t -re teljesül, vagyis megkaptuk a szükséges és elégséges feltételt.

3.6. *Példa.* A 3.4. következményből azonnal adódik, hogy az

$$\ddot{y} + \left(t^4 + \frac{1}{2} t \sin t^4 \right) y = 0$$

egyenlet minden megoldása a zérushoz tart.

Legyen

$$q(t) = t^4 + \frac{1}{2} t \sin t^4.$$

Megállapítható, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \infty$$

és

$$\dot{q}(t) = 4t^3 + \frac{1}{2} \sin t^4 + 2t^4 \cos t^4$$

oszcillál.

3.7. *Példa.* Adjunk becslést a (3.19) egyenlet megoldására a 3.1. tétel felhasználásával. Vegyük figyelembe, hogy $p \equiv 0$ és

$$\exp \int_s^t -\frac{\dot{q}(\tau)}{4q(\tau)} d\tau = \sqrt[4]{\frac{q(s)}{q(t)}},$$

amellyel $s \leq t$ -re

(3.21)

$$|y(t)| \leq \sqrt{y^2(s) + \frac{1}{q(s)} \dot{y}^2(s)} \sqrt{\frac{2+\delta(s)}{2-\delta(s)}} \sqrt[4]{\frac{q(s)}{q(t)}} \exp \int_s^t \frac{\left| \sqrt{q(\tau)} \delta(\tau) - \frac{\dot{q}(\tau)}{2q(\tau)} \right|}{\sqrt{4-\delta^2(\tau)}} d\tau,$$

ahol $\delta(t)$ továbbra is folytonosan deriválható, monoton csökkenő, 0 és 1 közé eső, egyébként tetszőleges függvény.

4. Becslések $|\dot{y}(t)|$ -re

A 2.1. pont elején tett megfontolások alapján a másodrendű egyenletnél kétféle transzformációt alkalmazhatunk. Most egybevetjük ezt a kétféle lehetőséget.

Eredeti vektor változónk (lásd (1.1)) legyen

$$(4.1) \quad x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}.$$

Transzformáljuk x -et a következőképpen:

$$(4.2) \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c(t) \end{bmatrix} x; \quad c(t) > 0.$$

Tételezzük fel, hogy $|z(t)|$ -re az alábbi becslést sikerült bebizonyítanunk.

$$(4.3) \quad |z(t)| \leq a(t).$$

Ennek segítségével $|y(t)|$ -re és $|\dot{y}(t)|$ -re a következő becslések állapíthatók meg:

$$(4.4) \quad |y(t)| \leq \sqrt{y^2(t) + c^2(t)\dot{y}^2(t)} = |z(t)| \leq a(t);$$

$$(4.5) \quad |\dot{y}(t)| \leq \sqrt{\frac{y^2(t)}{c^2(t)} + \dot{y}^2(t)} = \frac{|z(t)|}{c(t)} \leq \frac{a(t)}{c(t)};$$

$$(4.6) \quad \sqrt{y^2(t) + \dot{y}^2(t)} \leq \max \left(1; \frac{1}{c(t)} \right) a(t).$$

Megmutatjuk, hogy a 2.1.1. tétel $n=2$ -re való alkalmazásakor nem nyerünk új információt, ha (4.2) helyett a

$$w = \begin{bmatrix} c(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

transzformációt alkalmazzuk. Az x változóra vonatkozó differenciálegyenletünk legyen

$$\dot{x} = Ax,$$

ahol $A = A(t, x)$. A (4.2) szerinti transzformáló mátrix legyen C_1 (az argumentumot az egyszerűség érdekében elhagytuk). Ezzel:

$$z = C_1 x,$$

$$\dot{z} = (C_1 A C_1^{-1} + \dot{C}_1 C_1^{-1}) z = Bz.$$

A 2.1.1. tétel alapján:

$$(4.7) \quad \sqrt{y^2(t) + c^2(t)\dot{y}^2(t)} = |z(t)| \leq |z(s)| |S^{-1}(t)| |S(s)| \exp \int_s^t \mu(SBS^{-1} + \dot{S}S^{-1}) \, \tau.$$

Legyen most

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1/c(t) & 0 \\ 0 & 1/c(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{c(t)} I,$$

$$\tilde{z} = C_2 C_1 x = \begin{bmatrix} 1/c(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x,$$

amelyből:

$$\dot{\tilde{z}} = (C_2 C_1 A C_1^{-1} C_2^{-1} + C_2 \dot{C}_1 C_1^{-1} C_2^{-1} + \dot{C}_2 C_1 C_1^{-1} C_2^{-1}) \tilde{z} = \left(B - \frac{\dot{c}}{c} I \right) \tilde{z}.$$

Ismét a 2.1.1. tétel alapján és figyelembevételével, hogy

$$\mu \left(SBS^{-1} + \dot{S} S^{-1} - \frac{\dot{c}}{c} I \right) = \mu(SBS^{-1} + \dot{S} S^{-1}) - \frac{\dot{c}}{c},$$

$$- \int_s^t \frac{\dot{c}}{c} d\tau = \ln \frac{c(s)}{c(t)},$$

kapjuk az

$$\sqrt{\frac{1}{c^2(t)} y^2(t) + \dot{y}^2(t)} = |\tilde{z}(t)| \leq \frac{|z(s)|}{c(s)} \frac{c(s)}{c(t)} |S^{-1}(t)| |S(s)| \exp \int_s^t \mu(SBS^{-1} + \dot{S} S^{-1}) d\tau$$

összefüggést, amely (4.7)-ből éppen úgy közvetlenül is következik, mint (4.5) (4.4)-ből.

A 3. szakaszban valamennyi tételben és következményben

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{q(t)}}$$

volt.

Megfontolásainkat a következő — most már nyilvánvalóan igaz — tételben foglalhatjuk össze.

4.1. TÉTEL. a) Ha a 3.1., 3.2., 3.3. és 3.4. tétel, ill. következmény közül bármelyik teljesül, akkor az $|\dot{y}(t)|$ -re felső becslés az $|y(t)|$ -re megadott felső becslés $\sqrt{q(t)}$ -szeres szorzatával kapható.

b) Ha a 3.5. és 3.6. következmények bármelyike teljesül és $q(t)$ korlátos, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = 0$.

4.1. Példa. A 4.1. tételt alkalmazzuk a 3.4. példára. Az eredmény: — ha a (3.16) egyenletben $\beta = -1$, $b > -\frac{\alpha_0}{2}$ és

$$b \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) + \frac{\alpha_0}{2\sqrt{3}} < 0,$$

— vagy ha $-1 < \beta < 1 + \alpha_0$, $-2 < \alpha_0$, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{y}(t)| = 0.$$

A 4.1. tétel a 3. szakasz többi példájára is alkalmazható. Ennek végrehajtását az olvasóra bízuk.

IRODALOM

- [1] ATKINSON, F. V., "A stability problem with algebraic aspects", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **78A** (1978) 299—314.
- [2] BALLIEU, R. J. and PEIFFER, K., "Attractivity of the origin for the equation $\ddot{x} + f(t, x, \dot{x})|\dot{x}|^p \dot{x} + g(x) = 0$ ", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **65** (1978) 321—332.
- [3] BIHARI, I., "An asymptotic statement concerning the solutions of the differential equation $x'' + a(t)x = 0$ (an alternativ proof of a theorem by G. Prodi and G. Tervisan)", megjelenés alatt.
- [4] DEKLEINE, H. A., "A counterexample to a conjecture in second-order linear equations", *Michigan Mathematical Journal* **17** (1970) 29—32.
- [5] HATVANI, L., "Nem-autonom differenciálegyenlet-rendszerek megoldásainak stabilitása és parciális stabilitása", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **5** (1979) 1—48.
- [6] HATVANI, L., "A generalization of the Barbashin—Krasovskij theorems to the partial stability in nonautonomous systems", in: *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **30**, Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, Hungary, 1979, 381—409.
- [7] KARSAI, J., "Attractivity theorems for second order nonlinear differential equations", *Publicationes Mathematicae Debrecen* **30** (1983) 303—310.
- [8] KERTÉSZ, V., "Pozitív definit kvadratikus Ljapunov függvények alkalmazása stabilitási vizsgálatokhoz", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **9** (1983) 375—386.
- [9] KERTÉSZ, V., "Nemlineáris differenciálegyenletek attraktorai", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **10** (1984) 231—256.
- [10] McSHANE, E. J., "On the solutions of the differential equation $y'' + p^2 y = 0$ ", *Proc. Math. Soc.* **17** (1966) 55—61.

(Beérkezett 1985. május 8.)

KERTÉSZ VIKTOR
BME GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR MATEMATIKA TANSZÉK
1521 BUDAPEST, STOCZEK U. H ÉP. IV. E. 44.

PARTIAL STABILITY INVESTIGATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

V. KERTÉSZ

Studying the stability of the zero equilibrium of the differential equation $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$; $f(t, 0, 0) = 0$; $y \in \mathbb{R}$, in general the asymptotic behaviour of the expression $\sqrt{y^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ is considered, where $y(t)$ is a solution of the differential equation. In this paper, the aim is, however, to investigate the conditions when the functions $|y(t)|$ or $|\dot{y}(t)|$ tend to zero independently of each other. We want to do this in such cases as well when the origin is not an equilibrium. For these purposes, special methods will be worked out.

PERMUTÁCIÓS FORRÁSKÓDOLÁS

FAZEKAS GÁBOR és PETHŐ ATTILA

Debrecen

Permutációk csatornakódolásra való alkalmazhatóságát 1965 óta vizsgálják ([5]). Forráskódolásra történő alkalmazásuk gondolata néhány éve konkrét gyakorlati problémával kapcsolatban merült fel. Dolgozatunkban matematikailag leírjuk a permutációs forráskódolás elvét, majd részletesen ismertetjük digitalizált hanginformációk továbbítására kifejlesztett módszerünket.

Azzal, hogy a forrásból nagy redundanciával érkező digitális jelek sorozatához egy permutáció sorozatot rendelünk, jelentős információ sűrítést lehet elérni az eredeti információ lényeges torzulása nélkül.

1. Bevezetés

Permutációk kódelméleti alkalmazásának gondolata SLEPIAN [5] cikkében jelent meg 1965-ben. Ebben a cikkben a szerző olyan csatornakódokat vizsgál, melyek kódszavai előállíthatók egyetlen kódszó összes permutációjaként. A permutációs kódolás irodalma SLEPIAN indító cikke után a diszkrét jelek, a véges betűkészlet esetét tanulmányozza, a kódelmélet általános fejlődési irányának megfelelően. A permutációs csatornakódolás irodalmáról részletes áttekintés található G. COHEN [1] cikkgyűjteményében.

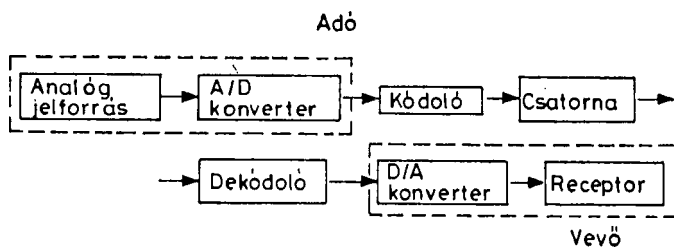
Dolgozatunkban permutációknak egy másik kódelméleti alkalmazását vizsgáljuk. Alapötletünk az, hogy a permutációk alkalmasak forráskódolásra is, azaz valamely analóg jelből digitalizálással nyert sorozathoz közvetlenül megfeleltethetünk egy permutáció sorozatot. A kódszavak ekkor csak a nagyságrendjét — és esetleg néhány egyéb jellemzőjét — őrzik meg a kódolandó sorozatnak.

Először a permutációs forráskódolás elvét írjuk le, majd részletesen ismertetjük hanginformációk továbbítására kifejlesztett módszerünket.

2. A permutációs forráskódolás elve

A digitális hírközlőtechnika fejlődése bizonyos körülmények között megköveteli, hogy az analóg jelforrásból digitalizálással kapott jeleket a csatornán való továbbítás előtt kódoljuk. A kódolást szükségessé teszi a nagy redundanciával érkező jelek sűrítése, titkosítása, valamint az adatok párhuzamos feldolgozása stb. Eljárásunk a következő hírközlő modellben dolgozik.

Vizsgálataink szempontjából itt és a továbbiakban forrásnak az analóg jelforrás és az A/D konverter együttesét tekintjük, továbbá feltételezzük, hogy a csatornazaj a permutációs kódolási eljárás hibájához képest elhanyagolható, ezért nem foglalkozunk hibajavítással.



1. ábra

Jelöljük az A/D konverterről szekvenciálisan érkező jelek sorozatát $h = (h_1, h_2, \dots)$ -vel. h elemei egész számok, melyekre teljesül, hogy $1 \leq h_i \leq n$, $i = 1, 2, \dots$ (A gyakorlatban h elemei egy 0-ra szimmetrikus intervallumba esnek, ez azonban az eljárás lényegét nem befolyásolja.)

Kódolásra egy véges $L = \{1, 2, \dots, l\}$ halmaz permutációit használjuk. L permutációinak halmazát jelölje S_L . Jelölje még V_N^l , az $N = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz l -ed osztályú variációinak halmazát.

Bontsuk fel a h sorozatot egymást követő l hosszúságú szeletek sorozatára, azaz $h = (A_1, A_2, \dots)$, ahol $A_i = (h_{(i-1)l+1}, \dots, h_{il})$; $i = 1, 2, \dots$. Ekkor $A_i \in V_N^l$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re.

Legyen $\varphi: V_N^l \rightarrow S_L$ egy leképezés. A $\Phi: (V_N^l)^\infty \rightarrow (S_L)^\infty$ leképezést *permutációs forráskódolásnak* nevezzük, ha

$$(1) \quad \Phi(h) = \Phi(A_1, A_2, \dots) = (\varphi(A_1), \varphi(A_2), \dots).$$

Közismert, hogy $|V_N^l| = n^l$, míg $|S_L| = l!$. n értékének ismeretében, amit az A/D konverter paraméterei egyértelműen meghatároznak, alkalmasan megválasztva l -et jelentős információsűrítést lehet elérni.

A gyakorlatban Φ -nek eleget kell tennie az alábbi két feltételnek.

- (i) algoritmikusan könnyen kezelhető legyen;
- (ii) található legyen olyan $\hat{\Phi}: (S_L)^\infty \rightarrow (V_N^l)^\infty$ dekódoló leképezés, hogy a vett információ az üzenet lényegét tartalmazza.

Amennyiben φ szürjektív leképezés, akkor van balinverze, azaz olyan $\hat{\varphi}: S_L \rightarrow V_N^l$ leképezés, hogy $\hat{\varphi} \circ \varphi = i_L$; i_L az identikus permutáció. Ilyenkor célszerű $\hat{\Phi}$ -t a φ balinverzei segítségével megadni.

Nyilvánvaló, hogy $\hat{\varphi}$ meghatározására általános eljárás nem adható. $\hat{\varphi}$ függ φ megválasztásától és a szóbanforgó forrás statisztikai jellemzőitől.

3. Permutációs forráskódolás alkalmazása hanginformációkra

A 2. szakaszban leírt elveket alkalmaztuk hanginformációk valós idejű — real time — továbbítására. Ebben a részben ismertetjük az elvek konkrét megvalósítását. A 2. szakaszban leírt jelöléseket alkalmazzuk a továbbiakban is.

3.1. Kódolás

A kódoláshoz alkalmas $\varphi: V_N^l \rightarrow S_L$ leképezést kell megadnunk, mely eleget tesz (i) és (ii)-nek. Természetesen kínálkozik a következő megoldás.

Legyen $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l) \in V_N^l$. Rendezzük át \mathbf{v} koordinátáit a következő módon $v_{i_1} < v_{i_2} < \dots < v_{i_l}$ (v_{i_1} megelőzi v_{i_2}), ha $v_{i_1} < v_{i_2}$ vagy $v_{i_1} = v_{i_2}$ és $i_1 < i_2$. Így \mathbf{v} -hez egyértelműen hozzárendeltük a $\mathbf{v}' = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_l})$ vektort, melyre $v_{i_1} < v_{i_2} < \dots < v_{i_l}$. Ezek után legyen $\varphi(\mathbf{v}) = (i_1, i_2, \dots, i_l) \in S_L$.

A $\mathbf{v} \rightarrow \varphi(\mathbf{v})$ hozzárendelés egyszerűen algoritmizálható, hiszen l elem sorbarendezésének közismert feladatán alapszik. Ugyanakkor az általános sorbarendezési eljárások, melyek közül a leggyorsabbak is $l \cdot \log l$ nagyságrendű műveletigényűek, lassúak a real time továbbítás realizálásához. Kihasználva azondan a \mathbf{v} koordinátáinak specifikus tulajdonságait lényegesen gyorsabb sorbarendezés is lehetséges.

Gyors rendező algoritmus

Az alábbi ismertetendő rendező algoritmus nem új, de alapvető jelentőségű a permutációs forráskódolás megvalósításánál, ezért leírjuk.

Az eljárás SEWARDTÓL [4] és FEURZIGTÓL [2] származik és KNUTH [3] monográfiájában találtuk meg. Az algoritmust módosított formában ismertetjük. Ennek bemenete és kimenete: \mathbf{v} , ill. $\varphi(\mathbf{v})$.

Legyen $A = \{A(1), \dots, A(l)\}$ egész számok véges halmaza, melyre $1 \leq A(I) \leq n$, ahol n adott. Legyen S egy n méretű vektor, a rendezés után A elemeinek indexeit a K vektorban tároljuk.

Az algoritmus:

- I. (Inicializálás) $S(I) = 0, I = 1, 2, \dots, n$;
- II. (S feltöltése) $S(A(J)) = S(A(J)) + 1, J = 1, 2, \dots, l$;
- III. $R = 1$;
- IV. (Összegzés) $Q = S(I), S(I) = R, R = R + Q, I = 1, 2, \dots, n$;
- V. (K feltöltése) $K(S(A(J))) = J, S(A(J)) = S(A(J)) + 1, J = 1, 2, \dots, l$.

Az algoritmus műveletigénye n összeadás és $2l$ 1-gyel való növelés (inkrementálás), ami általában lényegesen kevesebb, mint $l \cdot \log l$.

3.2. Dekódolás

A 3.1.-ben ismertetett gyors kódolási eljáráshoz hasonlóan gyors dekódolási eljárást kerestünk. Ezt a „lookup table” elv alapján működő eljárásban találtuk meg.

Legyen $\mathbf{v}_0 = (v_{01}, \dots, v_{0l}) \in V_N^l$ olyan, hogy $v_{0i} \leq v_{0,i+1}, i = 1, 2, \dots, l-1$ rögzített, melyet *dekódoló vektornak* nevezünk. Legyen $\pi = (i_1, \dots, i_l) \in S_L$, akkor $\hat{\varphi}: S_L \rightarrow V_N^l$ legyen a következő leképezés

$$\hat{\varphi}(\pi) = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_l) = \hat{\mathbf{v}} \quad \text{ahol} \quad \hat{v}_{i_j} = v_{0j} \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Nyilvánvaló, hogy $\hat{\mathbf{v}} \in V_N^l$ és $\varphi(\hat{\varphi}(\pi)) = \pi$, tehát $\hat{\varphi}$ a φ egyik balinverze.

A dekódolás ezen az elven nagyon gyorsan megoldható. \mathbf{v}_0 optimális választása az adott hang természetétől függ. Kísérletekkel kiválasztható a célnak legjobban megfelelő dekódoló vektor.

Kísérleteink alapján egyenletes eloszlású dekódoló vektorok jól alkalmazhatóak. Ezen azt értjük, hogy ha $m = \min v_{0i}$ és $M = \max v_{0i}$, valamint $n_k = |\{i: v_{0i} = k\}|$, $m \leq k \leq M$, akkor $\min n_k \leq \max n_k \leq \min n_k + 1$, ha $m \leq k \leq M$.

4. A permutációs forráskódolás hatása a hangra

Az előzőekben kifejtett kódolási-dekódolási módszer alkalmazásánál központi kérdésnek számít, hogy az eljárás során milyen mértékben torzul a hanginformáció.

Az adott és vett jelek összehasonlítása lehetővé teszi a torzítás különböző objektív, kvantitatív mérését. Más, és tapasztalataink szerint megnyugtatóbb módszer a szubjektív meghallgatás, az eredeti és a dekódolt hangminta összehasonlítottatása több személy által. Kísérleteink szerint az eljárás paramétereit jól megválasztva a permutációs forráskódolás nem okoz a szöveg érthetőségét zavaró torzítást. Sőt megőrzi a feldolgozott hang egyéb jellemzőit is, mint a hang magasságát és színét. Megjegyezzük, hogy lényegesen jobb eredményeket kaptunk mély hangok feldolgozásakor, mint a magas, női hangokénál. Fontos jellemzője még ennek a kódolási eljárásnak a nyelvfüggetlenség. Magyar, orosz, angol, német és spanyol szövegeket egyforma minőségben tudtunk feldolgozni.

A permutációs forráskódolást a Számítástechnikai Koordinációs Intézet és a Kossuth Lajos Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszéke közötti kutatási-fejlesztési szerződés keretében dolgoztuk ki. A kísérleteket az SZKI eszközeivel és aktív támogatásával végeztük az SZKI Matematikai Laboratóriumában.

Megjegyzés a korrektúrákor:

J. DÉNES, On some connections between permutations and coding, *Discrete Math.* 56 (1985) 141—146 cikkében foglalkozik a permutációk kódelméleti alkalmazásaival, többek között a permutációs forráskódolással is.

IRODALOM

- [1] COHEN, G., *Quelques fonctionnelles métriques en codage algébrique et combinatoire*, 1980.
- [2] FEUERZIG, W., "Mathsort", *CACM* 3 (1960) 601.
- [3] KNUTH, D. E., *The Art of Computer Programming, Vol. 3. Sorting and Searching* (Addison—Wesley, 1975) 78—79.
- [4] SEWARD, H. H., Mester's thesis, M. I. T. Digital Computer Laboratory Report R—232, 1954, 25—28.
- [5] SLEPIAN, D., "Permutation modulation", *Proc. of the IEEE* 53 (1965) 228—236.

(Beérkezett: 1984. szeptember 17.)

FAZEKAS GÁBOR
PETHŐ ATTILA
KLTE MATEMATIKAI INTÉZET
DEBRECEN, EGYETEM TÉR 1.

PERMUTATIONAL SOURCE CODING

G. FAZEKAS and A. PETHŐ

In this paper, the idea of permutational source coding is explained and some remarks are made on its application to the transmission of digitized voice.

RELÁCIÓS ADATMODELL ANTIKULCSAIRÓL

VU DUC THI

Budapest

A CODD [3] által bevezetett relációs adatmodell egyik legfontosabb fogalma a minimális kulcs. DEMETROVICS [4]-ben bebizonyította a minimális kulcsok és *Sperner-rendszerek* közötti ekvivalenciát. Az antikulcsok halmaza is egy *Sperner-rendszer*.

Dolgozatunkban a következő fő eredmények találhatók: Antikulcsok adott halmazához konstruálunk három algoritmust. Az első két algoritmus (közülük egy lineáris) egy minimális kulcsot talál meg, a harmadik algoritmus minden minimális kulcsot megtalál. Konstruálunk egy algoritmust, amely minden antikulcsot megtalál. Végeterül bizonyítjuk, hogy az a probléma, hogy adott antikulcsok halmazához van-e egy olyan kulcs, amelynek nagysága nem nagyobb, mint egy adott természetes szám, NP-teljes.

1. Bevezetés

Az adatbáziskezelő rendszereket többféleképpen szoktunk tervezni. A használt adatmodelleket három fő típusba soroljuk: relációs, hierarchikus és hálós. A relációs adatmodell az adatkezelés egyik legigéretesebb eszköze, amely alkalmas az adatbázisok logikai szerkezetének leírására. Ebben a modellben az adattárolást mátrix alakban valósítjuk meg.

A minimális kulcsok és antikulcsok fontos szerepet játszanak a relációs adatmodell logikai és strukturális vizsgálatában. Az antikulcsok különösen fontos szerepet játszanak funkcionális függőségek extrémális problémáinak vizsgálatában, vagy az olyan konkrét mátrix konstrukciójában, amely a minimális kulcsok halmazát reprezentálja, vagy minimális kulcsok keresésében.

2. Definíciók

Itt csak a legszükségesebb definíciókra szorítkozunk.

Legyen adva $\Omega = \{1, \dots, n\}$ és $P(\Omega)$ az Ω halmaz hatvány halmaza. Az $F: P(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ függvényt lezárási operációnak nevezzük, ha bármely A, B -hoz $(A, B \in P(\Omega))$

$$(2.1) \quad A \subseteq F(A),$$

$$(2.2) \quad B \subseteq A \Rightarrow F(B) \subseteq F(A),$$

$$(2.3) \quad F(F(A)) = F(A).$$

Legyen M egy $m \times n$ -es mátrix. Jelölje Ω az M oszlopainak halmazát. $A \subseteq \Omega$ -ra jelölje $F_M(A)$ az Ω azon elemeit, amelyeken M bármely két A -n megegyező sora egyenlő. Világos, hogy F_M lezárási operáció.

Azt mondjuk, hogy \mathbf{M} reprezentálja az F lezárási operációt, ha $F = F_{\mathbf{M}}$. Ismerjük ([2]), hogy tetszőleges lezárási operációhoz létezik olyan \mathbf{M} mátrix, melyre $F = F_{\mathbf{M}}$. Legyen F egy lezárási operáció és $A \subseteq \Omega$. Ekkor A az F kulcsa, ha $F(A) = \Omega$. Egy A kulcsot minimális kulcsnak nevezzük, ha nincs olyan B kulcs, amelyre $B \subset A$ teljesülne. A minimális kulcsok halmazát K -val jelöljük. Ismerjük ([4]), hogy K akkor és csak akkor lehet valamely lezárási operáció minimális kulcsainak halmaza, ha nem üres *Sperner-rendszer*, azaz nincs két különböző A, B eleme, amelyekre $A \subset B$ fennállna.

Legyen K egy *Sperner-rendszer*. K antikulcsainak halmazát, melyet K^{-1} -gyel jelölünk, a következőképpen definiáljuk:

$$K^{-1} = \{A \subset \Omega: (B \in K \Rightarrow B \not\subseteq A) \text{ és } (A \subset C) \Rightarrow (\exists B \in K)(B \subseteq C)\}.$$

Világos, hogy K antikulcsai a maximális, K -belit nem tartalmazó részei Ω -nak és nyilván K^{-1} is *Sperner-rendszer*. Könnyű belátni, hogy a K és K^{-1} halmazok egyértelműen meghatározzák egymást.

Dolgozatunkban, ha egy *Sperner-rendszer* a minimális kulcsok halmazának (az antikulcsok halmazának) szerepét játssza, akkor feltételezzük, hogy ez a *Sperner-rendszer* nem üres (nem tartalmazza Ω -t).

3. Egy minimális kulcsot megtaláló algoritmusok

Legyen F egy lezárási operáció Ω -n. Definiáljuk a K_F halmazt a következőképpen

$$K_F = \{A: F(A) = \Omega, (\forall B \subseteq A)(F(B) = F(A) \Rightarrow B = A)\}.$$

Azaz K_F az F minimális kulcsainak halmaza. Azt mondjuk, hogy az \mathbf{M} $m \times n$ -es mátrix reprezentálja a K halmazt, ha $K = K_{F_{\mathbf{M}}}$. [2,5]-ben találjuk a következő fontos tételt:

3.1. TÉTEL. Ha K *Sperner-rendszer*, akkor létezik olyan $F(F')$ lezárási operáció, melyre $K = K_{F'}$ ($K = K_F^{-1}$).

Legyen F az Ω feletti tetszőleges lezárási operáció, $Z(F) = \{A: F(A) = A\}$. $Z(F)$ elemeit nevezzük zárt halmazoknak. Legyen $T(F) = \{A \subset \Omega: F(A) = A \text{ és nincs } B \in Z(F) \setminus \{\Omega\}, \text{ melyre } A \subset B\}$; $T(F)$ a maximális zárt halmazok rendszere.

3.1. LEMMA. Legyen F egy lezárási operáció Ω -n, K_F az F minimális kulcsainak halmaza. Ekkor $K_F^{-1} = T(F)$.

Bizonyítás. Legyen A antikulcs, ekkor nyilvánvaló, hogy $A \neq \Omega$. Tegyük fel, hogy $A \subset F(A)$. Világos, hogy $F(A) = F(F(A)) = \Omega$, azaz A kulcs. Ez ellentmond annak, hogy $\forall B \in K_F: B \not\subseteq A$. Ha létezik olyan A' zárt halmaz, amelyre $A \subset A'$ és $A' \in Z(F) \setminus \{\Omega\}$, akkor A' kulcs, ez ellentmondás, mert $A' \subset \Omega$. Vagyis $A \in T(F)$.

Megfordítva, ha A maximális zárt halmaz, de létezik olyan $B \in K_F$, melyre $B \subseteq A$, akkor $F(A) = \Omega$, ez ellentmond annak, hogy $A \neq \Omega$. Ha $A \subset D (D \subseteq \Omega)$, akkor könnyen látható, hogy $F(D) = \Omega$ (A maximális zárt halmaz volta miatt). Azaz A antikulcs. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Legyen adva egy K *Sperner-rendszer* Ω -n. Legyen $L(K) = \{A \subseteq \Omega: \exists B \in K: B \subseteq A\}$. Ekkor ha F_1, F_2 olyan lezárási operációk, amelyekre $K_{F_1} = K_{F_2} = K$,

akkor $T(F_1)=T(F_2)$ és $L(K_{F_1})=L(K_{F_2})=L(K)$, hiszen K és K^{-1} halmazok egyértelműen meghatározzák egymást, a 3.1. lemma szerint. Azaz, ha K a minimális kulcsok halmaza, akkor $L(K)$ minden olyan lezárási operáció kulcsainak halmaza, amelyre $K=K_F$. Azaz: minden ilyen F -hez a maximális zárt halmazok rendszere azonos.

3.2. LEMMA. Legyen K az Ω feletti *Sperner-rendszer* és $K^{-1}=\{B_1, \dots, B_m\}$ a K antikulcsainak halmaza, $A \subseteq \Omega$. Ekkor $A \in K$ (azaz A minimális kulcs) akkor és csak akkor, ha $A \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leq i \leq m$) és bármely D -hez ($D \subset A$) van olyan $B_i \in K^{-1}$, melyre $D \subseteq B_i$.

Bizonyítás. Ha van olyan $B_i (B_i \in K^{-1})$, melyre $B_i \subset A$, akkor A kulcs. Ha $K^{-1} \cup A$ *Sperner-rendszer*, akkor a 3.1. tétel szerint van F lezárási operáció úgy, hogy $K=K_F$. Ekkor, ha $F(A) \neq \Omega$, akkor a 3.1. lemma szerint létezik olyan $B_i (B_i \in K^{-1})$, melyre $F(A) \subseteq B_i$. Tehát $A \subseteq B_i$, ami ellentmondás, mert $A \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leq i \leq m$). Azaz A kulcs. Látható, hogy a minimális kulcs definíciója szerint A minimális kulcs.

Megfordítva, tegyük fel, hogy A minimális kulcs (azaz $A \in K$). Nyilvánvaló, hogy $A \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leq i \leq m$). Bármely D -hez ($D \subset A$) ha $D \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leq i \leq m$), akkor a fenti rész bizonyítása szerint D kulcs. Ez ellentmond annak, hogy A minimális kulcs. Tehát van olyan $B_i (B_i \in K^{-1})$, melyre $D \subseteq B_i$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyen $\Omega = \{1, \dots, n\}$, $P(\Omega)$ az Ω halmaz hatványhalmaza és $G \subseteq P(\Omega)$, $\emptyset \notin G$. Defináljuk $\min(G)$ -t a következőképpen: $\min(G) = A$, ahol A a G olyan eleme, melyre $|A| = \min\{|A_i|: A_i \in G\}$. Ha $A \subseteq \Omega$ és $A \neq \emptyset$, akkor $v(A) = a$, ahol a egy eleme A -nak. Azaz $\min(G)$ a G olyan elemét jelenti, amely nagysága minimális és $v(A)$ pedig az A tetszőleges eleme.

Legyen K egy Ω feletti *Sperner-rendszer* és $K^{-1}=\{B_1, \dots, B_m\}$ a K antikulcsainak halmaza, B egy kulcs (azaz $B \in L(K)$). Legyen $G_1 = \{B \cap \bar{B}_1, \dots, B \cap \bar{B}_m\}$, nyilvánvaló, hogy a 3.2. lemma szerint $B \cap \bar{B}_i \neq \emptyset$ ($\forall i: 1 \leq i \leq m$). Ha i, τ olyan, hogy ($i \neq \tau$): $B \cap \bar{B}_i = B \cap \bar{B}_\tau$, akkor két metszetet különbözőnek tekintünk.

Legyenek $B_i^1 = B \cap \bar{B}_i$ és $r_1 = m$, vagyis $G_1 = \{B_i^1, \dots, B_{r_1}^1\}$. Ekkor legyen $i \geq 1$ -re

$$F_{i+1} = \{B_i^1 \in G_i: v(\min(G_i)) \notin B_i^1\} \text{ és}$$

$$G_{i+1} = \{B_i^1 \setminus \min(G_i): B_i^1 \in F_{i+1}\} = \{B_1^{i+1}, \dots, B_{r_{i+1}}^{i+1}\}$$

Látható, hogy $|\Omega|$ véges miatt van olyan p természetes szám, melyre $G_p \neq \emptyset$ és $F_{p+1} = \emptyset$. Világos, hogy $p \leq \min(n, m)$, ahol $|\Omega| = n$, és $v(\min(G_i)) \neq v(\min(G_\tau))$, ahol $i \neq \tau$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq \tau \leq p$. Nyilvánvaló, hogy ha $F_{i+1} \neq \emptyset$ állna fenn, akkor $|\min(G_i)| \leq |B_i^1|$ miatt $B_i^1 \setminus \min(G_i) \neq \emptyset$ lenne. Azaz $G_{i+1} \neq \emptyset$.

3.2. TÉTEL. $A = \bigcup_{i=1}^p \{v(\min(G_i))\}$ a K eleme (azaz A minimális kulcs).

Bizonyítás. A G_i definíciója szerint minden B_i^1 -re ($1 \leq i \leq m$) létezik olyan F_i , melyre $2 \leq i \leq p+1$ és van olyan B_i^{i-1} , melyre $B_i^{i-1} \in G_{i-1} \setminus F_i$, és $B_i^{i-1} \subseteq B_i^1$, ahol $1 \leq q \leq \tau_{i-1}$. Tehát $v(\min(G_{i-1})) \in B_i^{i-1}$, vagyis $A \cap (B \cap \bar{B}_\tau) \neq \emptyset$. Azaz $A \subseteq B_\tau$ ($\forall \tau: 1 \leq \tau \leq m$). Most tegyük fel, hogy D az A valódi részhalmaza. Nyilvánvaló, hogy ha $A = \{a\}$, ahol $a \in \Omega$, akkor $A \in K$ (azaz A minimális kulcs). Ha létezik olyan $v(\min(G_i))$, ahol $1 \leq i \leq p$, hogy $v(\min(G_i)) \in A \setminus D$, akkor van olyan $B \cap \bar{B}_\tau$,

amelyre $1 \leq \tau \leq m$ és $\min(G_i) \subseteq B \cap \bar{B}_\tau$. A G_i definíciója szerint és $A \subseteq B$ miatt $A \setminus v(\min(G_i)) \subseteq B$. Nyilvánvaló, hogy $D \subseteq A \setminus v(\min(G_i))$, tehát $D \subseteq B$. A 3.2. lemma szerint $A \in K$, azaz A minimális kulcs. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A 3.2. tétel segítségével könnyen beláthatjuk, hogy ha $H = \{B_1, \dots, B_m\}$ egy adott *Sperner rendszer* és T -vel jelöljük olyan rendszert, melyre $T^{-1} = H$. Ekkor legyen $B = B_i \cup \{a\}$ (itt $a \notin B_i$, $1 \leq i \leq m$), megtalálhatjuk az A -t, ahol $A \in T$. Azaz ha H az antikulcsok halmaza, akkor A minimális kulcs.

Megjegyzés. Legyen K egy *Sperner rendszer*, $K^{-1} = \{B_1, \dots, B_m\}$ a K antikulcsainak halmaza. Világos, hogy $B_i \cup \{a\}$ ($a \notin B_i$) kulcs (azaz $B_i \cup \{a\} \in L(K)$). Célszerű az $v(\min(G_1)) = a$ és $G_2 = \{B_i \cap \bar{B}_\tau : a \in B_i \text{ és } B_\tau \in K^{-1}\}$ választása.

Most egy példát vizsgálunk:

Legyenek adva $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $K^{-1} = \{B_1, B_2, B_3\}$ egy olyan *Sperner rendszer*, amelyre $B_1 = \{1, 3, 5\}$, $B_2 = \{1, 3, 4, 6\}$, $B_3 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Legyen $a = 1$, ekkor $B_3 \cap \bar{B}_1 = \{2, 4, 6\}$, $B_3 \cap \bar{B}_2 = \{2, 5\}$. Könnyen belátható, hogy $\min(G_2) = \{2, 5\}$. Ha $v(\min(G_2)) = 2$, akkor $F_2 = \emptyset$. Tehát $A_1 = \{1, 2\} \in K$. Ha $v(\min(G_2)) = 5$, akkor $F_3 = \{2, 4, 6\}$ és $G_3 = \{4, 6\}$. Ebben az esetben ha $v(\min(G_3)) = 4$, akkor $A_2 = \{1, 4, 5\} \in K$ és ha $v(\min(G_3)) = 6$, akkor $A_3 = \{1, 5, 6\} \in K$.

Most a 3.2. tétel alapján vizsgálunk és értékelünk két olyan algoritmust, amelyek egy minimális kulcsot találnak meg.

Az algoritmusok időbonyolultságának értékelése céljából tételezzük fel, hogy két attributum összehasonlítása az elemi operáció. Tegyük fel, hogy ha $A \subseteq \Omega$, akkor A az attributumok osztályozott listája. Tehát két részhalmazának *Boole operációja* $O(n)$ elemi operációt követel meg (itt $|\Omega| = n$).

Legyen $K = \{B_1, \dots, B_m\}$ az Ω feletti *Sperner-rendszer*. Ekkor jelöljük $|K| = n \cdot m$ -mel a K hosszúságát.

Először megadunk algoritmust, mely egy minimális elemet talál meg.

INPUT: K egy nem negatív egész számok halmaza és K tartalmaz legalább egy pozitív egész számot. P a K elemeinek száma. Tegyük fel, hogy $K = \{K[1], \dots, K[p]\}$.

OUTPUT: i , ahol $1 \leq i \leq p$, amelyre $K[i] = \min \{K[\tau] : K[\tau] \neq 0\}$

ADATSTRUKTÚRA:

— $K[1 : m]$ a K elemeinek tömbje, van olyan $K[\tau]$, melyre $K[\tau] \neq 0$ és $1 \leq \tau \leq p$, ahol p a K elemeinek száma.

— A, B munkaváltozók

— M tartalmazza p -t. Világos, hogy $p \leq m$

Procedure $MIN1(K, M)$:

for $i \leftarrow 1$ until M do if $K[i] \neq 0$ then begin $A \leftarrow K[i]$; $B \leftarrow i$; goto $T1$ end;

$T1$: for $i \leftarrow 1$ until M do if $K[i] \neq 0 \wedge K[i] < A$ then begin $A \leftarrow K[i]$; $B \leftarrow i$ end;

return B

Az első algoritmust, ami egy minimális kulcsot talál meg, a következőképpen konstruáljuk:

3.1. Algoritmus

INPUT: $K = \{B_1, \dots, B_m\}$ az $\Omega = \{1, \dots, n\}$ feletti *Sperner-rendszer*, B egy kulcs (azaz $B \in L(H)$, ahol $H^{-1} = K$)

OUTPUT: $T \in H$

ADATSTRUKTÚRA:

— $K[1: m]$ a K elemeinek tömbje;
 — B az attributumok halmaza, amely kulcs.
 — $M[1: m]$, $C[1: m]$ munkatömbök
 — $T, D, D1, D2, N, N1, N2$ munkaváltozók.
 procedure $MINIKEY1(K, B)$:
 KEZDET: for $i \leftarrow 1$ until m do begin $C[i] \leftarrow 0$; $M[i] \leftarrow B \cap (\Omega \setminus K[i])$ end
 for $i \leftarrow 1$ until m do
 for each $\tau \in M[i]$ do $C[i] \leftarrow C[i] + 1$; $T \leftarrow \emptyset$; $D \leftarrow m$;
 CIKLUS: while $D \neq 0$ do
 begin $D1 \leftarrow D$; $D2 \leftarrow \text{MIN1}(C, D1)$; $N \leftarrow M(D2)$;
 select $ELEMENT$ from N ; $T \leftarrow T \cup ELEMENT$; $D \leftarrow 0$;
 for $i \leftarrow 1$ until $D1$ do if $ELEMENT \notin M[i]$ then
 begin $D \leftarrow D + 1$; $M(D) \leftarrow M[i] \setminus N$; $N1 \leftarrow M[i] \cap N$; $N2 \leftarrow |N1|$;
 $C(D) \leftarrow C[i] - N2$
 end
 end;
 return T

Könnyen beláthatjuk, hogy a 3.1. algoritmus hatékony, ha $ELEMENT$ sok $M[i]$ közös eleme (azaz sok B_i tartalmazza a $v(\min(G_i))$ -t).

KEZDET-metszetben az algoritmus $O(n \cdot m)$ elemi operációt követel meg. Nyilvánvaló, hogy a MIN1-algoritmus $O(m)$ elemi operációt igényel. Világos, hogy

CIKLUS-metszetben az algoritmus $O(n \sum_{i=1}^l l_i)$ elemi operációt követel meg, ahol l a CIKLUS ismétlődő száma, l_i a $D1$ értéke a CIKLUS i -s ismétlésében. Nyilvánvaló, hogy $l \leq n$ és $l_i \leq m(\forall i)$. Könnyű belátni, hogy a legrosszabb esetben az algoritmus $O(n^2 m)$ elemi operációt követel meg, és a 3.2. tétel szerint az algoritmus egy minimális kulcsot talál meg.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. Legyen K egy olyan *Sperner-rendszer* Ω -n, amely az antikölcsök halmazának szerepét játssza. Ekkor a 3.1. algoritmus meghatároz egy minimális kulcsot és időbonyolultsága $O(n \cdot |K|)$, itt $|\Omega| = n$.

A 3.1. tétel alapján és adatstruktúra segítségével konstruáljuk meg azt az algoritmust, amely egy minimális kulcsot talál meg és időbonyolultsága lineáris (azaz arányos a K hosszúságával). Mindegyik attributumra, mely $B \cap \bar{B}_i$ -kban van, konstruálunk egy kapcsoló listát, amelyben mutatók vannak. Ezek mutatják az attributumot tartalmazó $B \cap \bar{B}_i$ -kat. Mindegyik $B \cap \bar{B}_i$ -ra is megadunk egy számlálót.

3.2. Algoritmus

INPUT: $K = \{B_1, \dots, B_m\}$ az $\Omega = \{1, \dots, n\}$ feletti *Sperner-rendszer* és B egy kulcs.

OUTPUT: $T \in H$, ahol $H^{-1} = K$

ADATSTRUKTÚRA:

- $K[1: m]$ a K elemeinek tömbje
- $M = \{1, \dots, m\}$ osztályozott halmaz
- B attributumok halmaza, amely egy kulcs (azaz $B \in L(H)$)
- $AT[1: n]$; $L[1: n]$; $M1[1: n]$, $M2[1: m]$, $C[1: m]$ munkatömbök

— $A1, A2, A3, B1, B2, D1, D2, M3, T$ munkaváltozók.

procedure *MINIKEY* 2(K, B):

KEZDET: $T \leftarrow 0$;

for $i \leftarrow 1$ until m do $C[i] \leftarrow 0$; for $i \leftarrow 1$ until n do begin
 $L[i] \leftarrow 0$; $AT[i] \leftarrow 1$ end;

for $i \leftarrow 1$ until m do
begin $B1 \leftarrow B \cap (\Omega \setminus K[i])$; $M2[i] \leftarrow B1$;
for each $\tau \in B1$ do
begin $C[i] \leftarrow C[i] + 1$; $L[\tau] \leftarrow L[\tau] \cup \{i\}$ end.
end;

for $i \leftarrow 1$ until n do $M1[i] \leftarrow M \setminus L[i]$; $D1 \leftarrow m$; $A3 \leftarrow 0$; $B2 \leftarrow m$;

CIKLUS: while $D1 \neq 0$ do

begin $D2 \leftarrow \min(1(C, B2))$; $A1 \leftarrow 1$;

for each $\tau \in M2(D2)$ do

begin if $AT[\tau] = 0$ then goto UTOLSO;

T1: if $AT[\tau] = 1 \wedge A1 = 1$ then

begin $T \leftarrow T \cup \{\tau\}$; $A1 \leftarrow 0$; $A2 \leftarrow \tau$;

for each $q \in L(A2)$ do

if $C[q] \neq 0$ then begin $A3 \leftarrow A3 + 1$; $C[q] = 0$ end;
goto UTOLSO

T2: end;

T3: $AT[\tau] \leftarrow 0$; $M3 \leftarrow L[\tau] \cap M1(A2)$;

T4: for each $q \in M3$ do if $C[q] \neq 0$ then $C[q] \leftarrow C[q] - 1$;

UTOLSO: empty

end;

$D1 \leftarrow m - A3$

end;

return T

Könnyen beláthatjuk, hogy KEZDET-metszetben konstruáljuk a $C[i]$ -számlálókat ($C[i] = |B \cap \bar{B}_i|$) az $L[i]$ -kapcsoló listákat, az $M1[i]$ -listákat és az $M2[i]$ -ket, amelyek tartalmazzák a $B \cap \bar{B}_i$ -kat. Az $L[i]$ -kapcsoló listában mutatók vannak, melyek az i -edik attributumot tartalmazó $B \cap \bar{B}_i$ -re mutatnak. Szemben, az $M1[i]$ -listában levő mutatók azokra a $B \cap \bar{B}_i$ -okra mutatnak, amelyek nem tartalmazzák az i -edik attributumot. $AT[i]$ jelenti, hogy ha $AT[i] = 0$, akkor az algoritmus törli az i -edik attributumot valamely G_τ -ből (a 3.2. tétel szerint). Azaz a kereső minimális kulcs nem tartalmazza ezt az attributumot. $A3$ egy olyan számláló, melyre ha $A3 = m$, akkor az algoritmus befejeződik.

Az $M1[i] \leftarrow M \setminus L[i]$ operátor $O(m)$ elemi operációt követel meg, hiszen $L[i]$ osztályozott lista ($\forall i: 1 \leq i \leq n$), tehát KEZDET-metszetben az algoritmus $O(n \cdot m)$ elemi operációt követel meg.

Belátható, hogy a CIKLUS ismétlődő száma nem nagyobb, mint $\min(n, m)$. A 3.2. tétel szerint ez az ismétlődő szám P . A $T1 - T2$ metszetben az algoritmus illeszti a τ attributumot (a 3.2. tételben ez az attributum $v(\min(G_i))$, ahol $1 \leq i \leq p$) a T -be és törli a $C[q]$ -számlálókat, itt $B \cap \bar{B}_q$ -k tartalmazzák a τ attributumot. $|L(A_2)| \leq m$ miatt a $T1 - T2$ metszetben az algoritmus $O(m)$ elemi operációt követel meg. $A1 = 0$ miatt nyilvánvaló, hogy mindegyik a CIKLUS ismétlésében a $T1 - T2$ metszet egyszer teljesül. A $T3 - T4$ metszetben az algoritmus törli a τ attributumokat, ame-

lyek $\min(G_i) \setminus v(\min(G_i))$ -hoz tartoznak, a $B \cap \bar{B}_q$ -kból, ezek nem tartalmazzák a $v(\min(G_i))$ -t, de tartalmazzák a τ attributumot. Könnyű belátni, hogy az $L[\tau] \cap M1(A2)$ $O(m)$ elemi operációt követel meg, mert $L[\tau]$ és $M1(A2)$ osztályzott listák. $|L[\tau] \cap M1(A2)| \leq m$ miatt a $T3-T4$ metszetben az algoritmus $O(m)$ elemi operációt követel meg. Világos, hogy $MIN1$ $O(m)$ elemi operációt követel meg. Mindegyik CIKLUS ismétlésében if $AT[\tau]=0$ then goto UTOLSO operátor teljesülése nem nagyobb, mint n -sor. Látható, hogy a $T1-T2$ metszet és a $T3-T4$ metszet ismétléseinek összege nem nagyobb, mint n . Tehát a CIKLUS metszetben az algoritmus $O(n \cdot m)$ elemi operációt követel meg a legrosszabb esetben.

Könnyen beláthatjuk, hogy a 3.2. tétel szerint az algoritmus egy minimális kulcsot meghatároz és időbonyolultsága $O(|K|)$. Itt K egy *Sperner-rendszer*, amely az antikulsok halmazának szerepét játssza. Azaz az időbonyolultsága arányos a K méretével.

3.1. Megjegyzés. Legyen adva $R = \{h_1, \dots, h_m\}$ az $\Omega = \{1, \dots, n\}$ feletti reláció. Legyen $E_{i\tau} = \{a \in \Omega : h_i(a) = h_\tau(a)\}$, ahol $1 \leq i \leq m$, $1 \leq \tau \leq m$ és $i \neq \tau$. Legyen $M = \{E_{i\tau} : \exists E_{st} : E_{i\tau} \subset E_{st}\}$. A 3.1. lemma szerint látható, hogy M az R antikulsainak halmaza. Vagyis adott R relációhoz a 3.1. algoritmus és a 3.2. algoritmus segítségével minimális kulcsokat találhatunk meg.

4. Algoritmusok a minimális kulcsok és antikulsok teljes halmazára

A jelen fejezetben két algoritmust konstruálunk. Egyik az adott minimális kulcsok halmazához minden antikulsot, a másik pedig az adott antikulsok halmazához minden minimális kulcsot megtalál.

Legyen adva $K = \{B_1, \dots, B_m\}$ az $\Omega = \{1, \dots, n\}$ feletti *Sperner-rendszer*. Meg akarjuk konstruálni K^{-1} -et. q -ra indukcióval konstruáljuk K_q -t ($q = 1, \dots, m$) úgy, hogy $K_q = \{B_1, \dots, B_q\}^{-1}$.

1. lépés: K_1 konstruálása: $K_1 = \{\Omega \setminus a : a \in B_1\} = \{B_1\}^{-1}$ nyilvánvalóan.

$q+1$ -edik lépés: K_{q+1} konstruálása.

Indukciós feltevésünk szerint $K_q = \{B_1, \dots, B_q\}^{-1}$ -t már megcsináltuk. Legyenek X_1, \dots, X_p azon elemei K_q -nak, melyek B_{q+1} -et tartalmazzák. Így

$$K_q = \{X_1, \dots, X_p\} \cup \{A \in K_q : B_{q+1} \not\subseteq A\}.$$

Jelölje F_q a $\{A \in K_q : B_{q+1} \not\subseteq A\}$ -t. $i = 1, \dots, p$ -re az 1. lépést használva konstruáljuk $\{B_{q+1}\}$ antikulsait X_i -n, azaz az X_i -nek B_{q+1} -et nem tartalmazó maximális részhalmazait. Jelöljük ezeket $A_1^i, \dots, A_{\tau_i}^i$ -vel ($i = 1, \dots, p$). Legyen

$$K_{q+1} = F_q \cup \{A_i^t : A_i^t \not\subset A, \text{ ha } A \in F_q, 1 \leq \tau \leq \tau_i, 1 \leq i \leq p\}.$$

4.1. TÉTEL. Mindegyik q -ra ($1 \leq q \leq m$) $K_q = \{B_1, \dots, B_q\}^{-1}$. Azaz

$$K_m = K^{-1}.$$

Bizonyítás. Az indukciós feltevést használva bebizonyítjuk, hogy $K_{q+1} = \{B_1, \dots, B_{q+1}\}^{-1}$. Két dolgot kell belátnunk:

a) egyrészt, hogy ha $A \in K_{q+1}$, akkor A maximális B_τ -k ($\tau = 1, \dots, q+1$) egyikét sem tartalmazó része Ω -nak.

b) másrészt, hogy minden olyan $A \subseteq \Omega$, amely maximális B_τ -k ($\tau = 1, \dots, q+1$) egyikét sem tartalmazó, eleme K_{q+1} -nak.

a) *bizonyítása.* Legyen $A \in K_{q+1}$. Ha $A \in F_q$, akkor A maximális B_1, \dots, B_q egyikét sem tartalmazó és $B_{q+1} \not\subseteq A$, tehát A maximális B_1, \dots, B_{q+1} egyikét sem tartalmazó része Ω -nak. Legyen $A \in K_{q+1} \setminus F_q$. Azaz $A = A_l^i$ valamely $1 \leq i \leq p$ -re és $1 \leq \tau \leq r_i$ -re. A konstrukcióból látható, hogy $B_l \not\subseteq A_l^i$ ($l = 1, \dots, q+1$). A_l^i antikulcsa $\{B_{q+1}\}$ -nek X_i -re nézve, tehát $A_l^i = X_i \setminus \{b\}$ valamely $b \in B_{q+1}$ -re és világos, hogy $B_{q+1} \subseteq A_l^i \cup \{b\}$. Ha $a \in \Omega \setminus X_i$, akkor indukciós feltevésünk szerint $A_l^i \cup \{a, b\} = X_i \cup \{a\}$ -hoz létezik olyan B_l ($1 \leq l \leq q$), amelyre $B_l \subseteq A_l^i \cup \{a, b\}$. $X_i \in K_q$ miatt X_i nem tartalmazza B_1, \dots, B_q -t. Tehát $a \in B_l$. Ha $(B_l \setminus a) \subseteq A_l^i$, akkor nyilvánvaló, hogy $B_l \subseteq A_l^i \cup \{a\}$. Így minden olyan B_l -re ($1 \leq l \leq q$), amelyre $B_l \subseteq X_i \cup \{a\}$ és A_l^i nem tartalmazza B_l -et, $b \in B_l$. Tehát $(B_l \setminus \{a, b\}) \subseteq A_l^i$. Azaz létezik olyan $A_1 \in F_q$, hogy $A_l^i \subset A_1$. Ez ellentmond annak, hogy $A \in K_{q+1} \setminus F_q$. Azaz van olyan B_l ($1 \leq l \leq q$), hogy $B_l \subseteq A_l^i \cup \{a\}$.

b) *bizonyítása.* Legyen A egy maximális B_τ -k ($\tau = 1, \dots, q+1$) egyikét sem tartalmazó része Ω -nak. Az indukciós feltevésünk szerint létezik olyan $Y \in K_q$, hogy $A \subseteq Y$.

1. eset. Ha $B_{q+1} \subseteq Y$, akkor Y nem tartalmazza B_1, \dots, B_{q+1} -et. A maximális B_τ -k ($\tau = 1, \dots, q+1$) egyikét sem tartalmazó része Ω -nak. Tehát $A = Y \cdot B_{q+1} \not\subseteq Y$ miatt $A \in F_q$, azaz $A \in K_{q+1}$.

2. eset. Ha $B_{q+1} \not\subseteq Y$, akkor $Y = X_i$ valamely $1 \leq i \leq p$ -re és $A \subseteq A_l^i$ valamely $1 \leq \tau \leq r_i$ -re. Ha létezik olyan $A_1 \in F_q$, hogy $A_l^i \subset A_1$, akkor világos, hogy A_1 nem tartalmazza B_1, \dots, B_{q+1} -et. Tehát $A \subset A_1$, ami ellentmond A definíciójának. Azaz $A_l^i \in K_{q+1}$ és nyilvánvaló, hogy A_l^i nem tartalmazza B_1, \dots, B_{q+1} -et. A definíciója szerint $A = A_l^i$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Látható, hogy a 4.1. tétel alapján K^{-1} meghatározása nem függ a $\{B_1, \dots, B_m\}$ sorozatsorrendjétől, mert K^{-1} és K halmazok egyértelműen meghatározzák egymást.

A 4.1. tétel szerint konstruáljuk a következő algoritmust.

4.1. *Algoritmus.* Minden antikulcs megkeresésére

INPUT: $K = \{B_1, \dots, B_m\}$ az $\Omega = \{1, \dots, n\}$ feletti *Sperner rendszer*

OUTPUT: M , ahol $M = K^{-1}$

ADATSTRUKTÚRA

— $K[1: m]$ a K elemeinek tömbje

— $M[1: p]$ a tömb tartalmazza a K^{-1} elemeit, itt $p = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

— $N[1: p]$ a tömb tartalmazza az A_l^i -kat.

— $A1, D1, D2, D3, D4$ munkaváltozók

procedure *ANTIKEYS* (K, M):

$M[1] \leftarrow \Omega$; $D1 \leftarrow 1$;

CIKLUS: for $i \leftarrow 1$ until m do

 T1 : begin $D2 \leftarrow 0$; $D3 \leftarrow 0$; for $\tau \leftarrow 1$ until $D1$ do

 begin if $K[i] \subseteq M[\tau]$ then for each $q \in K[i]$ do

 begin $D2 \leftarrow D2 + 1$; $N(D2) \leftarrow M[\tau] \setminus \{q\}$; goto UTOLSO1 end;

$D3 \leftarrow D3 + 1$; $M(D3) \leftarrow M[\tau]$;

```

UTOLSO1:    empty
T2   : end; D4 ← D3;
T3   : if D3=0 then begin D4 ← D2 for q ← 1 until D2 do
           M[q] ← N[q]; goto UTOLSO3 end;
T4   : for q ← 1 until D2 do
           begin A1 ← 1 for p ← 1 until D3 do
                   if N[q] ⊂ M[p] then begin A1 ← 0; goto UTOLSO2 end;
UTOLSO2:    if A1=1 then begin D4 ← D4+1; M(D4) ← N[q] end
           end;
UTOLSO3: D1 ← D4
           end.

```

Nyilvánvaló, hogy m a CIKLUS ismétlődő száma. Jelölje K_0 az Ω -t. Legyen $K_q = \{X_1, \dots, X_p\} \cup F_q$, ahol $B_{q+1} \subseteq X_i (\forall i: 1 \leq i \leq p)$ és $F_q = \{A \in K_q: B_{q+1} \not\subseteq A\}$. Legyen $\{X_i \setminus a: a \in B_{q+1}\} = \{A_1^i, \dots, A_{s_i}^i\}$, ahol $1 \leq i \leq p$. Könnyen beláthatjuk, hogy a CIKLUS $q+1$ -es ismétléséhez a $T1-T2$ metszetben N tömb tartalmazza az A_i^i -kat ($1 \leq i \leq p, 1 \leq \tau \leq s_i$) és M tömb tartalmazza a F_q -t. Mivel K és K^{-1} halmazok egyértelműen meghatározzák egymást, $\{X_1, \dots, X_p\} \neq \emptyset$ (azaz $N \neq \emptyset$). A $T3$ metszetben ha $F_q = \emptyset$, akkor M tömb tartalmazza az N tömböt. (Azaz az M tartalmazza a K_{q+1} -et). A $T4$ -UTOLSO3 metszetben ha $F_q \neq \emptyset$, akkor az algoritmus illeszti az M tömbbe az A_i^i -ket, amelyekre $A_i^i \not\subseteq A (\forall A \in F_q)$. Világos, hogy a 4.1. tétel szerint az algoritmus minden antikulsot megtalál. Legyen $r_q = p$ és jelölje l_q a K_q elemeinek számát, ekkor a $q+1$ -edik ismétlésében CIKLUS-nak a legrosszabb esetben az algoritmus $O(n^2 r_q t_q)$ elemi operációt követel meg, ahol $t_q = \begin{cases} l_q - r_q, & \text{ha } l_q > r_q \\ 1, & \text{ha } l_q = r_q \end{cases}$. Nyilvánvaló, hogy a CIKLUS első ismétlésében algoritmus csak $O(n)$ elemi operációt igényel. Tehát az algoritmus $O(n^2 \sum_{q=0}^{m-1} r_q t_q)$ elemi operációt követel meg.

4.1. KÖVETKEZMÉNY. A 4.1. algoritmus az antikulsok teljes halmazát meghatározza és időbonyolultsága $O(n^2 \sum_{q=0}^{m-1} r_q t_q)$.

Látható, hogy ha k jelöli az antikulsok számát (azaz $k = I_m$), akkor az esetekben, amelyekre $l_q \leq I_m$ minden q -hoz ($1 \leq q \leq m-1$) (azaz K_q elemeinek száma nem nagyobb, mint K^{-1} elemeinek száma) az algoritmus időbonyolultsága nem nagyobb mint $O(n^2 k^2 m)$. Érdekes, hogy sok esetben, ha K kevés minimális kulcsot tartalmaz, akkor az algoritmus nagyon hatékony. Ekkor időbonyolultsága arányos Ω -val. Itt $|\Omega| = n$. A K^{-1} keresett antikulsok halmaza alapján a következő relációt (mátrixot) konstruáljuk. Tételezzük fel, hogy $K^{-1} = \{C_1, \dots, C_l\}$. Legyenek az R reláció sorai (h_0, h_1, \dots, h_l) a következők: $h_0(a) = 0 (\forall a \in \Omega\text{-ra})$. Ha olyan i , hogy $1 \leq i \leq l$, akkor

$$h_i(a) = \begin{cases} 0, & \text{ha } a \in C_i \\ i, & \text{ha } a \notin C_i. \end{cases}$$

[5] szerint R reláció (mátrix) reprezentálja a K -t (azaz $K_{FR} = K$). Vagyis adott minimális kulcsok K halmazára ennek az algoritmusnak alapján olyan reláció (mátrixot) konstruálunk, amely K -t reprezentálja.

A következő példát vizsgáljuk: Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $K = \{(1, 2), (2, 3, 4), (2, 4, 5), (4, 6)\}$. A 4.1. algoritmus szerint $K_1 = \{(1, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 4, 5, 6)\}$, $K_2 =$

$= \{(1, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 5, 6), (2, 4, 5, 6)\}; \quad K_3 = \{(1, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 5, 6), (2, 4, 6)\};$
 $K_4 = \{(2, 3, 5, 6), (1, 3, 4, 5), (1, 3, 5, 6), (2, 4)\}.$ Tehát $K^{-1} = K_4.$

Tekintsük a következő relációt (mátrixot):

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Attributumok:} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ R = & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}$$

[5] szerint R reprezentálja K -t.

Most értékeljük a 4.1. algoritmus olyan időbonyolultságát, amely csak $|\Omega|$ -tól függ. [6]-ban az antikulusok halmazát a következőképpen konstruáltuk:

Legyen $\Omega = X_1 \cup \dots \cup X_m \cup W$ az Ω particiója, ahol $m = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ és $|X_i| = 3$ ($1 \leq i \leq m$). Legyen

$$K = \{B: |B| = 2, B \subseteq X_i, \text{ valamely } i\}, \text{ ha } |W| = 0;$$

$$K = \{B: |B| = 2, B \subseteq X_i (\text{valamely } 1 \leq i \leq m-1) \text{ vagy } B \subseteq X_m \cup W\}, \text{ ha } |W| = 1;$$

$$K = \{B: |B| = 2, B \subseteq X_i (\text{valamely } 1 \leq i \leq m) \text{ vagy } B = |W|\}, \text{ ha } |W| = 2.$$

Könnyen belátható, hogy $K^{-1} = \{A: |A \cap X_i| = 1, \forall i\} \text{ ha } |W| = 0;$

$$K^{-1} = \{A: |A \cap X_i| = 1 (1 \leq i \leq m-1) \text{ és } |A \cap (X_m \cup W)| = 1\}, \text{ ha } |W| = 1;$$

$$K^{-1} = \{A: |A \cap X_i| = 1 (1 \leq i \leq m) \text{ és } |A \cap W| = 1\}, \text{ ha } |W| = 2.$$

Legyen $f_3: N \rightarrow N$ (N természetes számok halmaza) függvény úgy, hogy:

$$f_3(n) = \begin{cases} 3^{n/3}, & \text{ha } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 3^{\lfloor n/3 \rfloor} \times 4/3, & \text{ha } n \equiv 1 \pmod{3} \\ 3^{\lfloor n/3 \rfloor} \times 2, & \text{ha } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Látható, hogy $f_3(n)$ a K^{-1} elemeinek száma. Világos, hogy $f_3(n) > 3^{n/4}$ ($\forall n \geq 3$), $n=1$ és $n=2$ triviális, a K elemeinek száma nem nagyobb, mint $n+2$.

Azaz ebben az esetben az Ω tetszőleges attributumok halmazához konstruálhatunk egy olyan K Sperner rendszert (input), amely elemeinek száma arányos $|\Omega|$ -val, de K^{-1} elemeinek száma (output) exponenciális az Ω elemeinek számában. Ebben az esetben könnyű belátni, hogy a 4.1. algoritmus időbonyolultsága exponenciális. A 4.1. következmény alapján láthatjuk, hogy a 4.1. algoritmus időbonyolultsága exponenciális az attributumok számában. Azaz létezik olyan k szám, hogy $k > 3^{1/4}$, időbonyolultsága $O(k^n)$.

Most azt az algoritmust konstruáljuk, amely minden minimális kulcsot megtalálja. Először a következő tételt bizonyítjuk:

4.2. TÉTEL. Legyen adva H az Ω feletti Sperner-rendszer és $H^{-1} = \{B_1, \dots, B_m\}$ az antikulusok halmaza H -nak, $T \subseteq H$. Ekkor $T \subset H$ és $T \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan B ($B \subseteq \Omega$), melyre $B \in T^{-1}$ és $B \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leq i \leq m$).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $T \subset H$ és $T \neq \emptyset$. Ekkor van $A \in H \setminus T$ és mivel H *Sperner-rendszer* és $T \neq \emptyset$, tehát $T \cup A$ is *Sperner-rendszer*. Jelölje B az olyan legnagyobb halmazt, melyre $A \subseteq B$ és $T \cup B$ *Sperner-rendszer*. Nyilvánvaló, hogy B mindig létezik és könnyű belátni, hogy az antikulcsok halmazának definíciója szerint $B \in T^{-1}$. Másrészt, az antikulcsok halmazának definíciója alapján ha $A \in H$, akkor $A \not\subseteq B_i$ minden i -re ($1 \leq i \leq m$). Tehát $A \subseteq B$ miatt $B \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leq i \leq m$).

Megfordítva, tételezzük fel, hogy létezik olyan B , hogy $B \in T^{-1}$ és $B \not\subseteq B_i$ minden B_i -re ($B_i \in H^{-1}$). Ekkor T^{-1} létezése miatt $T \neq \emptyset$. Az antikulcsok halmazának definíciója szerint minden C -re ($C \in T$), B nem tartalmazza C -t. Látható, hogy ha létezik olyan B_i , hogy $B_i \in H$ és $B_i \subset B$, akkor az antikulcsok halmazának definíciója szerint B egy kulcs (azaz $B \in L(H)$). Ha $H^{-1} \cup B$ *Sperner-rendszer*, akkor a 3.1. tétel szerint van olyan F lezárási operáció, melyre $H = K_F$. Ekkor ha $F(B) \neq \Omega$, akkor a 3.1. lemma szerint van olyan B_i , melyre $B_i \in H^{-1}$ és $F(B) \subseteq B_i$. Tehát $B \subseteq B_i$, ez ellentmond annak, hogy $B \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leq i \leq m$). Azaz $F(B) = \Omega$, vagyis B egy kulcs. Tehát világos, hogy létezik A úgy, hogy $A \subseteq B$ és $A \in H \setminus T$. Azaz $T \subset H$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Legyen adva $K = \{B_1, \dots, B_m\}$ *Sperner-rendszer* az Ω felett. H -t akarjuk konstruálni ($H^{-1} = K$) indukcióval a következőképpen:

1. lépés. Egy algoritmussal, amely egy minimális kulcsot talál meg, konstruáljuk az A_1 minimális kulcsot. Legyen $K_1 = \{A_1\}$.

$i+1$ -edik lépés. Ha van olyan $B \in K_i^{-1}$ melyre $B \not\subseteq B_\tau$ ($\forall \tau: 1 \leq \tau \leq m$), akkor egy algoritmus segítségével, amely megtalál egy minimális kulcsot, konstruálunk egy olyan A_{i+1} minimális kulcsot, melyre $A_{i+1} \subseteq B$. Utána legyen $K_{i+1} = K_i \cup A_{i+1}$. Ha ilyen B nincs, legyen $H = K_i$.

A 4.2. tétel alapján könnyű belátni, az alábbi következményt.

4.2. KÖVETKEZMÉNY. Van olyan p természetes szám, melyre $K_p = H$.
Most megadjuk az algoritmust a 4.2. következmény segítségével.

4.2. Algoritmus. Minden minimális kulcs megtalálására

INPUT: $K = \{B_1, \dots, B_m\}$ az $\Omega = \{1, \dots, n\}$ feletti *Sperner-rendszer*

OUTPUT: M , ahol $M^{-1} = K$ (Azaz M minimális kulcsok halmaza)

ADATSTRUKTURA

— $K[1:m]$ a K elemeinek tömbje

— $M[1:p]$ a tömb tartalmazza a minimális kulcsok halmazát, ahol $p = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

— $N[1:p]$, $L[1:p]$ munkatömbök.

— $A1, D1, D2, D3, D4, D5, D6, B, KEY$ munkaváltozók.

— **MINIKEY2** procedure egy minimális kulcsot keres

Procedure **MINIKEYSET** (K, M):

KEZDET: $D5 \leftarrow 1$; select **ELEMENT** from $(\Omega \setminus K[1])$; $B \leftarrow K[1] \cup \text{ELEMENT}$;
 $M[1] \leftarrow \text{MINIKEY2}(K, B)$; $KEY \leftarrow M[1]$; $L[1] \leftarrow \Omega$; $D1 \leftarrow 1$; $D2 \leftarrow 0$;
 $D3 \leftarrow 0$;

CIKLUS1: for $i \leftarrow 1$ until $D1$ do

begin if $KEY \subseteq L[i]$ then for each $q \in KEY$ do

begin $D2 \leftarrow D2 + 1$; $N(D2) \leftarrow L[i] \setminus \{q\}$; goto **UTOLSO1** end;

$D3 \leftarrow D3 + 1$; $L(D3) \leftarrow L[i]$;

```

UTOLSO1: empty
          end;  $D4 \leftarrow D3$ 
          if  $D3 = 0$  then begin  $D4 \leftarrow D2$ ; for  $q \leftarrow 1$  until  $D2$ 
                        do  $L[q] \leftarrow N[q]$ ; goto UTOLSO3 end;
          for  $q \leftarrow 1$  until  $D2$  do
            begin  $A1 \leftarrow 1$ ; for  $p \leftarrow 1$  until  $D3$  do
                  if  $N[q] \subset L[p]$  then begin  $A1 \leftarrow 0$ ;
                        goto UTOLSO2 end;
          UTOLSO2:   if  $A1 = 1$  then begin  $D4 \leftarrow D4 + 1$ ;  $L(D4) \leftarrow N[q]$  end
          end;
          UTOLSO3:  $D1 \leftarrow D4$ ;
                   $D6 \leftarrow D1$ ;
          CIKLUS2: for  $i \leftarrow 1$  until  $D1$  do
                  for  $p \leftarrow 1$  until  $m$  do
                    if  $L[i] \neq K[p]$  then
                      begin  $KEY \leftarrow \text{MINIKEY2}(K, L[i])$ ;  $D5 \leftarrow D5 + 1$ ;
                             $M(D5) \leftarrow KEY$ ;  $D1 \leftarrow D6$ ; goto CIKLUS1
                      end

```

$K_{i+1} = K_i \cup A_{i+1}$ miatt a K_{i+1}^{-1} -et a K_i^{-1} -ből határozza meg. Látható, hogy a KEZDET metszetben $D5$ tartalmazza a minimális kulcsok számát. $M[1]$ az első minimális kulcs. A CIKLUS1—UTOLSO3 metszetben a 4.1. algoritmus analóg, az algoritmus a K_{i+1}^{-1} -t keresi meg ($\forall i \geq 0$). A CIKLUS2 metszetben az algoritmus meghatározza, hogy van-e $B \in K_{i+1}^{-1}$ és $B \subseteq B_\tau$ minden τ -ra ($1 \leq \tau \leq m$), itt $B = L[i]$. ha van ilyen B , a 4.1. tétel szerint legyen $H = K_p$ (azaz $K_p^{-1} = K$). Nem nehéz belátni, hogy ha $B \in K_{i+1}^{-1}$ ($0 \leq i \leq p-1$) és van olyan τ , melyre $1 \leq \tau \leq m$ és $B \not\subseteq B_\tau$, akkor $B \subseteq B_l$ minden l -re ($1 \leq l \leq m$). Tehát a 4.3. tétel alapján a 4.2. algoritmus minimális kulcsok teljes halmazát megtalálja.

A 4.1. algoritmushoz hasonló bizonyítással látható, hogy ha k jelöli a minimális kulcsok számát (azaz k a CIKLUS1—UTOLSO3 metszet ismétlődő száma) akkor CIKLUS1—UTOLSO3 metszetben az algoritmus $O(n^2 \sum_{q=0}^{k-1} r_q t_q)$ elemi operációt, a CIKLUS2 metszetben $O(n \cdot m \sum_{q=1}^k l_q)$ elemi operációt igényel a legrosszabb esetben. Nyilvánvaló, hogy $l_k = m$. Tehát

4.3. KÖVETKEZMÉNY. A 4.2. algoritmus a minimális kulcsok teljes halmazát határozza meg és időbonyolultsága $O(n(\sum_{q=1}^{k-1} (ml_q + nr_q t_q) + m^2 + n))$.

Látható, hogy a 4.2. algoritmus nagyon hatékony, amikor a minimális kulcsok száma kevés (van egy vagy néhány minimális kulcs).

Azokban az esetekben amelyekre $l_q \leq m$ ($\forall q: 1 \leq q \leq k$) (azaz K_q^{-1} elemeinek száma nem nagyobb, mint a K elemeinek száma) könnyen látható, hogy az algoritmus időbonyolultsága nem nagyobb, mint $O(n^2 m^2 k)$.

Értékeljük a 4.2. algoritmus olyan időbonyolultságát, amely csak $|\Omega|$ -tól függ. Könnyen beláthatjuk, hogy mivel a 4.1. algoritmus időbonyolultsága exponenciális az attributumok számában, a 4.2. algoritmus időbonyolultsága is ilyen.

A következő példát vizsgáljuk: Legyen

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A 3.1. megjegyzés szerint $M = \{E_{13}, E_{34}, E_{45}\}$, ahol $E_{13} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $E_{34} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $E_{45} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$. M az R antikulcsainak halmaza. A 4.2. algoritmus szerint $MINIKEY2(M, (1, 2, 3, 4, 5, 6))$ segítségével $K_1 = \{(2, 3, 6)\}$ egy minimális kulcs. Utána $K_1^{-1} = \{(1, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 4, 5, 6), (1, 2, 3, 4, 5)\}$. $K_1^{-1} = M$ miatt K_1 a minimális kulcsok halmaza. Ebben az esetben a minimális kulcsok halmaza csak egy minimális kulcsot tartalmaz.

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan véges gráf, ahol V a szögpontok, E az élek halmaza, $V \neq \emptyset$.

G élelfogásának nevezzük egy $S \subseteq V$ részhalmazát, ha bármely éle G -nek illeszkedik S valamely szögpontjához (azaz minden $e \in E$ -re $e \cap S \neq \emptyset$).

Élelfogás-probléma

INPUT $G = (V, E)$ gráf, $k \leq |V|$

KÉRDÉS, van-e $S \subseteq V$ élelfogás, melyre $|S| \leq k$. Az élelfogás-probléma NP-teljes ([1]).

Állítjuk, hogy a következő probléma NP-teljes.

Antikulcs-probléma

NP-UT: $\Omega = \{1, \dots, n\}$, $K = \{B_1, \dots, B_m\}$ egy

Sperner-rendszer Ω -n, $k \leq n$

KÉRDÉS: van-e $A \subseteq \Omega$, $|A| \leq k$, melyre $A \not\subseteq B_i$ ($i = 1, \dots, m$), azaz van-e legfeljebb k -elemű kulcs, ha K az antikulcsok halmaza.

Először lássuk, hogy az antikulcs-probléma NP-beli.

Ha $A \subseteq \Omega$ adott, akkor annak ellenőrzése, hogy $A \not\subseteq B_i$ minden $i = 1, \dots, m$ -re nyilván polinomidejű nondeterminisztikus algoritmusunk tehát a következő:

- a sejtő modul megsejt egy $A \subseteq \Omega$ -t;
- az ellenőrző modul polinomidőben ellenőrzi A -t.

Most megmutatjuk, hogy az élelfogás-probléma polinomidőben visszavezethető az antikulcs problémára.

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $k \leq |V|$.

$$\Omega = V, \quad K = \{\Omega \setminus e : e \in E\}.$$

Ebbe az (Ω, K, k) antikulcs-problémára igen a válasz akkor és csak akkor, ha a $(G = (V, E), k)$ élelfogás-problémára igen a válasz, mert ha $A \subseteq \Omega$, $|A| \leq k$ és $A \not\subseteq B$ minden $B \in K$ -ra, akkor $A \cap e \neq \emptyset$ ($\forall e \in E$) K definíciója szerint és fordítva, ha $S \subseteq V$ élelfogás, akkor $S \not\subseteq B$, ha $B \in K$. A visszavezetés nyilván polinomidejű.

Az antikulcs-probléma tehát legalább olyan nehéz, mint az élelfogás-probléma; ez utóbbi NP-teljes, így az antikulcs probléma NP-nehéz; de láttuk, hogy NP-beli, tehát NP-teljes.

Végezetül nagyon megköszönöm DR. DEMETROVICS JÁNOSNAK és HANNÁK LÁSZLÓNAK a cikk írásához nyújtott értékes segítséget.

IRODALOM

- [1] AHO, A. V., HOPCROFT, J. E. and ULLMAN, J. D., *The Design and Analysis of Computer Algorithms* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974).
- [2] ARMSTRONG, W. W., "Dependency Structures of Data base Relationships", *Information Processing* 74, North-Holland Publ. Co. (1974) 580—583.
- [3] CODD, E. F., "Relational model of data for large shared data banks", *Communication of the ACM* 13 (1970) 377—384.
- [4] DEMETROVICS, J., "On the equivalence of candidate keys with Sperner systems", *Acta Cybernetica* 4 (1979) 247—252.
- [5] DEMETROVICS, J., „Reláció adatmodell logikai és strukturális vizsgálata”, *MTA SZTAKI Tanulmányok*, Budapest, 114 (1980).
- [6] THI, V. D., "Remarks on closure operations", *MTA SZTAKI Közlemények*, Budapest, 30 (1984) 73—87.

(Beérkezett: 1985. szeptember 9.)

VU DUC THI
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U. 18.

ON ANTIKEYS OF THE RELATIONAL DATAMODEL

THI V. D.

The relational model which was defined by E. F. CODD is one of the possible models of a data base. The minimal keys and antikeys play important roles for the logic and structural investigation of this model. In [4], the equivalence of minimal keys with *Sperner systems* was proved. Sets of antikeys are also *Sperner systems*.

The main purpose of this paper is to give the following results: We construct two algorithms (one of as linear) which find one minimal key, one algorithm that finds the set of all minimal keys for given set of antikeys. For given set of minimal keys we construct also an algorithm which finds the set of all antikeys. Finally, for given set of antikeys it is shown that the problem of deciding whether or not there is a key having cardinality not greater than a given integer is NP-complete.

MAXIMUM LIKELIHOOD BECSLÉSEK ASZIMPTOTIKUS NEM NORMALITÁSÁRÓL

VERES SÁNDOR

Budapest

Sztochasztikus folyamatok paramétereinek maximum likelihood becslésénél előfordulhat, hogy a becslések aszimptotikus eloszlása csak feltételesen normális, ami a becslések aszimptotikus nem normalitását eredményezheti. A dolgozatban olyan általános módszerek kerülnek bemutatásra, amelyek a maximum likelihood becslések aszimptotikus viselkedésének felderítését teszik lehetővé.

1. Bevezetés

Gyorsan változó folyamatok paramétereinek maximum likelihood (ML) becslésénél vannak esetek, amelyeknél a becslések aszimptotikusan nem normális eloszlásúak. Diszkrét idejű esetben ennek a jelenségnek a bemutatása szerepel pl. HEYDE [9] és BASAWA és RAO [2] munkáiban.

Ennek a dolgozatnak a célja kettős. Egyrészt megadjuk az aszimptotikus lokális feltételes normalitás definícióját és bizonyítunk egy paraméterezett diffúziós folyamatokra vonatkozó tételt. A bizonyítás egy önmagában is érdekes centrális határeloszlás tételen alapul (3.2. tétel). Másrészt felvázoljuk az ML becslések aszimptotikus viselkedése általánosabb tárgyalásának lehetséges módját, ahol sztochasztikus aszimptotikus likelihood függvények és martingál centrális határeloszlás tételek játszhatják a főszerepet (lásd 5. szakasz). A tárgyalásmódra alapvetően a martingálos megközelítés a jellemző.

Tekintsük a $\xi_t(\theta)$, $t=0, 1, \dots$, paraméterezett sztochasztikus folyamatokat, ahol a θ paraméterek valamely $\Theta \subset R^k$ nyílt halmaz elemei lehetnek és $\xi_t(\theta) \in R^p$, $t \in \mathbb{N}$, $\theta \in \Theta$. Feltesszük, hogy létezik a $(\xi_0(\theta), \dots, \xi_t(\theta))$ eloszlásának $f_t(x_t; \theta)$, $x_t = (x_0, \dots, x_t)$, $x_t \in R^p$, $i=1, 2, \dots$, sűrűségfüggvénye minden $t=0, 1, 2, \dots$ -re. Továbbá az $f_t(x_t; \theta)$, $t=0, 1, \dots$ legyenek θ szerint kétszer folytonosan deriválhatók a Θ -n és teljesüljön a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f_t(x_0, \dots, x_t; \theta) = \int_{R^p} \frac{\partial}{\partial \theta} f_t(x_0, \dots, x_t, x_{t+1}; \theta) dx_{t+1}, \quad t=0, 1, \dots$$

regularitási feltétel.

Bármely $\theta \in \Theta$ paraméter mellett bevezetjük az $F_t(\theta) = \sigma(\xi_0(\theta), \dots, \xi_t(\theta))$, $t=0, 1, \dots$, σ -algebra családot. A loglikelihood függvényt az $L_t(\theta; \theta_0) = \log f_t(\xi_0(\theta_0), \dots, \xi_t(\theta_0); \theta)$ -val definiáljuk. Az ML becslések viselkedésének aszimptotikus elméletében fontos szerepet játszik a következő

1.1. LEMMA. A sűrűségfüggvényekre vonatkozó fenti feltevések mellett az

$$\eta_t(\Theta_0) = \frac{\partial}{\partial \Theta} L_t(\Theta; \Theta_0)|_{\Theta=\Theta_0}$$

jelöléssel az $(\eta_t(\Theta_0), F_t(\Theta_0))$ folyamat martingál.

A Fisher-féle információs mátrix általánosítása az $(\eta_t(\Theta_0), F_t(\Theta_0))$ martingál feltételes varianciája:

$$I_t(\Theta_0) = \sum_{i=0}^t E[(\eta_{i+1}(\Theta_0) - \eta_i(\Theta_0))^* (\eta_{i+1}(\Theta_0) - \eta_i(\Theta_0)) | F_i(\Theta_0)],$$

$t=0, 1, 2, \dots$, ahol az $\eta_0(\Theta_0)=0$ értelmezést használjuk. Jelöljük a Fisher-féle információs mátrixokat $\tilde{I}_t(\Theta_0)=EI_t(\Theta_0)$ -val. Az $L_t(\Theta; \Theta_0)$ második deriváltjai alkotják a $H_t(\Theta_0)=\frac{\partial}{\partial \Theta \partial \Theta^*} L_t(\Theta; \Theta_0)|_{\Theta=\Theta_0}$ Hesse-mátrixot. Könnyen belátható, hogy teljesül az

$$\begin{aligned} E[(\eta_{t+1}(\Theta_0) - \eta_t(\Theta_0))^* (\eta_{t+1}(\Theta_0) - \eta_t(\Theta_0)) | F_t(\Theta_0)] = \\ = E(H_{t+1}(\Theta_0) - H_t(\Theta_0) | F_t(\Theta_0)) \end{aligned}$$

azonosság.

Mivel a folytonos idejű esetben azok a ξ_t folyamatok, amik által generált mérték abszolút folytonos a Wiener-mértékre nézve reprezentálhatók egy $\alpha_s(\xi)$ nemanticipatív funkcionállal

$$\xi_t = \int_0^t \alpha_s(\xi) ds + W_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad P\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi) dt < \infty\right) = 1$$

alakban, ezért a továbbiakban a paraméterezett diffúziós folyamatok esetére szorítkozunk.

Legyen az (Ω, F, P) teljes valószínűségi mezőn megadva az $(F_t)_{t \geq 0}$ nemcsökkenő σ -algebra család és egy $(W_t, F_t)_{t \geq 0}$ Wiener-folyamat. A következőkben olyan $(\xi_t(\Theta), F_t)_{t \geq 0}$ diffúziós folyamatokat fogunk tekinteni, amik erős megoldásai valamely

$$d\xi_t = S(\Theta, t, \xi) dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0, \quad \Theta \in \Theta$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek, ahol az $S(\Theta, t, x)$ nemanticipatív funkcionálok a szokásos Lipschitz-féle feltételnek tesznek eleget (lásd [11] 4.6. tételben). Jelöljük a W_t Wiener-folyamat és a $\xi_t(\Theta)$ folyamat által a $(C[0, T], B_T)$ mérhető téren meghatározott valószínűségi mértékeket μ_W^t és $\mu_{\xi(\Theta)}^t$ -val. Feltesszük, hogy

$P\left(\int_0^T \|S(\Theta, t, \xi(\Theta))\|^2 dt < \infty\right) = 1, \quad \Theta \in \Theta$ teljesül. Ismeretes, hogy ekkor a

$$\frac{d\mu_{\xi(\Theta)}^t}{d\mu_W^t}(\xi(\Theta)) = \exp\left\{\int_0^t S(\Theta, s, \xi(\Theta))^* d\xi_s(\Theta) - \frac{1}{2} \int_0^t \|S(\Theta, s, \xi(\Theta))\|^2 ds\right\},$$

$0 \leq t \leq T$, folyamat martingál az $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ σ -algebra családra nézve. Az

$$L_t(\Theta; \Theta_0) = \log \frac{d\mu_{\xi}^t(\Theta)}{d\mu_w^t}(\xi(\Theta_0)) = \int_0^t S(\Theta, s, \xi(\Theta_0))^* d\xi_s(\Theta_0) - \\ - \frac{1}{2} \int_0^t \|S(\Theta, s, \xi(\Theta_0))\|^2 ds$$

véletlen függvényt loglikelihood függvénynek nevezzük. Jelöljük $L_2[0, T]$ -vel azoknak az $(f_t, F_t)_{0 \leq t \leq T}$ véletlen függvényeknek a terét, amikre $P\left(\int_0^T \|f_t\|^2 dt < \infty\right) = 1$, és az $L_2[0, T]$ -ben sztochasztikus deriválhatóság definícióját lásd pl. [3] 229. oldalán. Ekkor teljesül a következő

1.2. LEMMA. Ha $S(\Theta, t, \xi(\Theta_0))$, $t \in [0, T]$, véletlen függvény Θ szerint $L_2[0, T]$ -ben sztochasztikusan deriválható, és az $\frac{\partial S}{\partial \Theta} \Big|_{\Theta=\Theta_0} = \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))$, $0 \leq t \leq T$, deriváltra

$$P\left(\text{Sp} \int_0^T \|\dot{S}(\Theta_0, s, \xi(\Theta_0))\|^2 ds < \infty\right) = 1$$

teljesül, akkor az

$$\eta_t(\Theta_0) = \frac{d}{d\Theta} L_t(\Theta; \Theta_0) \Big|_{\Theta=\Theta_0}, \quad t \in [0, T],$$

kifejezéssel definiált $(\eta_t(\Theta_0), F_t)_{0 \leq t \leq T}$ folyamat martingál.

Bizonyítás.

$$\frac{d}{d\Theta} \left(\int_0^t S(\Theta, s, \xi(\Theta_0))^* d\xi_s(\Theta_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \|S(\Theta, s, \xi(\Theta_0))\|^2 ds \right) \Big|_{\Theta=\Theta_0} = \\ = \int_0^t (\dot{S}(\Theta_0, s, \xi(\Theta_0)), S(\Theta_0, s, \xi(\Theta_0))) dt + \int_0^t (\dot{S}(\Theta_0, s, \xi(\Theta_0)), dW_s) - \\ - \frac{1}{2} \int_0^t 2(\dot{S}(\Theta_0, s, \xi(\Theta_0)), S(\Theta_0, s, \xi(\Theta_0))) ds = \int_0^t (\dot{S}(\Theta_0, s, \xi(\Theta_0)), dW_s),$$

ami a feltételek és a sztochasztikus integrál alapvető tulajdonsága miatt martingál.

Tegyük fel, hogy az $(\eta_t(\Theta), F_t)$ folyamat négyzetesen integrálható martingál, amire $\sup_{0 \leq t \leq T} E\|\eta_t(\Theta)\|^2 < \infty$ teljesül. Tekintsük az $(\eta_t(\Theta)^* \eta_t(\Theta), F_t)$ mátrixértékű folyamat általánosabb értelemben vett Doob–Meyer-felbontását (lásd [11] 5.2 tételét), amely szerint az

$$\eta_t(\Theta)^* \eta_t(\Theta) = m_t(\Theta) + I_t(\Theta)$$

alakban írható, ahol az $(m_t(\Theta), F_t)$ egy mátrixértékű martingál és az $(I_t(\Theta), F_t)$ folyamat komponensei jobbról folytonos növekvő folyamatok különbségeként állít-

hatók elő. A fentiek alapján az

$$E((\eta_t(\Theta) - \eta_s(\Theta))^* (\eta_t(\Theta) - \eta_s(\Theta)) | F_s) = E(I_t(\Theta) - I_s(\Theta) | F_s), \quad P \text{ m.m.},$$

$0 \leq s \leq t \leq T$, teljesül és $I_t(\Theta)$ a diszkrét időben is definiált általánosított Fisher-információ megfelelője folytonos időben.

A rövidebb írásmód kedvéért a $\mu_{\xi(\Theta)}$ helyett gyakran μ_Θ -t fogunk írni, és valamely $a(T)$ kifejezésre az $a(T) \rightarrow b$ a $T \rightarrow \infty$ melletti konvergenciát jelöli. A következőkben gyakran használt

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} L(V(T) | \Gamma) = N(0, \Gamma)$$

írásmód a

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} E(\exp(iu^* V(T)) | \Gamma) = \exp\left(-\frac{1}{2} u^* \Gamma u\right)$$

konvergencia teljesülését jelenti bármely $u \in R^p$ mellett. Ha $\Gamma = 0$, akkor $N(0, \Gamma)$ az 1 valószínűséggel 0 valószínűségi változó eloszlását jelöli. Dolgozatunkban A^* jelöli az A mátrix transzponáltját és $\|A\|^2 = A^* A$.

2. Feltételes lokális aszimptotikus normalitás

A következő definíció két szempontból jelent általánosítást a lokális aszimptotikus normalitás (LAN) szokásos definíciójával (IBRAGIMOV és HASZMINSZKIJ [15] vagy BASAWA és RAO [2]) szemben. Egyrészt megengedjük, hogy a szereplő Γ mátrix valószínűségi változó lehet, másrészt azt is megengedjük, hogy a Γ szinguláris pozitív szemidefinit értékeket vegyen fel.

Jelöljük mind a folytonos, mind a diszkrét esetben a $\xi_0^T(\Theta) = \{\xi_s(\Theta), 0 \leq s \leq T\}$ folyamat által a trajektóriák megfelelő mérhető terén generált mértéket μ_Θ^T -val. Tehát a bevezetésben említett diszkrét idejű esetben az $(\prod_{i=0}^T R_i, \prod_{i=0}^T B_i)$, $R_i = R^p$, $B_i = B^p$ $i=0, 1, \dots, T$, ahol B a valós számok R halmazának Borel σ -algebrája, a folytonos idejű esetben pedig a $(C[0, T]^p, B_p^T)$ mérhető tereken értelmezzük a μ_Θ^T mértékeket.

2.1. DEFINÍCIÓ. A $\{\mu_\Theta, \Theta \in \Theta\}$ mérték családot feltételesen aszimptotikusan lokálisan normálisnak (CLAN) nevezzük a Θ_0 -ban, ha létezik olyan $\{k_T(\Theta_0)\}_{T \geq 0}$ számsorozat és $\Gamma = \Gamma(\Theta_0)$ F_0 -mérhető pozitív szemidefinit mátrixértékű valószínűségi változó, hogy lehetséges a

$$(2.1) \quad \log \frac{d\mu_{\Theta_0 + k_T^{-1/2}(\Theta_0)u}^T}{d\mu_{\Theta_0}^T}(\xi(\Theta_0)) = \Delta_T(\Theta_0, \xi(\Theta_0))^* u - \frac{1}{2} u^* \Gamma u + \alpha_T(\Theta_0, u, \xi(\Theta_0))$$

előállítás és bármely korlátos $B \subset R^k$ halmazon $u \in B$ szerint egyenletesen teljesülnek a következő konvergenciák:

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} L(\Delta_T(\Theta_0, \xi(\Theta_0)) | \Gamma) = N(0, \Gamma)$$

és

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} \alpha_T(\Theta_0, u, \xi(\Theta_0)) = 0.$$

A definícióban szereplő Γ és az $I_T(\Theta_0)$ információs mátrixok kapcsolata analóg a klasszikus esetben megszokottal, tehát a gyakorlatilag érdekes esetek számunkra azok, amelyekben

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} k_T^{-1}(\Theta_0) \cdot I_T(\Theta_0) = \Gamma$$

teljesül.

A LAN és CLAN tulajdonságok feltételei formálisan hasonlóak a (2.1) képletben. Az alapvető különbség közöttük abban áll, hogy az előbbiben a Γ konstans pozitív definit mátrix míg a CLAN újnak tekinthető definíciójában a Γ pozitív szemidefinit mátrix értékű valószínűségi változó, és a Δ_T Γ -ra vonatkozó feltételes eloszlása aszimptotikusan normális Γ kovarianciamátrixszal.

3. A diffúziós folyamatok esete

Diffúziós folyamatok LAN tulajdonságára elégséges feltételek találhatók KUTJOJANC [16] könyvében.

3.1. TÉTEL. Teljesüljenek a következő feltételek.

(i) A Θ_0 valamely U_{Θ_0} környezetében $P\left(\int_0^T \|S(\Theta, t, \xi(\tilde{\Theta}))\|^2 dt < \infty\right) = 1$ bármely $\Theta, \tilde{\Theta} \in U_{\Theta_0}$ -ra.

(ii) $\dot{S}(\Theta, t, \xi(\Theta_0))$, $0 \leq t \leq T$ sztochasztikusan differenciálható $L_2[0, T]$ -ben a $\Theta = \Theta_0$ helyen. Jelölje a derivált folyamatot $\frac{\partial}{\partial \Theta} S|_{\Theta=\Theta_0} = \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))$, $0 \leq t \leq T$.

Létezik egy olyan $k_T(\Theta_0) \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$), hogy a következők teljesülnek.

(iii)

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} k_T^{-1}(\Theta_0) \int_0^T (\dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0)), \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))) dt = \Gamma$$

és

$$\lim_{T \rightarrow \infty} k_T^{-1}(\Theta_0) E \int_0^T (\dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0)), \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))) dt = E\Gamma,$$

ahol a Γ egy mátrix értékű valószínűségi változó, amelyre bármely $u \in R^k$, $\|u\| \neq 0$ -val $E \exp(u^* \Gamma u) < \infty$ és $P(u^* \Gamma u = 0) = 0$.

(iv) Bármely $B \subset R^p$ korlátos halmaz $u \in B$ elemei szerint egyenletesen

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \|S(\Theta_0 + k_T^{-1/2}(\Theta_0)u, t, \xi(\Theta_0)) - S(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0)) - \\ - k_T^{-1/2} \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))\|^2 dt = 0.$$

Ekkor a $\{\mu_\Theta, \Theta \in \Theta\}$ mértékcsalád a Θ_0 -ban CLAN tulajdonságú, és itt

$$A_T(\Theta_0, \xi(\Theta_0)) = k_T(\Theta_0)^{-1/2} \int_0^T (\dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0)), dW_t)$$

$$\frac{1}{2} u^* \Gamma u - \alpha_T(\Theta_0, u, \xi(\Theta_0)) = k_T(\Theta_0)^{-1} \int_0^T (\dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0)), \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))) dt$$

választható.

A 3.1. tétel bizonyításához előzetesen három lemmát és egy feltételes centrális határeloszlás tételt bizonyítunk.

3.1. LEMMA. Ha a $\{\xi_T\}_{T \geq 0}$ folyamatra

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \xi_T^2 = 0,$$

akkor bármely $C\sigma$ -algebrával

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} E(\xi_T/C) = 0.$$

Bizonyítás. A Csebisev és Jensen egyenlőtlenségek alkalmazásával bármely $\varepsilon > 0$ -ra

$$P(\{\omega: \varepsilon < |E(\xi_T/C)|\}) \leq \frac{E(E(\xi_T/C)^2)}{\varepsilon^2} \leq E \xi_T^2 / \varepsilon^2 \rightarrow 0, \quad \text{ha } T \rightarrow \infty,$$

amiből az állítás adódik.

3.2. LEMMA. Tekintsük az $(f(t), F_t)_{t \geq 0} \in L_2[0, T]$ folyamatot és a $(W_t, F_t)_{t \geq 0}$ Wiener-folyamatot. Tegyük fel, hogy a γ^2 egy olyan F_0 mérhető valószínűségi változó, amellyel a

$$\tau = \inf \left\{ t: \int_0^t f(s)^* f(s) ds = \gamma^2 \right\}$$

Markov időre $P(\tau < \infty) = 1$ teljesül, és bármely u valós számmal legyen $E \exp(u\gamma^2) < \infty$.

Ekkor a

$$\zeta = \int_0^\tau (f(s), dW_s)$$

változó $L(\zeta/\gamma^2) = N(0, \gamma^2)$ feltételesen normális eloszlású, ahol $\gamma^2 = 0$ esetén az $N(0, \gamma^2)$ -t a Dirac-mérték eloszlásának definiáljuk.

Bizonyítás. Legyen a $(g(s), F_s)_{s \geq 0} \in L_2[0, T]$ folyamat olyan, hogy az

$$E \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s)^* g(s) ds \right\} < \infty$$

teljesüljön. A

$$\beta_t = \exp \left\{ i \int_0^t g(s)^* dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t g(s)^* g(s) ds \right\}, \quad t \geq 0$$

folyamatra alkalmazva az *Ito-formulát* a

$$\beta_t = 1 + \int_0^t \beta_s g(s)^* dW_s$$

összefüggést kapjuk. Ahhoz, hogy a β_t martingál legyen, elegendő megmutatnunk, hogy

$$E\left(\int_0^\infty |\beta_s|^2 g(s)^* g(s) ds\right)^{1/2} < \infty$$

teljesül (lásd pl. Novikov [17]), ami a következő egyenlőtlenség sorral bizonyítható

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^\infty |\beta_t|^2 g(t)^* g(t) dt\right)^{1/2} &= E\left(\int_0^\infty \exp\left(\int_0^t g(s)^* g(s) ds\right) g(t)^* g(t) dt\right)^{1/2} = \\ &= E\left\{\exp\left(\int_0^\infty g(t)^* g(t) dt\right) - 1\right\}^{1/2} \leq E \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^\infty g(t)^* g(t) dt\right). \end{aligned}$$

A fentiekből tehát $E(\beta_t | F_0) = 1$, mivel $\gamma^2 F_0$ mérhető

$$E(\beta_t / \gamma^2) = E(E(\beta_t | F_0) / \gamma^2) = 1 \quad P \text{ m.m.}$$

adódik. Ugyanakkor

$$E|\beta_\infty| \leq \frac{1}{2} (1 + E\beta_\infty^2) = \frac{1}{2} \left(1 + \int_0^\infty \beta_s^2 g(s)^* g(s) ds\right) < \infty$$

és

$$E(\eta_\infty | F_t) = E\left(1 + \int_0^\infty \beta_s g(s)^* dW_s\right) = \beta_t + E\left(\int_0^\infty \beta_s \dot{g}(s)^* dW_s | F_t\right) = \beta_t,$$

tehát a $(\beta_t, F_t)_{t \geq 0}$ egy reguláris martingál.

A $g(t) = \lambda \chi_{(t \leq \tau)} f(t)$ helyettesítést alkalmazva teljesül az

$$E \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^\infty g(s)^* g(s) ds\right) < \infty$$

feltétel és azt kapjuk, hogy bármely $t \geq 0$ -val

$$E(\beta_\infty / \gamma^2) = E(\beta_t / \gamma^2) = 1 \quad P \text{ m.m.,}$$

vagyis

$$E\left(\exp\left(i\lambda\zeta + \frac{1}{2} \lambda^2 \gamma^2\right) \middle| \gamma^2\right) = 1 \quad P \text{ m.m.}$$

és így

$$E(\exp i\lambda\zeta | \gamma^2) = \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda^2 \gamma^2\right), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

amiből következik, hogy a ζ γ^2 -re vonatkozó feltételes eloszlása $N(0, \gamma^2)$.

3.3. LEMMA. Legyenek a $(\xi_T)_{T \geq 0}$ és $(\eta_T)_{T \geq 0}$ valós értékű integrálható valószínűségi változók sorozatai. Ha $\lim_{T \rightarrow \infty} E(\xi_T - \eta_T)^2 = 0$, és $L(\eta_T) \rightarrow L_0$, ahol L_0 egy abszolút folytonos eloszlás, akkor

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} [P(\xi_T < x/C) - P(\eta_T < x/C)] = 0$$

teljesül minden x -re bármely $C\sigma$ -algebrával.

Bizonyítás. A feltételek alapján $P - \lim_{T \rightarrow \infty} (\xi_T - \eta_T) = 0$ és mivel η_T eloszlása abszolút folytonos eloszláshoz konvergál, ezért *Slutsky-tétele* alapján $L(\xi_T) \rightarrow L_0$ is teljesül.

Megmutatjuk, hogy

$$E|\chi_{(\xi_T < x)} - \chi_{(\eta_T < x)}|^2 \rightarrow 0.$$

Bármely $\delta > 0$ mellett

$$(3.1) \quad E|\chi_{(\xi_T < x)} - \chi_{(\eta_T < x)}|^2 = P(\xi_T < x, \eta_T < x + \delta) + P(\xi_T < x, x + \delta > \eta_T \geq x) + \\ + P(\xi_T \geq x + \delta, \eta_T < x) + P(x + \delta > \xi_T \geq x, \eta_T < x),$$

ahol

$$(3.2) \quad P(\xi_T < x, \eta_T \geq x + \delta) \leq P(|\xi_T - \eta_T| > \delta) \rightarrow 0$$

$$P(\xi_T \geq x + \delta, \eta_T < x) \leq P(|\xi_T - \eta_T| > \delta) \rightarrow 0, \quad \text{ha } T \rightarrow \infty.$$

Ugyanakkor

$$P(\xi_T < x, x + \delta > \eta_T \geq x) \leq P(x + \delta > \eta_T \geq x) \rightarrow \int_x^{x+\delta} f(t) dt, \quad \text{ha } T \rightarrow \infty,$$

ahol $f(t)$ ($-\infty < t < \infty$) az L_0 sűrűségfüggvénye és a fentiek alapján

$$P(x + \delta > \xi_T \geq x, \eta_T < x) \leq P(x + \delta > \xi_T > x) \rightarrow \int_x^{x+\delta} f(t) dt, \quad \text{ha } T \rightarrow \infty,$$

is teljesül. Azonban itt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+\delta} f(t) dt = s(\delta) \rightarrow 0, \quad \text{ha } \delta \rightarrow 0,$$

és így végül (3.1) és (3.2) felhasználásával

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup E|\chi_{(\xi_T < x)} - \chi_{(\eta_T < x)}| \leq 2 \cdot s(\delta)$$

adódik. Mivel a $\delta > 0$ tetszőleges lehet, ezért

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E|\chi_{(\xi_T < x)} - \chi_{(\eta_T < x)}|^2 = 0$$

és a 3.1. lemma alkalmazásával

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} E(\chi_{(\xi_T < x)}|C) - E(\chi_{(\eta_T < x)}|C) = P - \lim_{T \rightarrow \infty} P(\xi_T < x|C) - P(\eta_T < x|C) = 0,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Hasonló állítás teljesül vektorértékű változók sorozatára is.

3.4. LEMMA. Legyenek a ξ_T , $\eta_T \in R^p$, $T \geq 0$, vektorértékű integrálható valószínűségi változók sorozatai. Ha $\lim_{T \rightarrow \infty} E|\xi_T - \eta_T|^2 = 0$ és $L(\eta_T) \rightarrow L_0$, ha $T \rightarrow \infty$, ahol L_0 egy abszolút folytonos eloszlás az R^p -n, akkor minden $x \in R^p$ -re

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} [P(\xi_T \leq x/C) - P(\eta_T \leq x/C)] = 0, \quad x \in R^p,$$

teljesül bármely $C\sigma$ -algebrával, ahol a vektorok közötti egyenlőtlenség a komponensenkénti egyenlőtlenségek fennállását jelenti.

A 3.4. lemma bizonyítása teljesen hasonló módszerrel történhet, mint a 3.3 lemmáé, ezért itt elhagyjuk.

A 3.1. tétel bizonyításának sarkalatos pontja a következő tétel.

3.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy az $(F(s), \mathcal{F}_s)$ sztochasztikus mátrix értékű folyamatok sorozatára egy valós $k_T \rightarrow \infty (T \rightarrow \infty)$ sorozattal

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} k_T^{-1} \int_0^T F(s) F(s)^* ds = \Gamma \quad \text{és} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} k_T^{-1} E \int_0^T F(s) F(s)^* ds = E\Gamma,$$

ahol a ΓF_0 mérhető mátrixértékű valószínűségi változó olyan, hogy bármely $u \in R^k$, $\|u\| \neq 0$ -val $E \exp(u^* \Gamma u) < \infty$ és $P(u^* \Gamma u = 0) = 0$.

Ekkor

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} L(k_T^{-1/2} \int_0^T F(s) dW_s / \Gamma) = N(0, \Gamma).$$

Bizonyítás. $u \in R^k$ -ra tekintsük a $\zeta_T = k_T^{-1} \int_0^T F(s) dW_s$ jelöléssel a $\xi_T = u^* \zeta_T$ valószínűségi változót. Megmutatjuk, hogy a $\gamma^2 = u^* \Gamma u$ jelöléssel

$$(3.3) \quad P - \lim_{T \rightarrow \infty} L(\xi_T / \gamma^2) = N(0, \gamma^2).$$

Vezessük be a

$$\tau_T = \inf \left\{ t: \int_0^t u^* F(s) F(s)^* u ds = k_T \gamma^2 \right\}$$

Markov-időt. Könnyen belátható, hogy $P(\tau_T < \infty) = 1$ és a 3.2. lemma alapján az $\eta_T = k_T^{-1/2} \int_0^{\tau_T} u^* F(s) dW_s$ változó γ^2 -re vonatkozó feltételes eloszlása $L(\eta_T / \gamma^2) = N(0, \gamma^2)$. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} E(\xi_T - \eta_T)^2 &= k_T^{-1} E \int_0^T (\chi_{(s \leq T)} - \chi_{(s \leq \tau_T)}) u^* F(s) F(s)^* u ds = \\ &= k_T^{-1} E \int_0^T u^* F(s) F(s)^* u ds - \gamma^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ha a $T \rightarrow \infty$. Az η_T változó eloszlásának abszolút folytonossága könnyen belátható, mivel $\delta_2 > \delta_1$ esetén a $P(\gamma_s = 0) = 0$ feltétellel

$$P(\eta_T \in [\delta_1, \delta_2]) = E \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \exp(-t^2/(2\gamma^3)) dt = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} \exp(-t^2/v) dG_u(v) dt$$

teljesül, ahol G_u a γ^2 eloszlásfüggvényét jelöli. Ezért alkalmazhatjuk a 3.3. lemmát, amivel

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} P(\xi_T < x/\Gamma) - P(\eta_T < x/\Gamma) = 0$$

adódik. Tehát bármely $u \in R^k$ mellett az $u^* \zeta_T$ Γ -ra vonatkozó feltételes eloszlása feltételesen normális eloszláshoz tart:

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} L(u^* \zeta_T / \Gamma) \rightarrow N(0, u^* \Gamma u).$$

amiből a

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} E(\exp(iu^* \zeta_T / \Gamma)) = \exp\left(-\frac{1}{2} u^* \Gamma u\right), \quad u \in R^k$$

bizonyítandó állítás következik. Megjegyezzük, hogy ha a Γ pozitív definit értékű, akkor ez az állítás az ismert 3.3 tétel következménye.

A 3.1. tétel bizonyítása

LIPTSER és SHIRYAYEV [11] 7.19. tételének egy vektoriális esetre vonatkozó változatát alkalmazva adódik, hogy

$$\begin{aligned} \log \frac{d\mu_{(\Theta_0 + k_T^{-1/2}(\Theta_0)u)}}{d\mu_{\Theta_0}^T} &= \int_0^T [(S(\Theta_0 + k_T^{-1/2}(\Theta_0)u, t, \xi(\Theta_0))) - \\ &- S(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))]^* d\xi_t(\Theta_0) - \frac{1}{2} \int_0^T \|S(\Theta_0 + k_T^{-1/2}(\Theta_0)u, t, \xi(\Theta_0))\|^2 - \\ &- \|S(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))\|^2 dt = \\ &= \int_0^T [S(\Theta_0 + k_T^{-1/2}(\Theta_0)u, t, \xi(\Theta_0)) - S(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))]^* dW_t - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^T \|S(\Theta_0 + k_T^{-1/2}(\Theta_0)u, t, \xi(\Theta_0)) - S(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))\|^2 dt. \end{aligned}$$

A jobb oldali sztochasztikus integrál

$$\begin{aligned} k_T(\Theta_0)^{-1/2} \int_0^T dW_t^* \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))u + \int_0^T dW_t^* (S(\Theta_0 + k_T(\Theta_0)^{-1/2}u, t, \xi(\Theta_0)) - \\ - S(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0)) - k_T^{-1/2}(\Theta_0) \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))u) \end{aligned}$$

alakban írható fel, ahol a második tagról könnyen megmutatható a sztochasztikus

integrálokra vonatkozó egyenlőtlenségek alapján, hogy sztochasztikusan 0-hoz konvergál. Legyen a

$$A_T(\Theta_0, \xi(\Theta_0)) = k_T(\Theta_0)^{-1/2} \int_0^T dW_t^* \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0)),$$

amelyre a 3.2. tételt alkalmazva a (iii) feltétel alapján kielégíti a CLNA definíciójában szereplő feltételt. Ugyanakkor a (iii) és (iv) feltétel felhasználásával könnyen belátható, hogy

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \|S(\Theta_0 + k_T(\Theta_0)^{-1/2}u, t, \xi(\Theta_0)) - S(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))\|^2 dt = \frac{1}{2} u^* \Gamma u$$

teljesül és ezzel a 3.1. tétel bizonyítását befejeztük. (A bizonyítás befejező lépései konstans Γ mellett lásd pl. BASAWA és RAO [2] 231. oldalán.)

A következő centrális határeloszlás tétel az eloszlásban stabilis konvergenciát állítja, amiből szintén a folyamatok által generált mértékek CLAN tulajdonságára következtethetünk.

3.3. TÉTEL. Legyen a $(W_t, F_t)_{t \geq 0}$ Wiener-folyamat és $(f_t(T), F_t)_{t \geq 0}$, $T \in N$, mátrixértékű négyzetesen integrálható folyamatok sorozata úgy, hogy teljesüljön a

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_t(T)\|^2 dt = \Gamma$$

feltétel, ahol a Γ pozitív definit mátrixértékű valószínűségi változó. Ekkor a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} L\left(\int_0^T f_t(T)^* dW_t\right) = L(Z)$$

eloszlásban való konvergencia stabilis, ahol a Z egy olyan valószínűségi változó, aminek karakterisztikus függvénye

$$E \exp(iu^* Z) = E \exp\left(-\frac{1}{2} u^* \Gamma u\right).$$

Továbbá

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} E\left(\exp\left(iu^* \int_0^T f_t^*(T) dW_t\right) \middle| \Gamma\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} u^* \Gamma u\right)$$

is teljesül. Ez a tétel FEIGIN [5]-ben található centrális határeloszlás tétele vektoriális változatának következménye, amely szerint valamely Γ pozitív szemidefinit mátrixértékű valószínűségi változóval

$$\exp\left(iu^* \int_0^T f_t(T)^* dW_t\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2} u^* \Gamma u\right), \quad T \rightarrow \infty,$$

ahol a konvergencia L_1 -ben gyenge konvergencia. (Valószínűségi változók η_T sorozata L_1 -ben gyengén konvergál az η valószínűségi változóhoz, ha bármely korlátos ξ valószínűségi változóval $E\eta_T \xi \rightarrow E\eta \xi$, $T \rightarrow \infty$, teljesül.)

A stabilis konvergenciát RÉNYI ALFRÉD definiálta. Azt mondjuk, hogy az Y_T valószínűségi változók sorozata stabilisan konvergál, ha bármely $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$ eseményre és az x -eknek R -ben sűrű $S \subset R$ halmazán léteznek a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(Y_T < x, B) = Q(x, B)$$

határértékek. Ekkor minden $x \in S$ -re a $Q(x, B)$ egy mérték, amely abszolút folytonos a $P(B)$ valószínűségi mértékre vonatkozóan. A $q(x, \omega) = \frac{dQ(x, B)}{dP(B)}(\omega)$ Radon—

Nikodym deriváltat az $\{Y_T\}_{T=1, \infty}$ sorozat lokális sűrűségfüggvényének nevezzük. Akkor mondjuk, hogy az Y_T sorozat az \bar{Y} valószínűségi változóhoz stabilisan konvergál, ha a $P(\bar{Y} \leq x | \mathcal{F}) = q(x, \omega)$ P m. m. teljesül. (A definíciókat és bizonyításokat illetően lásd ALDOUS és EAGLESON [1] dolgozatát.) Ismeretes, hogy az

$$\exp(iu^* Y_T) \rightarrow E(\exp(iu^* \bar{Y}) | \mathcal{F}), \quad T \rightarrow \infty,$$

L_1 -ben gyenge konvergenciából következik az $Y_T \rightarrow \bar{Y}$, $T \rightarrow \infty$, stabilis konvergencia. (Lásd az [1] 2. állítását.)

Legyen most az N az F -től független $N(0, I_p)$ eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az $\bar{Y} = \Gamma^{1/2} N$ -nel definiált változóra

$$E(\exp(iu^* \bar{Y}) | \mathcal{F}) = \exp\left(-\frac{1}{2} u^* \Gamma u\right)$$

és így

$$Y_T = \int_0^T f_t(T)^* dW_t \rightarrow \bar{Y}, \quad T \rightarrow \infty$$

konvergencia stabilis. Ebből ALDOUS és EAGLESON [1] 1. tétele (amely KÁTAI és MOGYORÓDI [10] egyik eredményének átfogalmazása) alapján következik, hogy bármely $g(\cdot, \cdot)$ folytonos függvényrel és Γ F -mérhető valószínűségi változóval eloszlásban teljesül a

$$g(Y_T, \Gamma) \rightarrow g(\bar{Y}, \Gamma), \quad T \rightarrow \infty$$

konvergencia. Válasszuk meg a g -t $g(\Sigma, K) = (K^{-1/2} \Sigma K)$ alakúnak és legyen az $K = \Gamma$, így azt kapjuk, hogy a

$$(\Gamma^{-1/2} Y_T, \Gamma) \rightarrow (N, \Gamma), \quad T \rightarrow \infty$$

konvergencia stabilis, ahol N és Γ független valószínűségi változók és kihasználtuk, hogy a Γ 1 valószínűséggel pozitív definit mátrix értékű valószínűségi változó.

3.4. TÉTEL. Tegyük fel, hogy teljesülnek a 3.1. tétel (i) és (ii) feltételei és létezik olyan $k_T(\Theta_0) \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$) számsorozat, amellyel (iv) teljesül és

$$P - \lim_{T \rightarrow \infty} k_T^{-1}(\Theta_0) \int_0^T (\dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0)), \dot{S}(\Theta_0, t, \xi(\Theta_0))) dt = \Gamma,$$

ahol a Γ egy pozitív szemidefinit mátrix értékű valószínűségi változó.

Ekkor a $\{\mu_\sigma, \sigma \in \Theta\}$ mértékcsalád a Θ_0 -ban CLAN tulajdonságú.

A 3.4. tétel a 3.1. tételéhez hasonló módon bizonyítható a 3.3. tétel felhasználásával.

Példaként tekintsük a következő becslési problémát. A $\lambda > 0$ paraméterrel jellemzett $\xi_t = \xi_t(\lambda)$ folyamataink tegyenek eleget a

$$d\xi_t = \lambda \xi_t dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0$$

differenciálegyenletnek. A 3.1. tétel (i), (ii) és (iv) feltételének teljesülése könnyen ellenőrizhető. A (iii) feltétel teljesülésének igazolásához a következő megállapításokat tehetjük. k_T -nek választható a $k_T(\lambda) = e^{2\lambda T}$, $T \geq 0$, sorozat.

$$J_T(\lambda_0) = e^{-2\lambda_0 T} \int_0^T \xi_t(\lambda_0)^2 dt$$

jelölést használva belátható, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(J_T(\lambda_0)) = 1/4\lambda_0^2$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D^2(J_T(\lambda_0)) = 1/8\lambda_0^4$$

teljesül. Kis számolással az is bizonyítható, hogy a $J_T(\lambda_0)$, $T \geq 0$, sorozat *Cauchy-sorozat* az $L^2(\Omega)$ -ban és ezért sztochasztikusan is konvergál egy négyzetesen integrálható γ^2 változóhoz. Továbbá Novikov [18] 2. tételéből határátmenettel ($T \rightarrow \infty$) kapjuk, hogy $J_T(\lambda_0)$ aszimptotikus eloszlásának *Laplace transzformáltja*

$$(1 + p/(2\lambda_0^2))^{-1/2},$$

így a γ^2 eloszlása egy $N(0, 1/4\lambda_0^2)$ eloszlású változó négyzetének eloszlásával egyenlő. A $\Gamma = \gamma^2$ helyettesítéssel a 3.1. III. feltétele is teljesül, ezért a tekintett folyamatok által meghatározott mértékek CLAN tulajdonságúak minden $\lambda_0 > 0$ pontban.

A $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda; \lambda_0) = 0$ likelihood egyenletből kapjuk, hogy

$$e^{\lambda_0 T}(\hat{\lambda}_T - \lambda_0) = \Delta_T(\lambda_0, \xi(\lambda_0))/J_T(\lambda_0),$$

ahol

$$\Delta_T(\lambda_0, \xi(\lambda_0)) = e^{-\lambda_0 T} \int_0^1 \xi_s(\Theta_0) dW_s$$

és itt a 3.1. tétel alapján a $\Delta_T(\lambda_0, \xi(\lambda_0))$ a γ^2 -re vonatkozóan aszimptotikusan feltételesen $N(0, \gamma^2)$ eloszlású. A $\Delta_T(\lambda_0, \xi(\lambda_0))$ aszimptotikus ($T \rightarrow \infty$) eloszlásának feltételes sűrűségfüggvénye

$$f(s|\gamma^2 = y) = \sqrt{\frac{y}{2\pi}} e^{-s^2 y/2}, \quad y > 0; \quad s \in (-\infty, \infty)$$

a γ^2 eloszlásának sűrűségfüggvénye pedig

$$g(y) = \lambda_0 \sqrt{\frac{2}{\pi y}} e^{-2y\lambda_0^2}, \quad \text{ha } y > 0, \quad g(y) = 0, \quad \text{ha } y \leq 0.$$

Ezért az $e^{\lambda_0 T}(\hat{\lambda}_T - \lambda_0)$ aszimptotikus eloszlásának sűrűségfüggvénye

$$r(s) = \int_0^\infty f(s|\gamma^2 = y)g(y)dy = \frac{2\lambda_0}{\pi} \frac{1}{s^2 + 4\lambda_0^2}.$$

Diszkrét idejű esetben a ML becslések aszimptotikus eloszlását M. M. RAO [12] 204. old. adta meg, ahol szintén *Cauchy-típusú eloszlás* adódott.

4. A szuperkritikus Galton—Watson-folyamat

A következőkben röviden ismertetünk diszkrét idejű példát a bevezetésben megadott fogalmak alkalmazásának bemutatására.

Tekintsük a $(p_j)_{j \geq 0}$ eredő eloszlású $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \dots\}$ Galton—Watson-folyamatot. A folyamat megfigyelése alapján a $\Theta = \sum_{j=1}^\infty j \cdot p_j > 1$ várható értéket szeretnénk becsülni. Megmutatható, hogy a Θ ML becslése a

$$\hat{\Theta}_t = \left(\sum_1^t Z_{k-1}\right)^{-1} \left(\sum_1^t Z_k\right)$$

alakban adható meg. (A probléma bővebb tárgyalása megtalálható pl. HEYDE [9] vagy BASAWA és RAO [3] munkáiban.) A $D^2(Z_{t+1}|Z_t) = Z_t \sigma^2$ összefüggés alapján az általánosított Fisher-féle információ

$$\tilde{I}_t(\Theta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^t Z_{k-1},$$

ahol $\sigma^2 = \sum_{i=0}^\infty (i - \Theta)^2 p_i$. Az $E(Z_{t+1}|Z_t) = Z_t \Theta$ alapján

$$I_t(\Theta) = E\tilde{I}_t(\Theta) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\Theta^t - 1}{\Theta - 1} \right)$$

és a Z_t/Θ^t egy nemnegatív martingál és így a

$$W = \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta^{-t} Z_t$$

határérték 1 valószínűséggel létezik a martingál konvergencia tétel alapján. Az elágazó folyamatok elméletében ismeretes (lásd pl. HARRIS [8]), hogy $W > 0$ 1 valószínűséggel és ezért

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_t(\Theta)/\tilde{I}_t(\Theta) = W > 0$$

1 valószínűséggel teljesül. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} I_t(\Theta)^{1/2}(\hat{\Theta}_t - \Theta) &= \sigma^{-1} \left(\sum_1^t Z_{k-1}\right)^{-1/2} \sum_1^t (Z_k - \Theta Z_{k-1}) = \\ &= \left(\sum_1^t Z_{k-1}\right)^{-1/2} \sum_{k=1}^t \left(\sum_{i=1}^{Z_{k-1}} \varepsilon_i\right), \end{aligned}$$

ahol az ε_i független valószínűségi változók $E\varepsilon_i = 0$ és $E\varepsilon_i^2 = 1$. A véletlen tagszámú összegekre vonatkozó centrális határeloszlás tételt alkalmazva (lásd pl. BILLINGSLEY [4]) következik, hogy

$$\begin{aligned} & L(I_t(\theta)^{1/2}(\hat{\theta}_t - \theta) | W) \rightarrow N(0, 1). \\ \text{Így} \quad & L(\tilde{I}_t(\theta)^{1/2}(\hat{\theta}_t - \theta) | W) = \\ & = L(\tilde{I}_t^{-1}(\theta) I_t(\theta))^{-1/2} \cdot I_t(\theta)^{1/2}(\hat{\theta}_t - \theta) | W \xrightarrow{p} N(0, W^{-1}), \quad \text{ha } t \rightarrow \infty. \\ \text{Speciálisan, ha a } p_j &= \theta^{-1}(1 - \theta^{-1})^{j-1}, \text{ akkor} \end{aligned}$$

$$L(\tilde{I}_t(\theta)^{1/2}(\hat{\theta}_t - \theta)) \rightarrow t(2), \quad t \rightarrow \infty,$$

ahol $t(2)$ a 2 szabadsági fokú *Student-eloszlás* jelenti.

5. Egy általános módszer

Mind a folytonos, mind a diszkrét idejű esetben gyakran alkalmazható a következő, a CLAN-tól kissé eltérő, módszer az ML becslések aszimptotikus eloszlásának vizsgálatára.

Jelöljük a folyamat $[0, T]$ -n vett megfigyelései alapján számított ML becslést $\hat{\theta}_T$ -vel. Tekintsük a $L_T(\theta; \theta_0)$ függvény $\hat{\theta}_T$ körüli *Taylor sorbifejtéséből* kapott

$$(5.1) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} L_T(\theta; \theta_0)|_{\theta=\theta_0} = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta^*} L_T(\theta; \theta_0)|_{\theta=\theta_0} (\theta_0 - \hat{\theta}_T) + \sigma(\|\theta_0 - \hat{\theta}_T\|)$$

felbontást. Tegyük fel továbbá, hogy található olyan $k_T(\theta_0)$ számsorozat, amivel a

$$(5.2) \quad P - \lim_{T \rightarrow \infty} k_T(\theta_0)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta^*} L(\theta; \theta_0)|_{\theta=\theta_0} = \Gamma,$$

ahol Γ egy pozitív definit mátrix értékű valószínűségi változó. Nem túl erős feltételek mellett teljesül az, hogy a $\frac{\partial}{\partial \theta} L_T(\theta, \theta_0)|_{\theta=\theta_0}$ martingálra centrális határeloszlás tétel alkalmazható, ami szerint a

$$k_T(\theta_0)^{-1/2} L_T(\theta; \theta_0)|_{\theta=\theta_0}$$

Γ -ra vonatkozóan aszimptotikusan feltételesen $N(0, \Gamma)$ eloszlású. (Ilyen típusú centrális határeloszlás tételek találhatók pl. HALL [6] és HALL és HEYDE [7] munkákban.) Ezután az (5.1)-et és (5.2)-t felhasználva azt kaphatjuk, hogy a

$$k_T(\theta_0)^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta_0)$$

aszimptotikusan feltételesen $N(0, \Gamma^{-1})$ eloszlású, és így az ML becslések nem mindig lesznek aszimptotikusan normálisak.

A következőkben a sztochasztikus aszimptotikus loglikelihood függvényről közlünk néhány gondolatot a diszkrét idejű esetben.

Az 1.1. lemma feltevései mellett belátható, hogy a

$$\partial L_t(\Theta; \Theta_0) = \log \frac{f_t(\xi_t(\Theta_0); \Theta_0)}{f_t(\xi_t(\Theta); \Theta)}$$

képlettel definiált $(\partial L_t(\Theta; \Theta_0), F_t(\Theta_0))_{t \geq 0}$ folyamat szubmartingál bármely $\Theta \in \Theta$ mellett. Ekkor bármely $k_t(\Theta_0) > 0$, $t \geq 0$, számsorozattal az

$$S_{i,t} = k_i(\Theta_0)^{-1} \partial L_i(\Theta; \Theta_0), \quad i = 0, 1, \dots, t; \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

szubmartingál tömb lesz. Ha a

$$\sup_{t \in \mathbb{N}} K_t(\Theta; \Theta_0) < \infty, \quad \Theta \in \Theta,$$

teljesül, ahol a $K_t(\Theta; \Theta_0) = k_t(\Theta_0)^{-1} E \partial L_t(\Theta; \Theta_0)$ a *Kullback-féle információ* normált alakja, akkor remélhetjük, hogy alkalmas $k_t(\Theta_0)$ számsorozat mellett az $S(t, t)$ valószínűségi változók 1 valószínűséggel konvergálnak valamely $\partial L(\Theta; \Theta_0)$ nem azonosan eltűnő valószínűségi változóhoz. Ha az

$$L(\Theta_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} k_t(\Theta_0)^{-1} \log f_t(\xi_t(\Theta_0); \Theta_0)$$

határérték is 1 valószínűséggel létezik, akkor az

$$L(\Theta; \Theta_0) = L(\Theta_0) - \partial L(\Theta; \Theta_0)$$

változót nevezzük aszimptotikus sztochasztikus loglikelihood függvénynek. Az aszimptotikus sztochasztikus loglikelihood függvények a ML becslések konzisztenciájának a vizsgálatánál játszhatnak szerepet, mivel konzisztencia esetén az $L(\Theta; \Theta_0)$ -nek 1 valószínűséggel maximuma kell legyen a $\Theta = \Theta_0$ pontban.

A 4. szakaszban szereplő *Galton—Watson-folyamat*ra a sztochasztikus aszimptotikus loglikelihood függvény a következőképpen adható meg. Legyen a $p_j = a_j \lambda^j / A(\lambda)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, ahol $A(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^j$. Ekkor $\Theta = \lambda A'(\lambda) / A(\lambda)$ és $d\lambda/d\Theta = \lambda/\sigma^2$. Az

$$L_t(\Theta; \Theta_0) = \frac{\Theta_0 - 1}{\Theta_0^0 - 1} \left[\left(- \sum_{k=1}^t Z_{k-1}(\Theta_0) \right) \log A(\lambda(\Theta)) + \log \lambda(\Theta) \left(\sum_{k=1}^t Z_k(\Theta_0) \right) \right]$$

(lásd [3] 22. oldal) és így $t \rightarrow \infty$ esetén 1 valószínűséggel

$$L_t(\Theta; \Theta_0) \rightarrow -W \cdot (\log A(\lambda(\Theta)) + \Theta_0 \log \lambda(\Theta)) = L(\Theta, \Theta_0),$$

aminek a $\Theta = \Theta_0$ helyen 1 valószínűséggel maximumhelye van.

Köszönetnyilvánítás: Szeretném köszönetemet kifejezni ARATÓ MÁTYÁSNAK a problémáról folytatott beszélgetésekért és hasznos tanácsaiért.

IRODALOM

- [1] ALDOUS, D. J., EAGLESON, G. K., "On mixing and stability of limit theorems", *Ann. Probab.* 6 (1978) 325—331.
- [2] ARATÓ, M., *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients* (Springer Verlag, New York—Berlin, 1977).
- [3] BASAWA, I. V., PRAKASA RAO, B. L. S., *Statistical Inference for Stochastic Processes* (Academic Press, London—New York, 1980).
- [4] BILLINGSLEY, P., *Convergence of Probability Measures* (Wiley, New York, 1968).
- [5] FEIGIN, P. D., "Stable convergence of semimartingales", *Stochastic Process. Appl.* 19 (1985) 125—134.
- [6] HALL, P., "Martingale invariance principles", *Annals of Probability* 5 (1975) 49—55.
- [7] HALL, P., HEYDE, C. C., *Martingale Limit Theory and Its Application* (Academic Press, New York—San Francisco, 1980).
- [8] HARRIS, T. E., *The Theory of Branching Processes* (Springer Verlag, Berlin, 1963).
- [9] HEYDE, C. C., "Remarks on efficiency in estimation for branching processes", *Biometrika* 62 (1975) 49—55.
- [10] KÁTAI, I., MOGYORÓDI, J., "Some remarks concerning sequences of random variables.", *Publ. Math. Debrecen* 14 (1967) 227—238.
- [11] LIPTSER, R. S., SHIRYAYEV, A. N., *Statistics of Random Processes I—II* (Academic Press, London—New York, 1980).
- [12] RAO, M. M., *Probability Theory and Its Applications* (Academic Press, London—New York, 1984).
- [13] VERES, S., "Maximum likelihood estimation and structural test of fit for a general class of stochastic processes", *Proc. of Symp. "Goodness of Fit", Debrecen 1984*, to be published by North Holland.
- [15] Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З., *Асимптотическая теория оценивания* (Наука, Москва, 1978).
- [16] Кутоянц, Ю. А., *Оценивание параметров случайных процессов* (Академии наук Арм. ССР, Ереван, 1980).
- [17] Новиков, А. А., «О моментах остановки винеровского процесса», *Теория Вероятностей и ее применения*, 16 (1971) 458—465.
- [18] Новиков, А. А., «Об оценках параметров диффузионных процессов», *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 7 (1972) 201—209.

(Beérkezett: 1986. január 4.)

VERES SÁNDOR
ELTE TTK VALÓSZÍNŰSÉGELEMÉLETI ÉS STATISZTIKAI TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MŰZEUM KRT. 6—8.

ON THE ASYMPTOTIC NON-NORMALITY OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATIONS

S. VERES

The maximum likelihood estimation of the parameters of stochastic processes may be asymptotically non-normally distributed. We give some general methods for the exploration of the asymptotic behaviour of the maximum likelihood estimations.

A BALATONI FITOPLANKTON DINAMIKÁJÁNAK EGY SZTOCHASZTIKUS MODELLJE*

KUTAS TIBOR és TÓTH JÁNOS

Budapest

Tavi ökoszisztémák modellezésére rendszerint determinisztikus modelleket (differenciálegyenlet-rendszereket) használnak. Ezek a modellek általában jól tükrözik a fő tendenciákat, de nem alkalmaznak arra, hogy visszaadják az ökoszisztémákban meglevő inherens fluktuációkat. Ezért a Balaton eutrofizációját leíró determinisztikus ún. BEM modell sztochasztikus analógjaként egy *ugró Markov-folyamatot* definiáltunk. Ez a modell ugyanazon komponenseket és részfolyamatokat tartalmazza, mint a determinisztikus, de itt az állapotváltozás a következőképpen megy végbe: a rendszer egy véletlen időtartamig egy állapotban marad, azután végbemegy egy (véletlenszerűen kiválasztott) rész-folyamat.

A két megközelítés közötti kapcsolatokat vizsgálva megállapítható, hogy ebben az esetben a sztochasztikus modell megmagyarázza a mért adatokban (különösen a kék algáknál) előfordult nagy ingadozásokat, míg a determinisztikus modell erre nem képes.

1. Bevezetés

1.1. Mit modellezünk?

A balatoni fitoplankton dinamikájának egy sztochasztikus modelljét fogjuk ismertetni az alábbiakban. A tó egyik alapvető problémája az eutrofizáció, a megnövekedett növényi tápanyagterhelés hatására megnövekedett algabiomassza-, és elsődleges termelés. Matematikai modell segítségével lehetőség van az egyes részfolyamatok közötti összefüggések feltárására, jobb megértésére, a tó jövőbeli viselkedésének előrejelzésére.

Tavi ökoszisztémák modellezésére rendszerint determinisztikus modelleket (többnyire nemlineáris differenciálegyenlet-rendszereket) szokás használni, lásd például [3, 6, 17, 22], valamint az e helyeken idézett irodalmat. Ezek a modellek kielégítően leírják az ökológiai jelenségek lezajlásának főbb irányait.

1.2. Miért használunk sztochasztikus modellt?

A determinisztikus modellek viszont képtelenek visszatükrözni az ökoszisztémák inherensen véletlen viselkedését. A bizonytalanság eme forrása különösen fontossá válik sokparaméterű, nagy ökoszisztémák esetén. Ezért megkonstruáltuk a *Balaton Eutrofizációs Modelljének*, röviden a BEM-nek [12] egy sztochasztikus változatát.

Mely tényezők teszik szükségessé egy sztochasztikus modell használatát általában és melyek különösen fontosak ezek közül speciálisan ökológiai modellek esetén?

* Az MTA Veszprémi Akadémiai Bizottság 1984. évi pályázatán díjazott munka.

Egy jelenség determinisztikus és sztochasztikus modellje között általában az a kapcsolat, hogy az utóbbi (esetleg közelítőleg) átlagban konzisztens. Más szavakkal: a determinisztikus értékek a megfelelő sztochasztikus értékek várható értékeivel egyenlők, vagy a kettő közötti eltérés csekély. Éppen az az eset értékes, amikor *minőségi* különbség van a determinisztikus és a sztochasztikus modellek által nyújtott eredmények között.

Ez előfordulhat úgynevezett *kis rendszerekben*, azaz olyan rendszerekben, amelyekben a folytonos változók használata nem jogosult. (Ebben az esetben azt használjuk, hogy a sztochasztikus modell nem csak az állapotváltoztatás módjában különbözik a determinisztikustól, hanem abban is, hogy állapottere nem folytonos, hanem diszkrét.)

Egy másik érdekes helyzet: a rendszer a determinisztikus modell *instabilis egyensúlyi helyzetének* közelében működik.

Előfordulhat az is, hogy nagy különbség van a determinisztikus és a sztochasztikus modell *strukturális stabilitása* között — mégpedig az utóbbi javára.

A modelleket általában is és ezt a speciális modellt is két célra szokás felhasználni: természettudományos célra, t. i. a vizsgált jelenség *leírására* és döntések meghozatalához: mérnöki és management célra, t. i. annak *előrejelzésére*, hogy a rendszer különböző lehetséges körülmények között milyen viselkedést mutatna. Ebben az összefüggésben érdemes idézni SCHOFIELD és KRUTCHKOFF egy írásából [24, 1. old.]: „Lehetséges, hogy a szennyezések pillanatnyi koncentrációi ökológiailag veszélyes szintet érnek el, míg az átlagok, vagy a determinisztikus koncentrációk elfogadható szinten maradnak.” Ez az idézet is magyarázza, hogy miért érdekel bennünket, hogy a változók időbeli lefutása mennyire *reprodukálható* lényegében azonos körülmények között.

Ebben az összefüggésben érdekesnek tűnt, hogy lényeges különbséget találtunk a kék algák biomasszájának sztochasztikus átlaga és a megfelelő determinisztikus érték között. Még nagyobb különbséget találtunk az egyes realizációk és a determinisztikus érték között. Néhány realizáció különlegesen magas értékeket adott, más realizációk pedig mélyen a determinisztikus érték alatt haladtak, megerősítve azt az állítást, amely szerint a belső fluktuációk valóban fontosak lehetnek egy sztochasztikus modellben. Hogy a fluktuáció a valóságban is előfordul, bizonyítja az 1982-es és 1983-as algabiomassza szint közötti lényeges eltérés, amit a terhelésekben levő eltérés nem magyaráz meg.

Amint a sztochasztikus modell természetéből következik, a bemenő foszforterhelés növekedése nem feltétlenül vezet pillanatszerűen az eutrofizálódási folyamat felgyorsulásához. Ugyanaz a bemenő foszforterhelés viszont — más esetben — az algák biomasszájának jelentős növekedéséhez vezethet (feltehetőleg ez az eset fordult elő 1982-ben).

Itt kell megemlítenünk, hogy a modellben elhanyagoltuk a *térbeli* inhomogenitásokat és fluktuációkat.

Végül egy tudományszociológiai-tudománytörténeti érv is felhozható a sztochasztikus modell mellett: Az utóbbi években kevésbé népszerűek a nagy, sokparaméteres modellek a tavi eutrofizáció leírásánál. Ez a matematikai és számítástechnikai problémák következménye lehet, vagy a mérések hiányos voltáé, esetleg mindkettőé. Azt reméljük, hogy erről a holtpontról bármilyen új megközelítés segíthet elmozdulni, és azt gondoljuk, hogy a sztochasztikus modellek eredményes alternatívául kínálkoznak.

Az irodalomban nagyon kevés sztochasztikus tómodellel találkozhatunk. Az általunk vizsgált ökológiai problémával rokon jelenségek leírására a következő sztochasztikus eszközöket szokás bevetni: idősorok, véletlen bolyongás, diffúziós folyamatok, véletlen paraméterű differenciálegyenletek, *ugró Markov-folyamatok*.

1.3. Miért választottunk *ugró Markov-folyamatot*?

Ami a különböző típusú sztochasztikus modelleket illeti, az idősorok, a véletlen bolyongásos és a diffúziós modellek túl egyszerűnek látszanak ahhoz, hogy képesek legyenek megbirkózni egy folyamat ökológiai részleteivel. Előzetes mérlegeléstől függ, hogy azt gondoljuk, hogy az állapotváltozók fluktuációját a paraméterek (beleértve ezekbe a kezdeti feltételeket, a külső kényszereket [az úgynevezett bemenő adatsorokat] és a szűkebb értelemben vett paramétereket) okozzák, vagy pedig magukra az állapotváltozók fluktuációira teszünk feltevéseket. Mivel a *belső* fluktuációkra szeretnénk összpontosítani, ezért a második lehetőséget választottuk. Így már csak az ökológiában ismeretlen sztochasztikus differenciálegyenletek és az *ugró Markov-folyamatok* között kellett választanunk. Több ok miatt is az utóbbi mellett döntöttünk:

- jelentős mennyiségű tapasztalat gyűlt össze ezekről a modellekről a fizikában, a fizikai kémiában és a biológia néhány területén;

- a véletlen úgy vehető figyelembe, hogy lényegében nem kell bevezetnünk további becsülendő ökológiai paramétert;

- ismeretes egy meglehetősen természetes mód arra, hogy hogyan kell megfeleltetni egy ilyen típusú modellt a szokásos determinisztikus modellnek (egy differenciálegyenletrendszernek);

- az ilyen modellek realizációit könnyű szimulálni (lásd például [8, 15]);

- remélhető, hogy a továbbiakban ezen modell alapján a paraméterek a mérési adatokból könnyebben és statisztikailag megalapozottabban becsülhetők.

A következő fejezetben röviden áttekintjük a sztochasztikus tómodellek irodalmát. Ezután megadjuk a determinisztikus és a sztochasztikus BEM közös változóinak és részfolyamatainak a definícióját. Végül magát a sztochasztikus modellt definiáljuk részletesen.

2. A vízminőség és vízi ökoszisztémák sztochasztikus modelljei

Az irodalmazás szakaszában (a *Science Citation Indexet* használtuk) meglepetéssel tapasztaltuk, hogy ezt az ötletet az ökológiai modellezésben viszonylag ritkán használják. Igen kevés sztochasztikus tómodell ismeretes. Az előzetes tapasztalatok alapján mindazonáltal az 1. táblázatban bemutatott modellek szerkeszthetők.

Ezek a modellek a felhasznált matematikai eszközök szerint a következőképpen csoportosíthatók:

- idősoros modellek;
- véletlen bolyongásos és diffúziós modellek;
- véletlen paraméterű differenciálegyenletek;
- *ugró Markov-folyamatok* (születési és halálozási modelleket is beleértve).

Ami ezen modellek főbb eredményeit, valamint korlátait illeti: Csak a legegyszerűbb modelleket lehet analitikusan kezelni, ezért a szerzők többnyire szimulációs módszereket alkalmaznak. Ezek a modellek képesek visszatükrözni a *belső* fluktuá-

1. TÁBLÁZAT
A vízszennyeződés sztochasztikus modelljei

Szerző (k)	A vizsgált rendszer	A modell típusa	A függő változó (k) jelentése
THAYER és KRUTCHKOFF [25]	homogén BOD ¹ és OD ² áramok	lineáris születési és halálozási folyamat	BOD, OD
MOUSHEGIAN és KRUTCHKOFF [20]	BOD és OD áramok cella modellje	lineáris születési és halálozási folyamat minden cellában és lineáris diffúzió	BOD, OD
CUSTER és KRUTCHKOFF [4]	homogén BOD és OD áram torkolatokban	véletlen bolyongás folytonos (diffúziós) közelítése	BOD, OD
SCHOFIELD és KRUTCHKOFF [24]	inhomogén BOD és OD áram torkolatokban	véletlen bolyongás folytonos közelítése	BOD, OD és tetszőleges további összetevő, amire még szükség van
FULLER és TSOKOS [11]	vízszennyeződés	ARIMA (0, 1, 2) idősor	oldott oxigén (DO)
JERNIGAN és TSOKOS [15] JERNIGAN és mtsai [16]	tápanyagok metabolizmusa egy vízi ökoszisztémában	szimulált <i>ugró Markov-folyamat</i>	az algákban, a zooplanktonban és az eufotikus zónában levő tápanyag
PADGETT [21]	folyami szennyeződés	véletlen paraméterű lineáris differenciálegyenletek	BOD és DO
DI TORO és VAN STRATEN [7]		véletlen paraméterű differenciálegyenletek becslés céljából	
FEDRA és mtsai [10]	a tápanyagterhelés hatása az elsődleges termelésre egy mély tóban	véletlen paraméterű parciális differenciálegyenletek	oldható reaktív foszfor, partikulált foszfor, elsődleges termelés
TIWARI és HOBIE [27]	plankton sekély tundra tóban	véletlen paraméterű nemlineáris differenciálegyenletek	alga-, baktérium-, Daphnia-biomassza, detritusz, felhasználható szerves szén

¹ BOD = biológiai oxigén igény

² OD = oxigén igény

ciókat; szokásosan megmutatják a sztochasztikus és a determinisztikus modellek közötti különbséget. Mindezen modellekkel az a fő gond, hogy a biológiai részleteket túlságosan leegyszerűsítik, ha viszont több részletet vesznek figyelembe, akkor a modellek kezelhetetlenné válnak.

Egyetlen dolgozat van [15], amelynek JERNIGAN és TSOKOS a szerzője, amely a miénkhez hasonló — de nem tíz-, hanem háromváltozós — modellt tartalmaz. Ez a tény (és az irodalom fent vázolt helyzete) szükségessé teszi, hogy a jelenlegi dolgozatban a módszertani kérdések viszonylag nagy súlyt kapjanak. Az a biológiai háttér, amelyre támaszkodunk, megtalálható HERODEK és munkatársai [12] cikkében.

Az a célunk, hogy az itt leírtak alapján eredményeinket reprodukálni lehessen.

3. A determinisztikus és a sztochasztikus BEM közös leírása

3.1. Változók és részfolyamatok

A modell állapotváltozói a 2. táblázatban felsorolt ökológiai összetevők koncentrációja. (Ezek azonosak a determinisztikus modellben használtakkal.) Az oldott szerves foszfor a vízben és a foszfor az üledékben foszforban, a nitrogén nitrogénion-koncentrációban és minden egyéb állapotváltozó szervesanyag-koncentrációban van kifejezve.

A determinisztikus modellben az összetevőket, a megfelelő állapotváltozókat (éppúgy, mint értéküket) A_1, A_2, \dots, PS jelöli. Az a vektor, amelynek ezek a komponensei, X .

A sztochasztikus modellben az állapotváltozókat a_1, a_2, \dots, ps jelöli. Az a vektor, amelynek ezek a komponensei, x . Az állapotváltozók értékeinek vektora n .

2. TÁBLÁZAT

A determinisztikus és a sztochasztikus BEM változói

Sorszám	Összetevő	A determinisztikus állapotváltozó mnemonikus neve
1	téli—tavaszi alga	A_1
2	nyári alga	A_2
3	őszai alga	A_3
4	kék alga	A_{BG}
5	baktérium	B
6	holt szerves anyag	OM
7	oldott szervesfoszfor	P
8	oldott szervesfoszfor nitrogén	N
9	szerves anyag az üledékben	S
10	kicserélhető foszfor az üledékben	PS

3. TÁBLÁZAT

Részfolyamatok és jellemzőik

A rész- folyamat sorszáma (i)	Részfolyamat	Nettó állapotváltozás (z_i)	Infinitézimális átmenetvalószínűség (R_i)
1	A_1 elsődleges termelése	$e_1 - pr * e_7 - nr * e_8$	$PMAX_1 * TEMP_1 * U_1 * a_1$
2	A_2 elsődleges termelése	$e_2 - pr * e_7 - nr * e_8$	$PMAX_2 * TEMP_2 * U_2 * a_2$
3	A_3 elsődleges termelése	$e_3 - pr * e_7 - nr * e_8$	$PMAX_3 * TEMP_3 * U_3 * a_3$
4	A_{BG} elsődleges termelése	$e_4 - pr * e_7$	$PMAX_{BG} * TEMP_{BG} * U_{BG} * a_{BG}$
5	A_1 természetes mortalitása	$-e_1 + e_6$	$MCRIT_1 * \exp [MR_1(T - TCRIT_1)] * a_1$
6	A_2 természetes mortalitása	$-e_2 + e_6$	$MCRIT_2 * \exp [MR_2(T - TCRIT_2)] * a_2$
7	A_3 természetes mortalitása	$-e_3 + e_6$	$MCRIT_3 * \exp [MR_3(T - TCRIT_3)] * a_3$
8	A_{BG} természetes mortalitása	$-e_4 + e_6$	$MCRIT_{BG} * \exp [MR_{BG}(T - TCRIT_{BG})] * a_{BG}$
9	B természetes mortalitása	$-e_5 + e_6$	$MCRIT_B * \exp [MR_B(T - TCRIT_B)] * b$
10	B holt szerves anyag felvétele	$e_5 - e_6$	$CMAX * om / (om + b) * TEMP_B * b$
11	B bomlása	$-e_5 + pr * e_7 + nr * e_8$	$DECR * TEMP_B * b$
12	A_1 ülepedése	$-e_1 + e_9$	$SR_1 * a_1$
13	A_2 ülepedése	$-e_2 + e_9$	$SR_2 * a_2$
14	A_3 ülepedése	$-e_3 + e_9$	$SR_3 * a_3$
15	A_{BG} ülepedése	$-e_4 + e_9$	$SR_{BG} * a_{BG}$
16	B ülepedése	$-e_5 + e_9$	$SR_B * b$
17	OM ülepedése	$-e_6 + e_9$	$SR_{OM} * om$
18	S mineralizációja	$-e_9 + pr * e_{10} + nr * e_8$	$MINR * \exp (STEMP * T) * s$
19	üledék—víz foszforkicserélő- dés	$-e_{10} + e_7$	$EC * PSC * ps$
20	víz-üledék foszfor- kicserélődés	$-e_7 + e_{10}$	$EC * p$

3. TÁBLÁZAT FOLYTATÁSA

A rész-folyamat sorszáma (<i>i</i>)	Részfolyamat	Nettó állapotváltozás (z_i)	Infinitézimális átmenetvalószínűség (R_i)
21	<i>N</i> denitrifikációja	$-e_8$	$MIN * (1 - SFR) * (1 - \exp [SRN * MIN])$
22	fölkeveredés	$-e_{10} + pr * e_7 + nr * e_8$	$SUC * s$
23	<i>P</i> tápanyag-terhelés	$+e_7$	$PFORC(t)$
24	<i>N</i> tápanyag-terhelés	$+e_8$	$NFORC(t)$
25	A_1 hidrológiai befolyása	$+e_1$	$INFLOW_1$
26	A_2 hidrológiai befolyása	$+e_2$	$INFLOW_2$
27	A_3 hidrológiai befolyása	$+e_3$	$INFLOW_3$
28	A_{BG} hidrológiai befolyása	$+e_4$	$INFLOW_4$
29	<i>B</i> hidrológiai befolyása	$+e_5$	$INFLOW_B$
30	<i>OM</i> hidrológiai befolyása	$+e_6$	$INFLOW_{OM}$
31	<i>P</i> hidrológiai befolyása	$+e_7$	$INFLOW_P$
32	<i>N</i> hidrológiai befolyása	$+e_8$	$INFLOW_N$
33	A_1 hidrológiai kifolyása	$-e_1$	$OUTFLOW * a_1$
34	A_2 hidrológiai kifolyása	$-e_2$	$OUTFLOW * a_2$
35	A_3 hidrológiai kifolyása	$-e_3$	$OUTFLOW * a_3$
36	A_{BG} hidrológiai kifolyása	$-e_4$	$OUTFLOW * a_{BG}$
37	<i>B</i> hidrológiai kifolyása	$-e_5$	$OUTFLOW * b$
38	<i>OM</i> hidrológiai kifolyása	$-e_6$	$OUTFLOW * om$
39	<i>P</i> hidrológiai kifolyása	$-e_7$	$OUTFLOW * p$
40	<i>N</i> hidrológiai kifolyása	$-e_8$	$OUTFLOW * n$

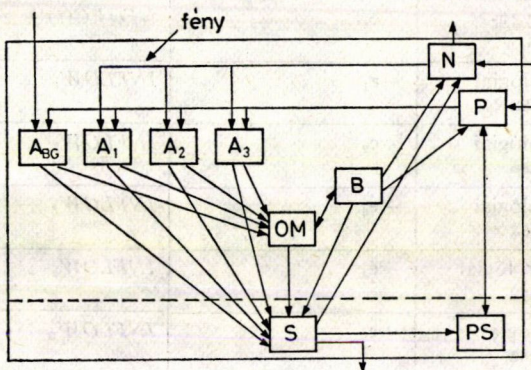
A megfelelő vektorkomponensek sorszámát az első oszlop tartalmazza.

A részfolyamatok (amelyek a formális reakciókinetika *elemi reakcióinak* felelnek meg) a 3. táblázatban vannak felsorolva. (A táblázat 3. és 4. oszlopát később, a sztochasztikus modell definiálásánál fogjuk fölhasználni.) A részfolyamatok azonosak a determinisztikus és a sztochasztikus modellben.

Megjegyzések a 3. táblázathoz: A 12–17. részfolyamat jég alatt négyszer gyorsabban zajlik. A 22. részfolyamat időleges.

A (determinisztikus és a sztochasztikus) BEM szerkezetét az 1. ábra mutatja.

A sztochasztikus modell definiálásának bevezetéseképp röviden leírjuk a determinisztikus modellt.



1. ábra. A modell szerkezete

3.2. A determinisztikus BEM

A determinisztikus modell egy folytonos idejű, folytonos állapotterű modell: egy nemlineáris egyenletekből álló nemautonóm differenciálegyenletrendszerre vonatkozó kezdeti érték probléma. Ezt a modellt [12] tartalmazza. Most a modell egy kis részét fogjuk itt definiálni.

Példaként tekintsük a nyári alga elsődleges termelését. Feltevésünk az, hogy e folyamat hozzájárulása A_2 deriváltjához

$$R_2(A_2(t), P(t), N(t), t) := PMAX_2 * TEMP_2(T(t)) * U_2(P(t), N(t), L_0(t)) * A_2(t),$$

ahol

- $PMAX_2$ a maximális produkciós arány;
- $TEMP_2$ a hőmérséklet limitáció;
- A_2 , P és N a fenti 1. táblázatban definiált állapotváltozók, mint az idő függvényei;
- T a víz hőmérséklete;
- L_0 a globális sugárzás a víz felszínén;
- U_2 egy együttes limitáló tényező, amely az elsődleges termelés fénytől és tápanyagtól való függését írja le.

A differenciálegyenletrendszer jobboldala hasonló tagokból épül fel. Pontosabban, minden részfolyamat additive járul hozzá a megfelelő deriválthoz. Hangsúlyozzuk, hogy T és L nem belső állapotváltozók, hanem mérésekből ismert bemenő („forcing”) függvények. Az idézett [12] dolgozat tartalmazza az így megszerkesztett differenciálegyenletrendszer numerikus megoldásával kapott eredményeket és azok értékelését. A determinisztikus és a sztochasztikus modellből kapott eredmények összevetésével pedig az alábbiakban fogunk foglalkozni.

3.3. A determinisztikus BEM egy sztochasztikus megfelelője

E dolgozatban a fő célunk a balatoni ökoszisztémában meglevő fluktuációk vizsgálása. A belső fluktuációk érdekelnek bennünket és nem a mérési hibák; továbbá nem kívánunk bevezetni újabb paramétereket. Ezért a BEM alább következő sztochasztikus változatát hoztuk létre.

A modell folytonos idejű, diszkrét állapotterű, ugró Markov-folyamat, amelynek ugyanazok a változói és részfolyamatai, mint a determinisztikuséi. Ezt a (vektoriális) sztochasztikus folyamatot x -szel, értékét esetenként n -nel jelöljük.

Összpontosítsunk ismét a nyári alga elsődleges termelésére. Most ezt a részfolyamatot az

$$(3.1) \quad a_2 \rightarrow a_2 + 1 \quad p \rightarrow p - nr \quad n \rightarrow n - nr$$

állapotátmenet fogja kifejezni azon feltétel mellett, hogy az állapotvektor megfelelő koordinátáinak értéke a_2 , p és n ; a pr és nr konstans pedig a szerves anyag foszfor- és nitrogéntartalmát adja meg. Ez az átmenet úgy is kifejezhető, hogy a 2. részfolyamat (lásd a 3. táblázat 2. sorát) által okozott *nettó állapotváltozás*

$$z_2 := e_2 - pr * e_7 - nr * e_8.$$

(Itt és a 3. táblázatban e_1, \dots, e_{10} \mathbf{R}^{10} természetes bázisának elemei:

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0); e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0); \dots, e_{10} := (0, 0, \dots, 1).$$

Feltevéseink a következők:

— a (3.1) állapotátmenet bekövetkezésének valószínűsége a $(t, t+h)$ intervallumban

$$P(x(t+h) = n + z_2 | x(t) = n) = R_2(a_2, p, n, t) h + o(h),$$

(vagy $R_2(n_1, n_2, \dots, n_{10}, t) h + o(h)$), ha $h \rightarrow 0$, ahol R_2 -t a 3. táblázat 4. oszlopának 2. sora definiálja;

— az állapotátmenetek egymástól függetlenek;

— annak a valószínűsége, hogy $(t, t+h)$ -ban nem következik be változás:

$$1 - \sum R_i h + o(h).$$

A 3. táblázat az összes olyan információt tartalmazza, amely szükséges folyamatunknak a fenti feltevéseken alapuló definiálásához.

A folyamatot így lényegében az infinitézimális átmenetvalószínűségek megadásával definiáltuk, lásd például [14, 7. fej.] vagy [18, 4. fej.].

Feltevéseink alapján a folyamat $P_n(t) := P(x(t) = n)$ abszolút valószínűségeire a következő *alapegyenletet* kapjuk:

$$\dot{P}_n(t) = \sum_i P_{n-z_i}(t) R_i(n-z_i, t) - \sum_i P_n(t) R_i(n, t),$$

ahol

$$n \in \mathbb{N}_0^6 \times \mathbb{N}_P \times \mathbb{N}_N \times \mathbb{N}_0^2,$$

ahol

$$\mathbb{N}_P := \{m + n * pr; m, n \in \mathbb{N}_0\}; \quad \mathbb{N}_N := \{m + n * nr; m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Az alapegyenlethez még hozzáveendők a (például determinisztikus) kezdeti feltételek és ismernünk kell az L_0 és T függvényeket. Ez utóbbiak az R_i -ken keresztül lépnek be, amint azt a 3. táblázatban lehet látni.

Az állapottér ilyenén definíciója a kémiai reakciókinetikában teljesen realisztikus, mivel ott az állapotváltozásnak közvetlen fizikai jelentése van: azt jelenti, hogy végbement egy elemi reakció és maga a változás legtöbbször egyetlen molekula megváltozását jelenti. Az ökológiai kontextusban azonban a változás egységének nincs természetes biológiai jelentése, ez egy mesterséges egység, amiben a változásokat mérjük. Ennek a mennyiségnek az értéke szimulációról szimulációra változhat. Ez egy további paraméter, amit mégis be kell vezetnünk (vagy tíz további paraméter, ha a különböző összetevőket különböző mértékegységekben mérjük.)

Szimulációs eredményeink összhangban vannak azon egyszerűbb rendszerekre vonatkozó állításokkal, amelyek szerint a folyamat szórása csökken, ha ezt az egységet csökkentjük. (Az elmélet szerint egyszerűbb modellek esetében az összefüggés lineáris.) Ezt a jelenséget érdemes összevetni a [24] könyv 17. oldalán mondottakkal.

Itt érdemes megemlíteni, hogy a bemenő és a terhelést kifejező részfolyamatokat úgy tekintjük, mintha azok *hatása* a rendszerre sztochasztikus lenne (azért, hogy egy egységes modellünk legyen), de ezeket a részfolyamatokat nem *modellezzük*.

Elég nehéznek tűnik, hogy bármit is mondjunk az alapegyenletnek, ennek a nagyon nagy, lineáris, változó együtthatós differenciálegyenletnek a megoldásáról. Sokkal többet ígér a folyamat *szimulálása*, azaz a fenti feltételeknek eleget tevő folyamat egyedi realizációinak előállítása számítógép segítségével.

Ugyanennek a folyamatnak adhatunk egy olyan definíciót is, amely az előzővel ekvivalens, de a szimulálás céljára jobban használható. Ez a definíció Doob egy közismert tételén alapul. A lépések a következők:

1. Az összes állapotváltozó konstans marad egy véletlen, exponenciális eloszlású időtartamig. Ennek az időtartamnak a várható értéke $\sum R_i$, és az egymás utáni időtartamok egymástól függetlenek.

2. Ez után a periódus után véletlenszerűen kiválasztjuk az egyik részfolyamatot és az állapotváltozókat a kiválasztott részfolyamatnak megfelelő módon megváltoztatjuk. Annak a valószínűsége, hogy például a 2. részfolyamatot választjuk ki, arányos az $R_2(a_2, p, n, t)$ számmal.

Ez után az ugrás után ismét az 1. lépés következik.

A két definíció ugyanazt a *Markov-folyamatot* definiálja; amikor az MTA IBM 3031 gépére SIMULA '67 nyelven a modell szimulálására programot készítettünk, a második definíciót használtuk. A folyamat szimulált realizációi általában jól egyeznek a mért adatokkal is és a determinisztikus értékekkel is.

4. Eredmények, diszkusszió

4.1. Egy elméleti megjegyzés

Ezt a sztochasztikus modellt úgy szerkesztettük, hogy a modellből számolt feltételes várható sebesség *pontosan megegyezzen* a determinisztikus modellben szereplő sebesség értékével. Ezt az állítást kissé részletesebben is megfogalmazzuk. Egy tetszőleges x sztochasztikus folyamatra definiáljuk a folyamat feltételes várható sebességét a következőképpen:

$$(4.1) \quad D_1(t, n) := \lim_{h \rightarrow 0} 1/h E\{x(t+h) - x(t) | x(t) = n\}.$$

Ha a determinisztikus modellben a jobboldal f , azaz a differenciálegyenlet

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)),$$

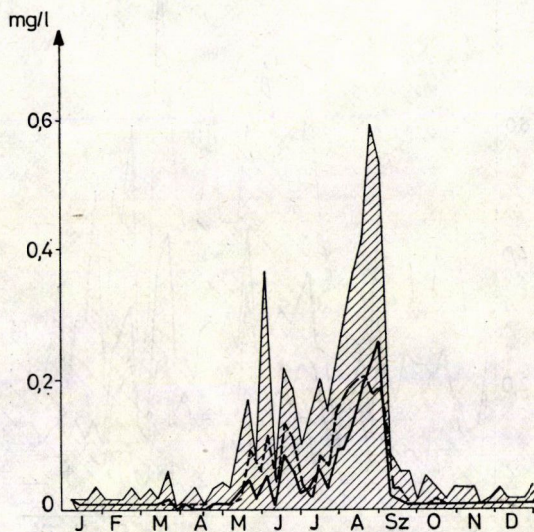
akkor állításunk úgy szól, hogy a determinisztikus BEM és az itt definiált sztochasztikus BEM között a következő viszony áll fenn:

$$D_1(t, X) = f(t, X)$$

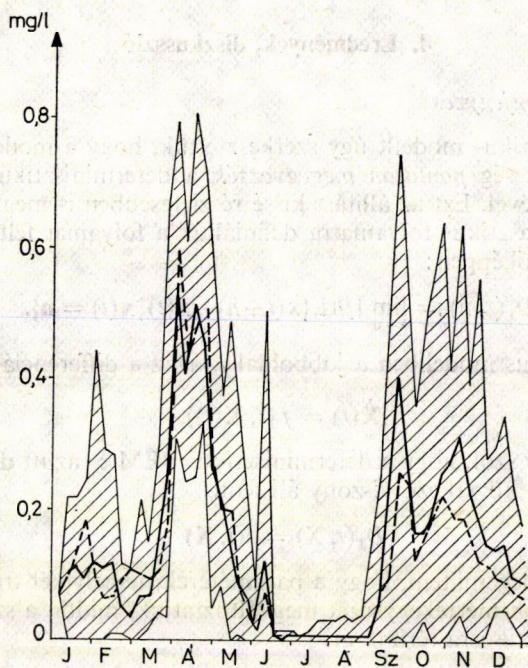
(v. ö. [9]). Fontos megemlíteni, hogy a paraméterek némelyikét transzformálni kell, ha az állapotváltozók mértékegységét megváltoztatjuk, midőn a sztochasztikus modellről a determinisztikusra térünk át.

4.2. Szimulációs eredmények

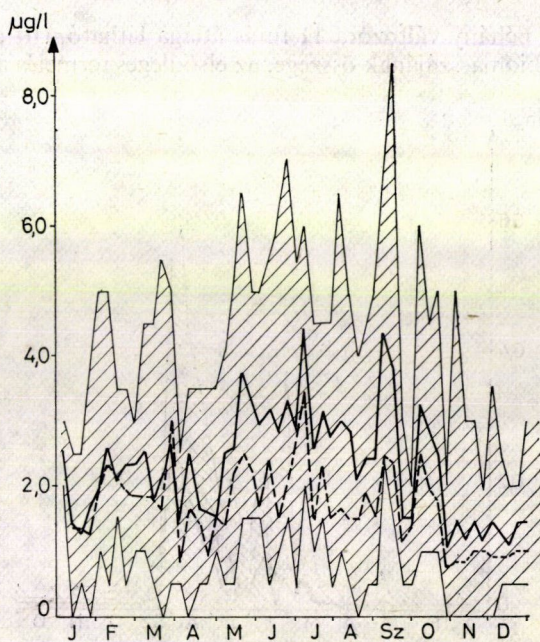
A 2—8. ábrán néhány változóra 11 futás átlaga látható. (Itt az alga biomassa a különböző algák biomasszájának összege, az elsődleges termelés a különböző algák



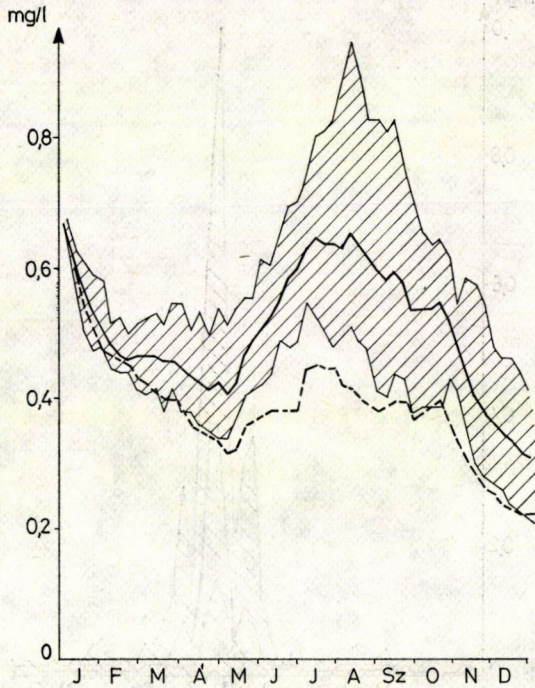
2. ábra. A nyári fitoplankton biomasszája



3. ábra. Téli-tavaszi fitoplankton biomasszája



4. ábra. Az oldott szervetlen foszfor koncentrációja



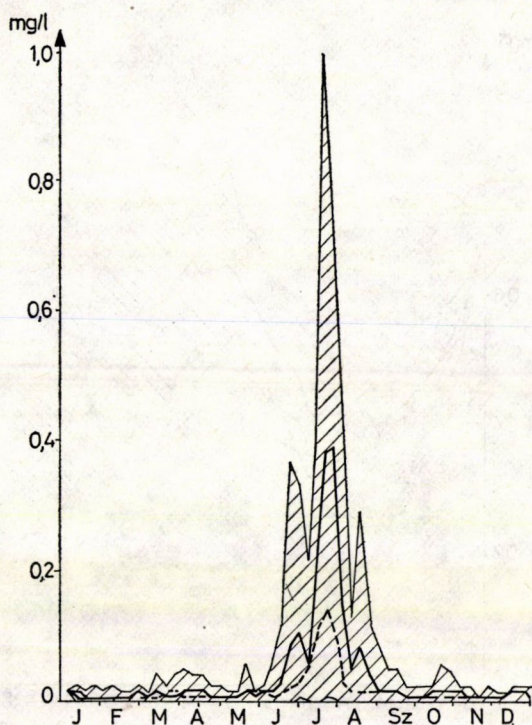
5. ábra. Kicserélhető foszfor az üledékben

elsődleges termelésének összege.) A minimális és a maximális értékek; valamint a determinisztikus modellből *Euler-módszerrel* számított értékek is föl vannak tüntetve.

Az ábrákon a következő jelöléseket használtuk: a vastag vonal a sztochasztikus átlagot, a szaggatott a determinisztikus értéket jelöli. A sztochasztikus átlag körüli sávot a minimális és a maximális érték határolja. A 7. és a 8. ábrán szereplő pontok mért adatok.

A szimulációs futások általános képe azt mutatja, hogy a sztochasztikus várható érték közel van a determinisztikus értékhez. (Ez a tény összhangban van KURTZ [19] eredményeivel, amelyek hasonló, de nem teljesen ilyen típusú modellekre vonatkoznak.) A determinisztikus görbe mindig a maximum- és minimumgörbe között halad, kivéve az üledékben levő kicserélhető foszfor esetét. Ekkor a determinisztikus görbe a szimulált időszak legnagyobb részében a minimumgörbe alatt halad, de alakja hasonló a többiéhez.

Jelentős különbség van a sztochasztikus átlag és a determinisztikus eredmények között, és még nagyobb a különbség az egyes realizációk és a determinisztikus érték között a kék alga biomasszájának esetében. A maximumhelynél a maximumgörbe értéke tízszerese a determinisztikusénak. Ez arra mutat, hogy a rendszer (a valóságos is, nem csak a modell!) rendkívül instabilis, mivel valóban: két egymás utáni hasonló időjárású évben, 1982-ben és 1983-ban, amikor a terhelések között kevés különbség volt, a nyári biomassza értékek rendkívül eltértek egymástól. Ezt a tényt determinisztikus modellel nem könnyű megmagyarázni.



6. ábra. A kék alga biomasszája

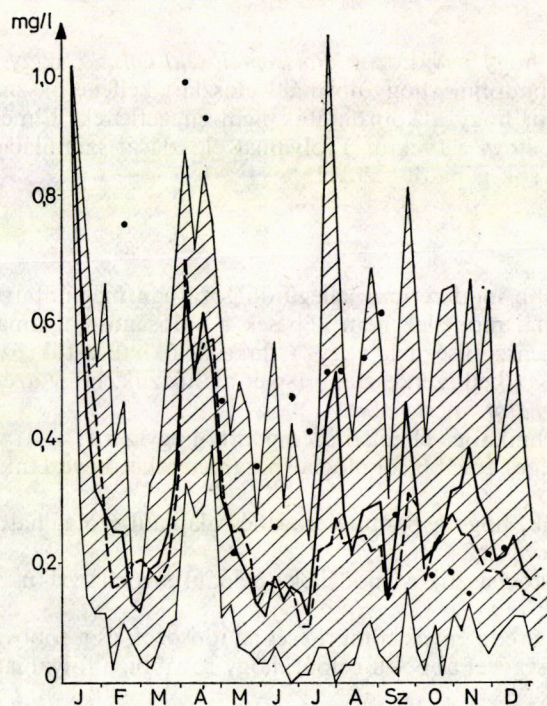
Amint már korábban is hangsúlyoztuk, ha a mérések a determinisztikus modellel adekvát módon leírhatók, akkor leírhatók a sztochasztikussal is. A 7. és a 8. ábrán szereplő mérési pontok legtöbbje a vonalkázott területen fekszik. Az a tény, hogy néhány pont a jelzett területen kívülre is esik, azzal magyarázható, hogy időkésést nem vettünk figyelembe a modellben. Amikor ugyanis modelleztük a folyamatot, fontosabb volt, hogy a csúcsok magasságát visszkapjuk, mint az, hogy a csúcs megjelenése időpontját teljes pontossággal megadjuk (és ehhez egy további konstanst — az időkésést — bevessünk).

A realizációk némelyike képes volt egész magas értékeket szolgáltatni, míg más realizációk jóval a determinisztikus értékek alatt haladtak. Ez is alátámasztja, hogy ökológiai modellek esetén a belső fluktuációk hatása igen jelentős lehet.

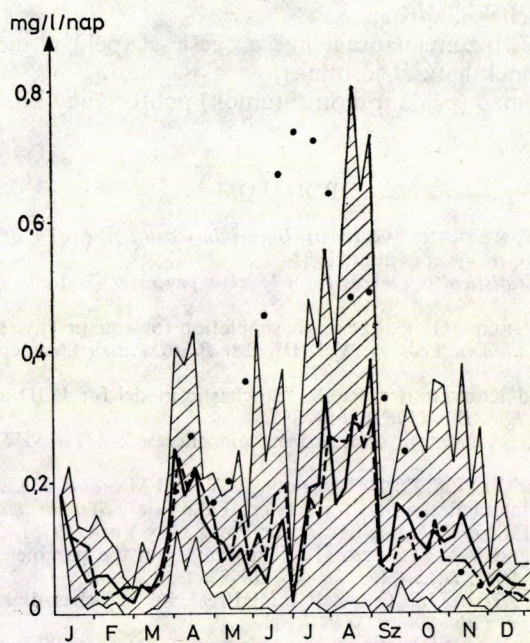
Ennek a modellnek a szimulálása mindössze körülbelül háromszor annyi gépidőbe kerül, mint a determinisztikusé. Egy év hosszúságú periódus szimulálása az IBM 3031 gépen 2—3 percig tart. (A gépidőigény igen erősen függ a paramétereiktől és a kezdeti feltételektől.)

Azt reméljük, hogy a közeljövőben megfelelő paraméterekkel olyan megbízhatósági intervallumokat tudunk majd az átlag-idő függvények köré szerkeszteni, amelyek a legtöbb mérési adatot az idő nagy részében lefedik. Ez nem olyan könnyű feladat, amilyennek látszik, v. ö. [27].

Nyílt kérdés még, hogy milyen eloszlás alapján szerkesszük a megbízhatósági intervallumokat. SCHOFIELD és KRUTCHKOFF [24] szerint GRIFFITH bizonyos model-



7. ábra. Alga biomassza



8. ábra. A fitoplankton elsődleges termelése

lekre megmutatta, hogy a változók *Poisson-eloszlásúak*. A nagy számok törvénye miatt inkább azt gondoljuk, hogy normális eloszlást kellene használni. Azt is figyelembe kellene venni, hogy a koordináták nem függetlenek. Elméletileg a kielégítő megoldás az lenne, hogy a (vektor!) folyamat eloszlását szimulációs futásokból becsüljük, de ez igen sok gépidőt igényel.

4.3. Távlatok

Ebben az inkább módszertani jellegű dolgozatban megmutattuk, hogy a determinisztikus ökológiai modellek nem képesek a valóságos folyamatok egy lényeges vonásának, a véletlenszerűségnek vagy a fluktuációknak a tükrözésére. Ezért sztochasztikus modelleket kell szerkeszteni. Ismét aláhúzzuk, hogy azért választottuk az *ugró Markov-folyamatot*, mert

- számítástechnikai és elméleti szempontból egyszerű;
- nem szükséges további ökológiai paramétereket bevezetni a fluktuációk leírásához;

- azt reméljük, hogy a paraméterbecslés alapjául szolgálhat.

A továbbiakban tervezzük

- másfajta sztochasztikus modellek (például sztochasztikus differenciálegyenletek) kipróbálását;

- a szimulált eredmények tömörítését az idősorok és a többváltozós statisztika módszereinek segítségével abból a célból, hogy további, a folyamatot jellemző paramétereket nyerjünk;

- a paraméterbecslés lehetőségeinek tanulmányozását a jelenlegi (vagy más) sztochasztikus modellek alapján;

- az előrejelzés bizonytalanságainak a becslését (például, amikor a tápanyagterhelés csökkentésének hatását jósoljuk);

- néhány jellemző (például momentumok) pontos vagy közelítő analitikus kiszámítását.

IRODALOM

- [1] BECK, M. B. and VAN STRATEN, G. (eds.), *Uncertainty and Forecasting of Water Quality* IIASA (Conference Series), megjelenés alatt, 1983.
- [2] BILLINGSLEY, P., *Statistical inferences from Markov processes* (2nd ed., University of Chicago Press, 1975).
- [3] CHEN, C. W. and ORLOB, G. T., "Ecologic simulation for aquatic environments", in: *Systems analysis and simulation in Ecology*, Vol. III. Ed. B. R. Patten (Academic Press, New-York, 1975.) 476—588.
- [4] CUSTER, S. W. and KRUTCHKOFF, R. G., "Stochastic model for BOD and DO in estuaries", *ASCE J. Sanitary Eng. Div.* (1969) 865—885.
- [5] CSÁKI, P. (szerk.), „A balatoni ökoszisztéma modellezése”, *MTA SZTAKI Tanulmányok* 93 (1979) 1—92.
- [6] DI TORO, D. M., O'CONNOR, D. J., THOMANN, R. V. and MANCINI, J. L., "Phytoplankton-zooplankton-nutrient interaction model for Western Lake Erie", *Systems analysis and simulation in Ecology*, Vol. III. Ed. B. R. Patten (Academic Press, New York, 1975) 424—475.
- [7] DI TORO, D. M. and VAN STRATEN, G., "Uncertainty in the parameters and predictions of phytoplankton models", *IIASA WP* 79—27 (1979).
- [8] ÉRDI, P., SÍPOS, T., TÓTH, J., „Összetett kémiai reakciók sztochasztikus szimulálása számítógéppel”, *Magy. Kém. Foly.* 79 (1973) 97—108.
- [9] ÉRDI, P. and TÓTH, J., "Stochastic reaction kinetics = "Non-equilibrium thermodynamic" of the state space?" *React. Kinet. Catal. Lett.* 4 (1976) 81—85.

- [10] FEDRA, K., VAN STRATEN, G. and BECK, M. B., "Uncertainty and arbitrariness in ecological modelling — A Lake modelling example", *Ecol. Mod.* 13 (1981) 87—110.
- [11] FULLER, F. C. JR. and TSOKOS, C. P., "Time series analysis of water pollution data", *Biometrics* 27 (1971) 1017—1034.
- [12] HERODEK, S., KUTAS, T. and CSÁKI, P., "Simulation of phytoplankton dynamics in Lake Balaton", *ISEM Journal* 4 (1982) 97—126.
- [13] HERODEK, S., VÖRÖS, L., TÓTH, F., „A fitoplankton tömege, produkciója és a Balaton eutrofizálódása. III. rész: Szemes 1976—77, Tihany 1977" *Hidrológiai Közöny* 62 (1982) 220—229.
- [14] GIHMAN, I. I., SZKOROHOD, A. V., *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe.* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.)
- [15] JERNIGAN, R. W. and TSOKOS, C. P., "Simulation of a nonlinear stochastic ecology model", *Appl. Math. and Comp.* 7 (1980) 9—25.
- [16] JERNIGAN, R. W., TURNER, J. C. and TSOKOS, C. P., "Parameter and moment bounds for a nonlinear stochastic ecology model", *Appl. Math. and Comp.* 7 (1980) 27—53.
- [17] JØRGENSEN, S. E., "An eutrophication model for a Lake", *Ecol. Model.* 2 (1976) 147—165.
- [18] KARLIN, S., TAYLOR, H. M., *Sztochasztikus folyamatok.* (Gondolat, Budapest, 1985).
- [19] KURTZ, T. G., *Approximation of Population Processes.* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa.), (1981).
- [20] MOUSHEGIAN, R. H. and KRUTCHKOFF, R. G., *Generalized initial conditions for the stochastic model for pollution and dissolved oxygen in streams.* (Water Resource Research Center Bulletin No. 28 Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia, 1969 (Aug.)).
- [21] PADGETT, W. J., "A stochastic model for stream pollution", *Math. Biosci.* 25 (1975) 309—317.
- [22] PARK, R. ET AL., "A generalized model for simulating Lake ecosystems". *Simulation* 23 (1974) 33—50.
- [23] PARKER, R. A., "Some consequences of stochasticizing an ecological system model", *Lecture Notes in Biomathematics* 2 (1974).
- [24] SCHOFIELD, W. R. and KRUTCHKOFF, R. G., *Stochastic Model for a Dynamic Ecosystem.* (Water Resources Research Center Bulletin No. 60. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia, (1974).
- [25] THAYER, R. P. and KRUTCHKOFF, R. G., "Stochastic model for BOD and DO in streams", *ASCE J. Sanitary Eng. Div.* 93 (No. SA3) (1967) 59—72 (Paper 5297).
- [26] THOMANN, R. V., "Time-series analysis of water quality data", *J. San. Engng. Div. ASCE*, SA1 (1967) 1—23.
- [27] TIWARI, J. L. and HOBBI, J. E., "Random differential equations as models of ecosystems, II: Initial conditions and parameter specifications in terms of maximum entropy distributions", *Math. Biosci.* 31 (1976) 37—53.

(Beérkezett: 1984. november 29.)

(Átdolgozva beérkezett: 1986. március 28.)

KUTAS TIBOR ÉS TÓTH JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1014 BUDAPEST, ÜRI U. 49.

A STOCHASTIC MODEL OF THE PHYTOPLANKTON DYNAMICS IN LAKE BALATON

T. KUTAS and J. TÓTH

Deterministic models (mainly systems of differential equations) are usually used to model lake ecosystems; however they are inadequate for reflecting the inherently random behaviour of ecosystems. A stochastic version of the *Balaton Eutrophication Model*, a *Markovian jump process* has been devised consisting of the same components and subprocesses as the deterministic one, but the changes of state proceed as follows: the system stays at a state for a random period of time, then one of the subprocesses (selected at random) takes place.

Relations between the two approaches are discussed showing that in this case the stochastic approach provides an explanation for large fluctuations in measured data (especially in the case of blue-green algae) while the deterministic approach gives none.

A MECHANIKAI ERŐEGYENSÚLY ÉS A NEMLINEÁRIS PROGRAMOZÁS KAPCSOLATÁRÓL

RAPCSÁK TAMÁS—SZENTHE JÁNOS

Budapest

Az analitikus mechanika a klasszikus mechanika egyik ága, amelynek az alapproblémája a tömegpontrendszerek mozgásának és egyensúlyi állapotának a jellemzése. A fizikusok és a matematikusok már hosszú idő óta foglalkoznak ezzel a problémával és jóllehet majdnem minden mechanikával foglalkozó könyvben található ezzel a témával foglalkozó rész, mégis a probléma matematikai tárgyalása nem tekinthető lezártnak.

A dolgozatban kísérletet teszünk a véges szabadságfokú mechanikai rendszerek erőegyensúlyával kapcsolatos matematikai problémák rendszerezésére, a virtuális munka elvének és a *Courtivron-elvnek* az összehasonlítására és a lehetséges sebességek jellemzésére általános kényszerfeltételek esetén.

1. Bevezetés

A nemlineáris programozás név az 1950-ben publikált KUHN—TUCKER cikkből [18] származik, amelyben a szerzők az optimalitás szükséges feltételeit vezették le. Jóllehet KARUSH W. ugyanezeket az összefüggéseket már 1939-ben megkapta [17] és — mint PRÉKOPA A. rámutat [26], [27] cikkeiben — LAGRANGE [19], BERNOULLI [19], FOURIER [13], COURNOT [8], GAUSS [15], OSZTROGRADSKIJ [25] eredményeinek felhasználásával lényegében ugyanezt az állítást bizonyította FARKAS is a mechanikai egyensúly problémáját vizsgálva [9], [10], [11], mégis a nemlineáris programozás gyors fejlődése csak a KUHN—TUCKER cikk megjelenése után indult meg. Kialakulására és a jelentőségének a felismerésére ugyanis döntő hatással volt az elektronikus számítógépek megjelenése (1946), a lineáris programozás és a simplex módszer megalkotása (KANTOROVICS 1939, DANTZIG 1947).

FARKAS GYULA 1901-ben publikálta a homogén, lineáris egyenlőtlenségrendszerekre vonatkozó alaptételét [10], amelyre napjainkban nagyon sok optimalizáláselméleti cikk szerzője hivatkozik. Azonban úgy tűnik, hogy ennek az eredménynek a mechanikai erőegyensúllyal való kapcsolata sem a matematikában, sem a fizikában nem ismert eléggé. Valószínűleg ez az egyik oka annak, hogy a mechanikai erőegyensúllyal kapcsolatos matematikai problémák rendszerezése és egységes tárgyalása eddig nem került előtérbe és a különböző munkákban csak speciális esetek szerepelnek [7], [12], [14], [20], [32], [33].

A dolgozatban kísérletet teszünk a véges szabadságfokú mechanikai rendszerek erőegyensúlyával kapcsolatos matematikai problémák rendszerezésére, a virtuális munka elvének és a *Courtivron-elvnek* az összehasonlítására és a lehetséges sebességek jellemzésére általános kényszerfeltételek esetén.

Szeretnénk köszönetet mondani PRÉKOPA ANDRÁSNAK, aki felhívta a figyelmünket a témára és a [26], [11] cikkekre, amelyek a dolgozat kiindulópontját jelentették.

2. A probléma megfogalmazása

A probléma — amelyet a newtoni mechanika keretei között tárgyalunk — egyik legáltalánosabb megfogalmazása a következő: Legyen adott az R^3 -ban (a 3 dimenziós euklideszi térben) n darab tömegpont, amelyekre a P_1, \dots, P_n aktív erők hatnak. Ezenkívül legyenek adottak a kényszerek, amelyek a tömegpontok mozgására az egyedüli korlátozást jelentik.

A feladat a rendszer mechanikai állapotának a meghatározása vagy speciális esetben a rendszer egyensúlyi állapotának a jellemzése.

A rendszer mechanikai állapotának a meghatározása a mozgásegyenletek felírását jelenti. Akkor mondjuk, hogy a mechanikai rendszer erőegyensúlyban van, ha minden tömegpontra az aktív erők és a reakcióerők összege nulla, ahol reakcióerőknek azokat az erőket nevezzük, amelyek a tömegpontokat a kényszereknek megfelelő pályán tartják.

Az anyagi pontrendszer helyzetét és mozgását a helykoordináták időfüggvényei segítségével adhatjuk meg a $3n$ -dimenziós térben. Ebben a cikkben azzal az esettel foglalkozunk, mikor a pontrendszer egy lehetséges mozgását egy $x(t): R \rightarrow R^{3n}$ kétszer folytonosan differenciálható vektorfüggvény adja meg, amely eleget tesz a kényszerfeltételeknek. Az $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ vektorok a sebességet, illetve a gyorsulást jelentik.

Az anyagi pontrendszer erőegyensúlyának a jellemzéséhez a virtuális munka elvét használjuk fel. A virtuális munka elvéről, illetve annak történeti vonatkozásairól részletesen olvashatunk a [26], [27] cikkekben. Ez elv szerint, ha a pontrendszer egyensúlyban van és a súrlódás elhanyagolható, akkor az aktív erők munkája a virtuális elmozdulások irányában kisebb vagy egyenlő mint nulla, azaz ha a pontrendszerre ható erőket a $P \in R^{3n}$ sorvektor jelöli, a virtuális elmozdulásokat a $v \in R^{3n}$ oszlopvektor, akkor a virtuális munka elve szerint bármely v virtuális elmozdulásra teljesül a

$$(2.1) \quad P v \leq 0$$

egyenlőtlenség. (A virtuális elmozdulások pontos meghatározása a 6. részben található).

A továbbiakban csak olyan mechanikai rendszerekkel foglalkozunk, ahol a súrlódás elhanyagolható. A külön hivatkozás nélkül felhasznált fogalmak a [7], [14] könyvekben megtalálhatók.

Mivel a rendszer mechanikai állapotának a meghatározásához szükség van a kényszerek matematikai jellemzésére is, ezért először ezzel foglalkozunk.

3. A kényszerek jellemzése

A kényszerfeltételeket a különböző könyvekben és cikkekben található tárgyalási módok alapján az alábbi szempontok szerint osztályozhatjuk.

I. A kényszerfeltételben szereplő változók szerint a következő eseteket különböztetjük meg:

$$(3.1) \quad \begin{array}{ll} \text{I. a.: } x & \text{I. c.: } x, t \\ \text{I. b.: } x, \dot{x} & \text{I. d.: } x, \dot{x}, t. \end{array}$$

II. A kényszerfeltételt megadó relációk szerint a következő eseteket különböztetjük meg:

- (3.2) II. a.: a kényszerfeltétel egyenlőséggel van megadva
 II. b.: a kényszerfeltétel egyenlőtlenséggel van megadva
 II. c.: a kényszerfeltétel felületként vagy sokaságként van megadva
 II. d.: a kényszerfeltétel nem véges alakban van megadva.

A kényszerfeltételek rendszerében ezután a fenti esetek bármely értelmes kombinációja elképzelhető.

III. A konfigurációs tér szerint a következő két esetet különböztetjük meg:

- (3.3) III. a.: a konfigurációs tér euklideszi
 III. b.: a konfigurációs tér nem euklideszi, hanem valamilyen más differenciálható sokaság [2], [3], [30], [31].

A fizikában használatos terminológia szerint, ha a kényszerfeltételekben szereplő változók között a t (idő) nem szerepel (I. a, I. b.), akkor a rendszer skleronom, a többi esetben pedig rheonom (I. c, I. d.). Egy másik felosztás szerint [14] az I. a, I. c. esetekben a kényszerfeltétel véges vagy geometriai, az I. b, I. d. esetekben pedig differenciál vagy kinetikus.

A kényszerfeltételeket megadó relációk szerint a II. a, II. b, II. c. esetekben, illetve ezek kombinációiban a rendszer holonom, abban az esetben pedig, ha a kényszerfeltételek között II. d. típusú is szerepel, akkor nem holonom vagy anholonom. Megjegyezzük, hogy ez utóbbi kérdésben a terminológia nem egységes. A holonom rendszer definíciója ugyanis az [1], [7], [23], [32] könyvekben különböző. Itt a legelterjedtebb definíciót fogadtuk el.

A II. d. pontban szereplő eset (mikor a kényszerfeltétel nem véges alakban van megadva) azt jelenti, hogy közvetlenül a virtuális elmozdulásokra vagy a lehetséges sebességekre van megkövetelve egy lineáris egyenlőség vagy egy lineáris egyenlőtlenség teljesülése. Az ilyen típusú feltételek természetesen az anyagi pontrendszer különböző állapotaiban különbözők lehetnek. Ennek az esetnek a tárgyalása megtalálható az [1], [11], [14] munkákban.

4. A rendszerre ható aktív erők

A rendszerre ható aktív erőkről azt tételezzük fel, hogy a hely, a sebesség és az idő folytonosan differenciálható függvényei. Elméletileg az erő a magasabb deriváltaktól is függhet, de ezt a newtoni mechanika keretei között nem vizsgálják.

Ha az erők csak a helykoordinátáktól függenek, akkor erőtérről beszélünk (pl. gravitációs tér).

Egy nagyon fontos speciális eset a konzervatív erőter, mikor létezik olyan, csak a helykoordinátáktól függő $V(\mathbf{x})$ függvény, amelyre

$$(4.1) \quad \mathbf{P} = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

(Megállapodás szerint egy függvény gradiense sorvektor). Megjegyezzük, hogy mind a centrális tér, mind pedig a gravitációs tér konzervatív erőter.

5. Az erőegyensúlyi pont jellemzése a Courtyivron-elvvel

A tömegpontrendszer mozgásánál az egyik legegyszerűbb eset az, mikor a pontrendszer konzervatív erőterben mozog, a kényszerek egyenlőség és egyenlőtlenség feltételekkel vannak megadva és csak a helykoordinátáktól függenek. Ebben az esetben az erőegyensúly jellemzéséhez a virtuális munka elve helyett kiindulhatunk a speciálisabb *Courtyivron-elvből*, amely szerint erőegyensúly esetén a $V(\mathbf{x})$ potenciál-függvénynek stacionárius pontja van az adott kényszerfeltételek mellett, azaz az alábbi nemlineáris programozási feladatnak az \mathbf{x}_0 egyensúlyi pont *Kuhn—Tucker pontja*.

$$\begin{aligned} & \min V(\mathbf{x}) \\ (5.1) \quad & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

ahol $g_i(\mathbf{x}), h_j(\mathbf{x}) \in C^2, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, p$.

Ilyen kényszertípusokkal foglalkoznak a [7], [23], [26], [27] munkák.

Az optimalizáláselméletből ismert [17], [18], [21], [22], hogy az (5.1) feladatban az optimalitás elsőrendű szükséges feltételének a teljesüléséhez szükség van egy regularitási feltételre. A későbbiekben belátjuk, hogy az itt tárgyalt esetben e regularitási feltétel mellett a *Courtyivron-elv* és a virtuális munka elve ekvivalens. Ez a vizsgálat egyben lehetőséget ad arra is, hogy megnézzük meddig terjed a *Courtyivron-elv* hatóköre.

Hasonlóan történik az egyensúlyi pont jellemzése, ha a kényszerek elemi felületként vagy euklideszi térbe beágyazott differenciálható sokaságként, illetve ezeken kívül egyenlőségi és egyenlőtlenségi feltételekkel vannak megadva. Ekkor a következő feladatokat tekintjük:

$$\begin{aligned} & \min V(\mathbf{x}) \\ (5.2) \quad & \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}) \in R^{3n}, \quad \mathbf{u} \in U_k \\ & \text{ahol } x_i(\mathbf{u}) \in C^2, \quad i = 1, \dots, 3n, \\ & \min V(\mathbf{x}) \\ (5.3) \quad & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \\ & \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}) \in R^{3n}, \quad \mathbf{u} \in U_k \end{aligned}$$

ahol $g_i(\mathbf{x}), h_j(\mathbf{x}), x_l(\mathbf{u}) \in C^2, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, p; \quad l = 1, \dots, 3n,$

az $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ kényszerfelület paraméteres alakban van megadva és U_k a k -dimenziós paraméter tér vagy annak egy részhalmaza.

Az (5.2) feladat optimalitási feltételeivel foglalkoznak a [28], [29] dolgozatok. Az (5.3) feladat hasonlóan kezelhető. (Például egy lehetőség, hogy az egyenlőtlenség és az egyenlőség feltételeket a büntető paraméterek segítségével beolvasztjuk a cél-függvénybe az optimalizáláselmélet egy ismert módszere szerint [4], [21].)

A *Courtyivron-elv* komoly előnye, hogy a segítségével megfogalmazott nemlineáris programozási feladatok esetén módszerek is állnak rendelkezésünkre az egyensúlyi pont megkeresésére.

6. Az erőegyensúlyi pont jellemzése a virtuális munka elvével

Ha a pontrendszer nem konzervatív erőterben mozog vagy a kényszerfeltételek között nem véges alakok is szerepelnek, akkor a *Courtivron-elvet* nem tudjuk alkalmazni. Ebben az esetben az általánosabban érvényes virtuális munka elvét kell közvetlenül felhasználni.

A virtuális munka elve a klasszikus mechanika egyik legrégebbi összefüggése, amelyet BERNOULLI mondott ki először 1717-ben [19]. A BERNOULLI által kimondott virtuális munka elve az egyenlőség típusú kényszerfeltételek esetére vonatkozik. Az elvet egyenlőtlenség típusú kényszerfeltételek esetére FOURIER mondta ki 1798-ban [13], majd GAUSS 1829-ben [15]. Azonban már COURNOT 1827-ben [8] és OSZTROGRADSKIJ 1838-ban [25] rájött arra, hogy a virtuális munka elvének felhasználásakor nehézséget okoz az, hogy benne szerepelnek a virtuális elmozdulások, ezért egyenlőség és egyenlőtlenség típusú kényszerfeltételek esetén kiküszöbölték ezeket, azaz felírták a *Farkas-tétel* állítását, de nem bizonyították. Ezt FARKAS bizonyította először 1898-ban [9]. A virtuális munka elvének történeti vonatkozásairól részletesen lehet olvasni a [26] cikkben.

Nézzük meg, hogyan lehet az erőegyensúlyi pontot jellemezni a virtuális munka elvével abban a klasszikus esetben, mikor a kényszerek csak a helykoordinátáktól függő, egyenlőség és egyenlőtlenség típusú feltételekkel vannak megadva a következő formában:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

$$\text{ahol } g_i(\mathbf{x}), h_j(\mathbf{x}) \in C^2, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, p.$$

A virtuális elmozdulások előállításához szükség van a virtuális elmozdulások definíciójára. A BANACH által írt [7] könyvben található klasszikus értelmezés, mely a speciális (6.1) feltételrendszer esetére érvényes, a következő:

6.1. DEFINÍCIÓ ([7]). A vizsgált anyagi pontrendszer A pontból B pontba irányuló elmozdulását lehetségesnek nevezzük, ha az elmozdulást leíró függvény kielégíti a kényszerfeltételeket. Az ezekhez tartozó sebességeket lehetséges sebességeknek nevezzük. A virtuális elmozdulások azok, amelyek a lehetséges sebességek irányába mutatnak.

A definícióból következik, hogy a (6.1) feltételrendszer esetén a virtuális elmozdulások egy kúpot határoznak meg, mégpedig pontosan a *Kuhn—Tucker regularitási feltételben* is szereplő úgynevezett „elérhető irányok” kúpját [5], [6], [16], [17], [18]. Az „elérhető irányok” kúpjának a definíciója a következő:

6.2. DEFINÍCIÓ ([6]). Jelölje A_g az „elérhető irányok” kúpját. Akkor

$$(6.2) \quad \begin{aligned} A_g &= \left\{ \forall \exists \mathbf{x}(t): R \rightarrow R^n, \quad g_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \right. \\ &\quad \left. h_j(\mathbf{x}(t)) = 0, \quad j = 1, \dots, p; \right. \\ &\quad \left. t \in [0, t_0], \quad t_0 \in R, \quad t_0 > 0, \quad \left. \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \right\}. \end{aligned}$$

Legyen

$$(6.3) \quad C_g = \{v/v \in R^{3n}, \nabla g_i(x_0)v \geq 0, i \in I(x_0) = \{i | g_i(x_0) = 0, i = 1, \dots, m\}, \\ \nabla h_j(x_0)v = 0, j = 1, \dots, p\}$$

(ahol $I(x_0)$ az aktív feltételek indexeinek halmaza), akkor az optimalizáláselméletből ismert, hogy a (6.3) képletben szereplő C_g kúpot tekintve

$$(6.4) \quad A_g \subset C_g$$

és a Kuhn—Tucker regularitási feltétel éppen azt követeli meg, hogy az

$$(6.5) \quad A_g = C_g$$

teljesüljön. (Hasonlóan lehet az A_g és a C_g kúpokot, illetve a Kuhn—Tucker regularitási feltételt definiálni abban az esetben is, ha a kényszerfeltételek csak egyenlőtlenség feltételekkel vannak megadva. Ezért a virtuális elmozdulások ebben az esetben is az „elérhető irányok” kúpját adják meg.)

Könnyen látható, hogy felületek esetén a virtuális elmozdulások az érintősíkot feszítik ki.

Így a (6.1) feltételek esetén egy tetszőleges x pontban, amelyben a Kuhn—Tucker regularitási feltétel teljesül, a virtuális elmozdulásokat az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer határozza meg.

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \nabla g_i(x)v &\geq 0, \quad i \in I(x), \\ \nabla h_j(x)v &= 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

A virtuális munka elve szerint ennek a rendszernek egyensúlyi esetben következőképpen kell hogy legyen a

$$(6.7) \quad -Pv \geq 0$$

egyenlőtlenség. A Farkas tétel szerint azonban a (6.6) rendszernek akkor és csak akkor következménye a (6.7), ha léteznek olyan $\mu \geq 0$ és λ vektorok $(\mu, \lambda) \neq 0$, amelyekre fennáll a

$$(6.8) \quad -P = \sum_{i \in I(x)} \mu_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x).$$

Így a virtuális munka elvének az alkalmazásával azt kaptuk, hogy a mechanikai egyensúly szükséges feltétele a pontrendszer egy x állapotában a (6.8) egyenlőség teljesülése.

Látjuk tehát, hogy a virtuális munka elvének felhasználásához egyenlőség és egyenlőtlenség típusú kényszerfeltételek esetén, a homogén, lineáris egyenlőtlenségrendszerek alaptételére, a Farkas tételre van szükség, valamint a Kuhn—Tucker regularitási feltételre.

Megjegyezzük, hogy az analitikus mechanikával foglalkozó munkák az A_g és C_g kúpokot hallgatólagosan megegyezőnek tekintik [1], [7], [23] és ezért a (6.5) regularitási feltétel teljesülését nem követelik meg.

7. A virtuális munka elvének és a Courtyvion-elvnek a kapcsolata

A 5. részben láttuk, hogy ha egy tömegpontrendszer konzervatív erőterben mozog, továbbá a kényszerek egyenlőség és egyenlőtlenség feltételekkel vannak megadva és csak a helykoordinátáktól függenek, akkor az egyensúly szükséges feltétele az, hogy az alábbi nemlineáris programozási feladatnak a vizsgált pont *Kuhn—Tucker pontja* legyen.

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \min V(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Az optimalizáláselméletből [4], [5], [22], illetve az analitikus mechanikával foglalkozó munkákból ismert [7], [11], [26], hogy ha a (7.1) feladat valamely szélsőérték-helyén vagy nyeregpontjában egy regularitási feltétel teljesül, akkor ebben a pontban az optimalitás elsőrendű szükséges feltétele is teljesül, ami nem más mint a (6.8) egyenlőség, azaz a virtuális munka elvének az alkalmazásával a mechanikai egyensúlyra kapott szükséges feltétel. Ez a [26] cikk egyik fő mondanivalója is.

A 6. részben láttuk, hogy a virtuális munka elvének az alkalmazásához is szükség van egy regularitási feltételre. Így ha a (7.1) feladatnál az optimalitási feltételek származtatásához is és a virtuális munka elvének az alkalmazásához is ugyanazt a regularitási feltételt használjuk — a *Kuhn—Tucker regularitási feltételt* — akkor ebben a klasszikus esetben a két elv ekvivalens.

8. A lehetséges sebességek meghatározása általános kényszerfeltételek esetén

Az előző vizsgálatok kapcsán vetődik fel a kérdés, hogy meddig terjed a *Courtyvion-elv* és a virtuális munka elvének hatóköre, azaz elképzelhető-e olyan eset, amikor a két elv egymásnak ellentmondó feltételt eredményez?

Ebben a részben a most felvetett kérdés megválaszolásához kívánunk segítséget nyújtani az alábbi matematikai tétel bizonyításával, amelyben általános kényszerfeltételek esetén a lehetséges sebességeket határozzuk meg.

A dolgozat végén példákon keresztül mutatjuk meg, hogyan lehet a tétel állítását felhasználni.

8.1. DEFINÍCIÓ. A vizsgált anyagi pontrendszer A pontból B pontba történő $\mathbf{x}(t)$ elmozdulását, illetve az ehhez tartozó $\dot{\mathbf{x}}(t)$ sebességeket lehetségesnek nevezzük; ha az $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, t függvények kielégítik a kényszerfeltételeket.

Tekintsük a

$$(8.1) \quad \begin{aligned} g_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ h_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}(u), \quad u \in U_k, \quad \mathbf{x} \in R^{3n} \\ A_1(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}} &= 0, \\ A_2(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}} &\geq 0, \\ t &\geq 0 \end{aligned}$$

feltételrendszert, ahol $g_i, h_j, x_l \in C^2$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, p$; $l = 1, \dots, 3n$,

$\mathbf{x}(\mathbf{u})$ egy kényszerfelület parametrikus megadása,
 k a paraméterter dimenziója,

$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t)$ $k_1(\mathbf{x}, t) \times 3n$ típusú mátrix, ahol $k_1(\mathbf{x}, t)$ a nem véges alakban megadott egyenlőség feltételek számát jelenti,

$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t)$ $k_2(\mathbf{x}, t) \times 3n$ típusú mátrix, ahol $k_2(\mathbf{x}, t)$ a nem véges alakban megadott egyenlőtlenség feltételek számát jelenti.

Legyen $T(\mathbf{u})$ az $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ felület érintősíkjá.

Jelölje $I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \subset \{1, \dots, m\}$ az aktív egyenlőtlenség feltételek indexeinek halmazát.

Tegyük fel, hogy a koordinátarendszer kezdőpontja a vizsgált pontban van és az első $3n$ koordinátatengely a $Z = R^{3n}$ konfigurációs teret feszíti ki, amely be van ágyazva az R^{6n+1} térbe. (A tömegpontrendszer mozgása a konfigurációs térben játszódik le.)

A $6n+1$ — dimenziós euklideszi teret a következő két altér direkt szorzataként állítsuk elő a vizsgált pontban:

$$(8.2) \quad R^{6n+1} = Z \oplus Z^\perp,$$

ahol Z^\perp a Z altér ortogonális komplementumát jelenti. Ennek megfelelően a vizsgált pontban a vektorokat két részre lehet particionálni:

$$(8.3) \quad \nabla g_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = (\nabla \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \nabla \tilde{g}_i^\perp(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(8.4) \quad \nabla h_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = (\nabla \tilde{h}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \nabla \tilde{h}_j^\perp(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)), \quad j = 1, \dots, p,$$

ahol

$$\nabla \tilde{g}_i, \nabla \tilde{h}_j \in R^{3n}, \quad \nabla \tilde{g}_i^\perp, \nabla \tilde{h}_j^\perp \in R^{3n+1}.$$

8.2. TÉTEL: Tekintsük a (8.1) feltételrendszert. Tegyük fel, hogy az R^{6n+1} tér egy megengedett $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ pontjában a

$$(8.5) \quad \begin{aligned} g_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &\cong 0, \quad i \in I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ h_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

feltételekre nézve teljesül a *Kuhn—Tucker regularitási feltétel*. Jelölje ekkor \hat{I}, \hat{J} azokat az indexhalmazokat, amelyekre

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \nabla \tilde{g}_i^\perp(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= 0, \quad i \in \hat{I}, \quad \hat{I} \subset I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ \nabla \tilde{h}_j^\perp(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= 0, \quad j \in \hat{J}, \quad \hat{J} \subset J = \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a

$$(8.7) \quad \nabla \tilde{g}_i^\perp, \quad i \in I - \hat{I}, \quad \nabla \tilde{h}_j^\perp, \quad j \in J - \hat{J}$$

vektorok első n komponenséből álló vektorok lineárisan függetlenek.

Akkor a lehetséges sebességek a vizsgált pontban a következőképpen adhatók meg:

$$\begin{aligned}
 \nabla \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \dot{\mathbf{x}} &\geq 0, \quad i \in I \\
 \nabla \tilde{h}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \dot{\mathbf{x}} &= 0, \quad j \in J \\
 \dot{\mathbf{x}} &\in T(\mathbf{u}), \\
 \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}} &= 0, \\
 \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}} &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.8}$$

Bizonyítás. Az előzőekben láttuk, hogy egy $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ kényszerfelület esetén a lehetséges sebességek az érintősíkot feszítik fel, ezért a (8.8) relációk közül csak az első kettőt kell bizonyítani. Mivel a (8.5) feltételekre nézve teljesül a *Kuhn—Tucker regularitási feltétel*, ezért a lehetséges sebességek meghatározásánál elegendő csak a korábban már definiált C_g kúp elemeit tekinteni.

A feladat tehát az, hogy a (8.5) feltételek C_g kúpjának a Z konfigurációs térre vonatkozó vetületét kell meghatározni.

Mivel (8.3), (8.4) teljesül, ezért a (8.5) feltételekre vonatkozó C_g típusú kúp a következőképpen áll elő:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \tilde{g}_i, \nabla \tilde{g}_i^\perp)(\mathbf{w}, \mathbf{w}^\perp) &\geq 0, \quad i \in I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\
 (\nabla \tilde{h}_j, \nabla \tilde{h}_j^\perp)(\mathbf{w}, \mathbf{w}^\perp) &= 0, \quad j = 1, \dots, p,
 \end{aligned}
 \tag{8.9}$$

ahol minden

$$\nabla \tilde{g}_i, \nabla \tilde{h}_j, \mathbf{w} \in R^{3n}; \quad \nabla \tilde{g}_i^\perp, \nabla \tilde{h}_j^\perp, \mathbf{w}^\perp \in R^{3n+1}.$$

A (8.9) relációknál elvégezve a skaláris szorzást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \nabla \tilde{g}_i \mathbf{w} + \nabla \tilde{g}_i^\perp \mathbf{w}^\perp &\geq 0, \quad i \in I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\
 \nabla \tilde{h}_j \mathbf{w} + \nabla \tilde{h}_j^\perp \mathbf{w}^\perp &= 0, \quad j = 1, \dots, p.
 \end{aligned}
 \tag{8.10}$$

A következő lépésben azt mutatjuk meg, hogy a (8.7) feltételek teljesülése mellett az $I - \hat{I}, J - \hat{J}$ indexhalmazokba tartozó gradiensvektorok nem jelentenek megszorítást a lehetséges sebességekre nézve, azaz az ezen vektorok által felfeszített (6.3) típusú kúpnak a Z térre vonatkozó vetülete az egész Z tér.

Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathbf{w} = \alpha \tilde{\mathbf{w}} \quad \text{ahol} \quad \|\tilde{\mathbf{w}}\| = 1, \quad \alpha \in (0, +\infty).
 \tag{8.11}$$

Akkor (8.10) helyett a következőket írhatjuk az $I - \hat{I}, J - \hat{J}$ indexhalmazokba tartozó gradiensvektorokra:

$$\begin{aligned}
 \alpha \nabla \tilde{g}_i \tilde{\mathbf{w}} + \nabla \tilde{g}_i^\perp \mathbf{w}^\perp &\geq 0, \quad i \in I - \hat{I}, \\
 \alpha \nabla \tilde{h}_j \tilde{\mathbf{w}} + \nabla \tilde{h}_j^\perp \mathbf{w}^\perp &= 0, \quad j \in J - \hat{J}.
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

A (8.12) relációkból látszik, hogy ezek csak akkor nem jelentenek megszorítást a virtuális elmozdulásokra nézve, ha tetszőleges $\tilde{\mathbf{w}}$ vektorhoz tudunk találni olyan $\alpha > 0$ értéket és \mathbf{w}^\perp vektort, hogy $(\alpha, \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{w}^\perp)$ a (8.12) egy megoldását szolgáltatja.

Ezt az állítást indirekt úton bizonyítjuk, azaz feltételezzük, hogy van olyan $\tilde{\mathbf{w}}^*$ vektor, amelyhez nem tudunk olyan $\alpha > 0$ értéket és $\tilde{\mathbf{w}}^{*\perp}$ vektort találni, hogy $(\alpha, \tilde{\mathbf{w}}^*, \tilde{\mathbf{w}}^{*\perp})$ a (8.12) egy megoldását szolgáltatja. Ez azt jelenti, hogy a

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \alpha \nabla \tilde{g}_i \tilde{\mathbf{w}}^* + \nabla \tilde{g}_i^\perp \mathbf{w}^\perp &\equiv 0, \quad i \in I - \hat{I} \\ \alpha \nabla \tilde{h}_j \tilde{\mathbf{w}}^* + \nabla \tilde{h}_j \mathbf{w}^\perp &= 0, \quad j \in J - \hat{J} \end{aligned}$$

homogén, lineáris rendszernek (ahol a változók α és \mathbf{w}^\perp) következménye a

$$(8.14) \quad -\alpha \equiv 0$$

vagy más formában írva az

$$\mathbf{a}^T \begin{pmatrix} \mathbf{w}^\perp \\ \alpha \end{pmatrix} \equiv 0, \quad \mathbf{a}^T = (0, \dots, 0, -1)$$

egyenlőtlenség. Ez a *Farkas tétel* [10] alapján csak úgy lehet, ha a

$$(8.15) \quad \begin{aligned} \sum_{i \in I - \hat{I}} \lambda_i \nabla \tilde{g}_i^\perp + \sum_{j \in J - \hat{J}} \mu_j \nabla \tilde{h}_j^\perp &= 0 \\ \left(\sum_{i \in I - \hat{I}} \lambda_i \nabla \tilde{g}_i + \sum_{j \in J - \hat{J}} \mu_j \nabla \tilde{h}_j \right) \tilde{\mathbf{w}}^* &= -1 \end{aligned}$$

rendszernek van $\lambda_i \geq 0, i \in I - \hat{I}, \mu_j, j \in J - \hat{J}, (\lambda, \mu) \neq 0$ megoldása. Ez viszont a (8.7) feltételnek ellentmond, így bebizonyítottuk az állítást.

Ebből következik, hogy a lehetséges sebességek meghatározásánál csak azokat az \hat{I}, \hat{J} indexhalmazokat kell figyelembe venni, amelyekre a (8.6) feltételek teljesülnek.

Az \hat{I}, \hat{J} indexhalmazok esetén azonban a

$$(8.16) \quad \begin{aligned} \nabla \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \dot{\mathbf{x}} &\equiv 0, \quad i \in \hat{I} \\ \nabla \tilde{h}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \dot{\mathbf{x}} &= 0, \quad j \in \hat{J} \end{aligned}$$

rendszer adja a lehetséges sebességeket, ami éppen az állítás.

8.3. Megjegyzés. Ha a (8.1) kényszerfeltételek között szerepel parametrikus formában megadott felület vagy sokaság, akkor a (8.5) feltételekre vonatkozó C_g kúpot közvetlenül a $T(\mathbf{u})$ érintőtérre is le lehet vetíteni.

8.4. KÖVETKEZMÉNY. Tekintsük a (8.1) feltételrendszert és tegyük fel, hogy a (8.5) feltételekre nézve teljesül a *Kuhn—Tucker regularitási feltétel*. Ha a (8.6) feltételben szereplő \hat{I}, \hat{J} indexhalmazokra

$$(8.17) \quad \hat{I} = \emptyset, \quad \hat{J} = \emptyset$$

és a (8.7) feltételek teljesülnek, akkor a lehetséges sebességek a következőképpen adhatók meg:

$$(8.18) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{z} \\ \mathbf{z} \in \left\{ \mathbf{z} \mid \begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{z} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \right\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

ahol

$$(8.19) \quad \mathbf{E}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\mathbf{u})}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_1(\mathbf{u})}{\partial u_k} \\ \frac{\partial x_{3n}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{3n}(\mathbf{u})}{\partial u_k} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. A (8.2) tételből következik, hogy a lehetséges sebességeket az alábbi rendszer adja meg.

$$(8.20) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}} &= 0, \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}} &\geq 0, \\ \dot{\mathbf{x}} &\in T(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Mivel $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in R^k$, ahol $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ az $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ felület *Jacobi mátrixa* a vizsgált pontban és az érintősíkot feszíti fel, így a (8.20) rendszert kapjuk, ami az állítást bizonyítja.

Hasonlóan lehet belátni az alábbi állítást is.

8.5. KÖVETKEZMÉNY. Tekintsük a (8.1) feltételrendszert és tegyük fel, hogy a (8.5) feltételekre nézve teljesül a *Kuhn—Tucker regularitási feltétel*. Ha a (8.6) feltételben szereplő \hat{I} , \hat{J} indexhalmazokra

$$(8.21) \quad \hat{I} = I, \quad \hat{J} = J,$$

akkor a lehetséges sebességek a következőképpen adhatók meg:

$$(8.22) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z} \in \left\{ \mathbf{z} \left| \begin{array}{ll} \nabla \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{z} \geq 0, & i \in I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \nabla \tilde{h}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{z} = 0, & j \in J = \{1, \dots, p\} \\ \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{z} = 0, & \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{z} \geq 0, & \mathbf{z} \in R^k \end{array} \right. \right\}$$

ahol az $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ mátrix a (8.19) képlettel van adva.

9. A mozgásegyenletek felírása az erőegyensúly segítségével

Az analitikus mechanika feladata a rendszer egyensúlyi állapotának a jellemzése és a rendszer mechanikai állapotának a meghatározása. Ez utóbbi feladat a mozgásegyenletek felírását jelenti, ami a *D'Alambert-elv* alkalmazásával visszavezethető az erőegyensúlyi állapot jellemzésére [7], [14], [23], [32]. (Megjegyezzük, hogy számos munka foglalkozik a különböző variációs elvekkel, illetve a *D'Alambert-elvvel* és ezek ekvivalencia kérdéseivel [7], [20], [32].)

Ebben a részben megmutatjuk, hogyan lehet felírni a mozgásegyenleteket a *D'Alambert-elv* segítségével. Tekintsünk n darab tömegpontot, amelyekre a $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ aktív erők hatnak. Ezenkívül legyenek adottak a kényszerek, amelyek a tömegpontok mozgására az egyedüli korlátozást jelentik. Írja le a pontrendszer mozgását

az $\mathbf{x}(t): R \rightarrow R^{3n}$ kétszer folytonosan differenciálható vektorfüggvény. Jelölje $\mathbf{x}_i^*(t)$, $i=1, \dots, n$ az egyes pontok helyzetét megadó vektorfüggvényeket.

9.1. DEFINÍCIÓ ([2]). Az

$$(9.1) \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{P}_i - m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^*(t), \quad i = 1, \dots, n$$

menyiségeket kényszererőknek nevezzük.

A *D'Alembert-elv* azt mondja ki, hogy a pontrendszer mozgása folyamán az \mathbf{R}_i , $i=1, \dots, n$ kényszererők minden pontban egyensúlyban vannak. A virtuális munka elve alapján az egyensúly szükséges feltétele az, hogy a vizsgált pontban az összes virtuális elmozdulást tekintve az

$$(9.2) \quad \hat{\mathbf{R}}\mathbf{v} \leq 0, \quad \mathbf{v} \in R^{3n}, \quad \hat{\mathbf{R}} \in R^{3n}$$

egyenlőtlenség teljesüljön, ahol $\hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n)$.

Ebből következik, hogy azokban az esetekben, mikor minden pontban egy (6.8) típusú egyenlőség teljesül és a benne szereplő indexhalmazok nem függenek a rendszer állapotától, akkor ez az egyenlet a mozgásegyenleteket adja meg explicit alakban.

Szemléltetésképpen azt a klasszikus esetet mutatjuk be, mikor a kényszerek

$$(9.3) \quad h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad \mathbf{x} \in R^{3n}$$

alakban vannak megadva. Ekkor a *D'Alembert-elvet* és a virtuális munka elvét felhasználva azt kapjuk, hogy létezik minden pontban olyan $\lambda(t)$ vektor, amelyre az

$$(9.4) \quad \hat{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^p \lambda_j(t) \nabla h_j(\mathbf{x}(t))$$

egyenlőség teljesül minden pontban. Ez viszont az $\hat{\mathbf{R}}$ definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$(9.5) \quad m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^*(t) = \mathbf{P}_i - \sum_{j=1}^p \lambda_j(t) \nabla h_j(\mathbf{x}(t))$$

ami a rendszer mozgásegyenlete.

10. Példák

Ebben a részben két egyszerű, matematikai példán keresztül mutatjuk be, hogy hogyan lehet 8.2. tételt felhasználni.

Először példát adunk arra az esetre, mikor a *Courtivron-elv* és a virtuális munka elve egymásnak ellentmondó feltételeket eredményezne, ha feltételeznénk, hogy a virtuális elmozdulások a lehetséges sebességek irányába mutatnak.

Tekintsük a

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \min V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= x_1 + \dot{x}_3 \\ g_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= x_1 \geq 0, \\ g_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= x_2 \geq 0, \quad \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in R^3 \\ g_3(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \dot{x}_3 \geq 0 \end{aligned}$$

feladatot és nézzük meg, hogy az $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ pontban teljesülnek-e az egyensúly szükséges feltételei.

A 8.2. tétel és a virtuális munka elve alapján az $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ pont nem egyensúlyi pont, viszont a *Courtivron-elvben* szereplő szükséges feltétel teljesül.

Ha a (10.1) feladatban a célfüggvény helyett a $V'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = x_1$ függvényt tekintjük, akkor egy példán keresztül válik szemléletessé, hogy konzervatív erőter esetén miért nem eredményez a *Courtivron-elv* és a virtuális munka elve egymásnak ellentmondó feltételeket.

IRODALOM

- [1] APPEL, *Mécanique Rationnelle* (Gauthier—Villars, Paris, 1909).
- [2] ARNOLD, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978).
- [3] ARNOLD, V. I., *A mechanika matematikai módszerei* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985).
- [4] AVRIEL, M., *Nonlinear Programming, Analysis and Methods* (Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976).
- [5] BAZARAA, M. S., GOODE, J. J., and SHETTY, C. M., "Constraint Qualifications Revisited", *Management Science*, **18** (1972) 567—573.
- [6] BAZARAA, M. S. and SHETTY, C. M., *Foundations of Optimization* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976).
- [7] BANACH, S., *Mechanics* (Nauki, Warszawa, Wrocław, 1951).
- [8] COURNOT, A., "Extension du principe des vitesses virtuelles au cas ou les conditions de liaison du systeme sont exprimées par des inégalités", *Bulletin des Sciences Mathématiques* (Première Section du Bulletin Universel des Sciences et de l'Industrie publié sous la dir. de Férussac) **8** (1827) 165—170.
- [9] FARKAS, GY., „A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapja”, *Matematikai és Természettudományi Értesítő* **16** (1898) 361—364.
- [10] FARKAS, J., „Theorie der einfachen Ungleichungen“, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **124** (1901) 1—27.
- [11] FARKAS, J., „Beiträge zu den Grundlagen der analytischen Mechanik“, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **131** (1906) 165—201.
- [12] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M., *Mai Fizika* 1—2 (Műszaki Kiadó, Budapest, 1974.)
- [13] FOURIER, J., "Mémoire sur le statique", *Journal de l'École Polytechnique* **5** (1798).
- [14] GANTMACHER, F., *Lectures in Analytical Mechanics* (Mir Publishers, Moscow, 1970).
- [15] GAUSS, C. F., „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **4** (1829) 232—235.
- [16] GOULD, F. J. and TOLLE, J. W., "Geometry of Optimality Conditions and Constraint Qualifications", *Math. Prog.* **2** (1972) 1—18.
- [17] KARUSH, W., "Minima of Function of Several Variables with Inequalities as Side Conditions", Master's Thesis (Department of Mathematics, Univ. of Chicago, 1939).
- [18] KUHN, H. W. and TUCKER, A. W., "Nonlinear Programming" in: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (University of California Press, Berkeley, California, 1950).
- [19] LAGRANGE, J. L., *Mécanique Analytique I—II* (Paris, 1788).
- [20] LANDAU—LIFSIC, *Elméleti Fizika, I. Mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1974).
- [21] LUENBERGER, D. G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming* (Addison—Wesley Publishing Company Inc. 1973).
- [22] MANGASARIAN, O. L., *Nonlinear Programming* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1969).
- [23] MUTNYÁNSZKY, Á., *Kinematika és Kinetika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1966).
- [24] NEWTON, J., *A Principiából és az Optikából* (Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1981).
- [25] OSTROGRADSKY, M., "Mémoire sur les déplacement instantanés des systemes assujettis a des conditions variables", *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, Sixième Série* **1** (1838) 565—600.
- [26] PRÉKOPA, A., „Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **4** (1978) 165—191.

- [27] PRÉKOPA, A., "On the development of Optimization Theory", *The American Mathematical Monthly* 87 (1980) 527—542.
- [28] RAPCSÁK, T., A nemlineáris programozás differenciálgeometriai vonatkozásairól, Kandidátusi értekezés (Budapest, 1983).
- [29] RAPCSÁK, T., „A nemlineáris programozási feladat optimalitási feltételeinek differenciálgeometriai vizsgálata”, *Alk. Mat. Lapok* 9 (1983) 73—84.
- [30] SZENTHE, J., A mechanika újabb matematikai eszközei, Matematikai megalapozás: a differenciálható sokaságok elmélete, Kézirat (Budapesti Műszaki Egyetem Továbbképző Intézete, Budapest, 1976).
- [31] SZENTHE, J., A mechanika újabb matematikai eszközei. Az analitikus mechanika korszerű megalapozása és felépítése, Kézirat (Budapesti Műszaki Egyetem Továbbképző Intézete, Budapest, 1978).
- [32] VALCOVICI, V., Une extension des liaisons non holonomes et des principes variationnels, *Mathematisch — natur wissenschaftliche Klasse* 102, Heft 4 (Akademie-Verlag — Berlin, 1958).
- [33] YAVORSKY, B. and DETLAF, A., *Handbook of Physics* (Mir Publishers, Moscow, 1975).

(Beérkezett: 1985. július 18.)

(Átdolgozva beérkezett: 1986. március 28.)

RAPCSÁK TAMÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1111 BUDAPEST, KENDE U. 13—17

SZENTHE JÁNOS
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR GEOMETRIA TANSZÉK
1111 BUDAPEST, STOCZEK U. H. ÉPÜLET II. EMELET

ON THE CONNECTION BETWEEN THE MECHANICAL EQUILIBRIUM AND THE NONLINEAR PROGRAMMING

T. RAPCSÁK and J. SZENTHE

The analytical mechanics is a branch of the classical mechanics the subject of which are the laws of the equilibrium and the motion of mass point systems. The physicists and mathematicians are already dealing for a long time with these problems and a part of almost every mechanical book consists of the solution of some kind of this one.

Generally the problem is as follows: There are given n mass points the states of which depend on the space, velocities and time coordinates. Thus, a position of the point system is determined by a point of the space of $(6n+1)$ -dimensions. The unique restrictions of the motion of mass point systems are the constraints and the purpose is to characterize the equilibrium and mechanical states.

The paper is an attempt to classify the problems of the mechanical equilibrium, to determine the possible velocities under general constraints and to compare the principle of the virtual work and the Courtivron's principle.

A GAZDASÁGOSSÁG FÜGGVÉNYEGYENLET-RENDSZERÉNEK EGYIK ÁLTALÁNOSÍTÁSA ÉS ANNAK MEGOLDÁSA

VINCZE ENDRE

Miskolc

E dolgozatban olyan termelési folyamat (rendszer) gazdaságosságának jellemzésére szolgáló függvényegyenlet-rendszer megoldását adjuk meg, mely az irodalomból már ismert több modell közös általánosítása. A korábbi vizsgálatoknál általánosabb (2.1)—(2.2)—(2.3)—(2.4) függvényegyenlet-rendszerben szereplő függvényekről csupán az egyes változók szerinti (parciális) folytonosságot és szigorú monotonitást tételezünk fel, így a megoldás menete teljesen elemi eszközökkel történhet.

1. Bevezetés

1.1. Valamely termelési folyamat (rendszer) gazdaságosságának *függvényegyenletekkel* való jellemzésével a [9] (1960) és [10] (1960) dolgozatokban találkozhatunk először.

Röviden ismertetjük az alapproblémát: Tekintsük először azt az egyszerű esetet, amikor a kiszemelt termelési folyamatban *egyetlen* terméket állítunk elő, éspedig abból $x > 0$ mennyiséget, $y > 0$ költséggel, $z > 0$ idő alatt. A termelési folyamatra jellemző (x, y, z) pozitív értékhármashoz rendeljünk hozzá egy $G(x, y, z) > 0$ függvényt, melyet a *gazdaságosság* „mérőszámának” tekintünk és nevezünk. A G függvényre részben matematikai, részben pedig műszaki-gazdasági megfontolások alapján „ésszerű” (természetesnek mondható) kikötéseket tehetünk, majd keressük mindazon G valós függvényeket, melyek ezeknek a feltételeknek eleget tesznek.

A G -re tett *matematikai* feltevések nagyon is egyszerűek: egyrészt legyen G változóinak (legalább parciálisan) folytonos függvénye¹, másrészt szigorúan monoton, mely alatt azt fogjuk érteni, hogy bármelyik két változót bárhogyan is rögzítjük, az előálló egyváltozós függvény (a szokásos értelemben) szigorúan monoton legyen. Az egyes változókra vonatkozóan a monotonitás irányát (növekvő vagy csökkenő voltát) már csak további műszaki-gazdasági megfontolások alapján írhatjuk elő éspedig a G függvény x -ben monoton növekvő, y -ban és z -ben pedig monoton csökkenő legyen.

A G -re tett *műszaki-gazdasági* feltevések *függvényegyenletek* formájában fogalmazhatók meg. Így a [9] és [10] dolgozatokban szereplő alapmodellben G -re a

$$\left. \begin{aligned} (1.1) \quad & G(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = G(x, y, z) \\ (1.2) \quad & G(\lambda x, \lambda y, z) = f_3(\lambda) G(x, y, z) \\ (1.3) \quad & G(\lambda x, y, \lambda z) = \lambda G(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (\lambda > 0)$$

¹ Itt és a továbbiakban mindvégig G -ről parciális folytonosságot tételezünk csak fel, de meggyezzük, hogy ettől — matematikai szempontból — lényegesen enyhébb feltétellel is elegendő volna.

függvényegyenlet-rendszert² írtuk elő, ahol f_3 is ismeretlen függvény. Az (1.1)—(1.2)—(1.3) egyenletek műszaki-gazdasági jelentését illetően csupán a [9] és [10] dolgozatokra utalunk. E függvényegyenlet-rendszer megoldásai (a G -re tett feltevések mellett)

$$G(x, y, z) = C \frac{x}{y} \left(\frac{x}{z} \right)^a, \quad f_3(\lambda) = \lambda^a,$$

ahol $C > 0$ és $a > 0$, egyébként tetszőleges konstansok; ezek konkrét értékei további műszaki-gazdasági megfontolások alapján választhatók, ill. határozhatók meg (vö. [9]).

1.2. Az elmúlt 25 évben az (1.1)—(1.2)—(1.3) egyenletek által reprezentált alapmodellt sokan, több irányban is általánosították és vizsgálták. E vizsgálatokat azonban — eltekintve a számos részletkérdéstől — alapvetően mégis csak két csoportba sorolhatjuk, és pedig:

- (A) a G függvény továbbra is csupán *egyetlen* terméket előállító termelési folyamatot jellemez, de — megtartva a G homogénitását biztosító (1.1) egyenletet — az (1.2) és (1.3) egyenletek helyett általánosabb egyenleteket írunk elő (esetleg kiegészítve azokat újabb egyenletekkel);
- (B) olyan termelési folyamatot, pl. egy egész üzem termelését kívánjuk jellemezni, melyben a különböző termékekből x_1, x_2, \dots, x_p ($p \geq 2$) mennyiségek készülnek, a költségek y_1, y_2, \dots, y_q (egymástól független) részekre bonthatók ($q \geq 1$), és a teljes termelésre z_1, z_2, \dots, z_r időt (többnyire egymással átfedésben) fordítunk ($r \geq 1$); a p, q, r a legáltalánosabb esetben különbözőek; ebben az esetben G (rendre a p, q, r -komponensű) x, y és z vektorváltozók függvénye és a G -re előírt függvényegyenletek „szerkezete” az (1.1)—(1.2)—(1.3) egyenletekkel szoros rokonságban van.

A fent vázolt vizsgálatok számára és volumenére jellemzőnek tartjuk, hogy W. EICHORN-nak (már 1978-ban) könyve³ jelent meg „*Functional Equations in Economics*” (vö. [5]) címmel, s e könyvben a szóbanforgó vizsgálatok jelentős teret kapnak.

1.3. Jelen dolgozatban található általánosítások az általunk (A)-val jelölt csoportba tartoznak. Szükségesnek tartjuk tehát, hogy — a teljesség igénye nélkül — néhány olyan eredményre hivatkozzunk, melyek közös általánosítását meg fogjuk oldani.

Hosszú M. és e sorok írója [8] (1962) közös dolgozatukban az (1.1) egyenlet mellé [az (1.2) és (1.3) egyenletek helyett] a jóval általánosabb

$$\left. \begin{aligned} (1.4) \quad G(\lambda x, \lambda y, z) &= F_3(\lambda) G(x, y, z) + G_3(\lambda), \\ (1.5) \quad G(\lambda x, y, \lambda z) &= F_2(\lambda) G(x, y, z) + G_2(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (\lambda > 0)$$

egyenleteket írták elő és oldották meg, ahol tehát nemcsak a G , hanem az F_3, G_3, F_2 és G_2 is ismeretlen függvények⁴ (3 függvényegyenlet 5 ismeretlen függvénnyel); a G -re

² Az (1.1) függvényegyenletet kielégítő G függvényeket 0-adfokú *Euler-féle* homogén függvényeknek szokás nevezni.

³ Pontosabban, amint az a tartalomjegyzékből kiderül, W. EICHORN írta a könyv legnagyobb részét, egy-egy kisebb fejezetet azonban F. STEHLING és F. POKROPP.

⁴ A függvényegyenletek elméletében igen gyakori, hogy az ismeretlen függvények száma nagyobb (esetleg „jóval nagyobb”), mint az egyenletek száma; ez azonban a megoldhatóságot általában nem befolyásolja.

vonatkozó folytonossági és szigorú monotonitási feltételek mellett megengedtük azt a speciális esetet is, hogy F_3 és F_2 (egymástól függetlenül) azonosan konstans is lehet. Ugyancsak ebben a [8] dolgozatban szerepel először (vö. [7]) az a „negatív eredmény” is, hogy az (1.4)-et tovább általánosító

$$G(\lambda x, \lambda y, z) = f(\lambda, z)G(x, y, z) + g(\lambda, z)$$

egyenletnek és (1.1)-nek sem általánosabb a megoldása, mint az (1.1) és (1.4) egyenletekből álló rendszernek; ki lehet mutatni ugyanis, hogy sem az f , sem pedig a g nem függhet a második változójától.

Csupán megemlítjük, hogy egy, a HEINEMANN Z.-vel közös [6] (1964) dolgozatunkban az (1.1)—(1.2)—(1.3) függvényegyenlet-rendszert ún. munkatermelékenységi mutatók jellemzésére, ill. meghatározására használtuk, de (és ez lényeges különbség) az x, y, z változók és a G függvény jelentése más, mint az 1.1. pontban említett alapmodell esetében.

W. EICHHORN több dolgozatában is az (1.1)—(1.2)—(1.3) egyenletrendszerrel általánosabb modellt vizsgál. A (B) csoportba tartozó vizsgálatairól most nem szólva, mondandónk egyik fontos előzményének tekinthető [4] (1974) dolgozata, melyben az (1.1)—(1.2) egyenletekhez még az

$$(1.6) \quad G(\lambda x, y, \lambda z) = f_2(\lambda)G(x, y, z),$$

$$(1.7) \quad G(x, \lambda y, \lambda z) = f_1(\lambda)G(x, y, z)$$

egyenleteket veszi és oldja meg (vö. [3]). W. EICHHORN ugyanebben a [4] dolgozatában, majd az [5] könyvében az (1.1), (1.2), (1.6), (1.7) egyenleteket egy „axiomarendszernek” tekinti és az axiomatikus vizsgálatoknál szokásos kérdésekre keresi a választ (függetlenség, teljesség stb.).

2. Előkészítő lépések

Legyen $R_+ := (0, +\infty)$, $R := (-\infty, +\infty)$ és $R_{\alpha\beta} := (\alpha, \beta) \subset R_+$ (azaz $0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$), továbbá

$$G: R_+^3 \rightarrow R_{\alpha\beta} \text{ és } H_1, H_2, H_3: R_{\alpha\beta} \times R_+ \rightarrow R_{\alpha\beta}$$

egyelőre ismeretlen függvények. Tekintsük a

$$\left. \begin{aligned} (2.1) \quad & G(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = G(x, y, z), \\ (2.2) \quad & G(\lambda x, \lambda y, z) = H_3[G(x, y, z), \lambda], \\ (2.3) \quad & G(\lambda x, y, \lambda z) = H_2[G(x, y, z), \lambda], \\ (2.4) \quad & G(x, \lambda y, \lambda z) = H_1[G(x, y, z), \lambda] \end{aligned} \right\} \quad (\lambda \in R_+)$$

egyenletekből álló függvényegyenlet-rendszert. Azt a kérdést fogjuk vizsgálni, hogy melyek azok a G, H_1, H_2, H_3 függvények, amelyek *nemtriviális* megoldásai a (2.1)—(2.2)—(2.3)—(2.4) függvényegyenlet-rendszernek; *nemtriviális* megoldások alatt itt olyan függvényeket értünk, melyek mindhárom, ill. mindkét változójuktól függő (nem azonosan konstans) függvények.

Nyilvánvaló, hogy a (2.1)—(2.2)—(2.3) egyenletekből álló rendszer egy közös általánosítása mind az (1.1)—(1.2)—(1.3), mind pedig az (1.1)—(1.4)—(1.5) egyenletrendszernek, a W. EICHORN által vizsgált (1.1)—(1.2)—(1.6)—(1.7) egyenletrendszert pedig a (2.1)—(2.2)—(2.3)—(2.4) egyenletek foglalják magukba.

Szükségünk lesz az alábbi, a *transzláció*

$$(2.5) \quad F[F(p, q), r] = F(p, q+r)$$

$$[F: R_{\alpha\beta} \times R \rightarrow R_{\alpha\beta}]$$

függvényegyenletére vonatkozó tételre, melyet J. ACZÉL ([2], pp. 245—248; vö. [1], pp. 170—172) bizonyított:

2.1. TÉTEL. Ha az $F: R_{\alpha\beta} \times R \rightarrow R_{\alpha\beta}$ függvény

- (2.a) mindkét változójában (parciálisan) folytonos és szigorúan monoton, továbbá
(2.b) kielégíti a (2.5) függvényegyenletet,

akkor létezik olyan $f_0: R \rightarrow R_{\alpha\beta}$ folytonos és szigorúan monoton függvény, melynek segítségével F az

$$(2.6) \quad F(p, r) = f_0[f_0^{-1}(p) + r]$$

alakban állítható elő.

2.2. *Megjegyzés.* Az idézett helyen a (2.5) függvényegyenlet megoldása (az általa lunk közölnél) enyhébb feltételek mellett történik meg, de vizsgálatainkban ennél „élesebb” eredményre nem lesz szükségünk.

2.3. *Megjegyzés.* A továbbiakban az egyes függvényegyenlet-rendszerek megoldása során lábjegyzetként olyan magyarázó megjegyzéseket is teszünk, melyek a függvényegyenletek megoldásának „technikájában” kevésbé jártas (elsősorban alkalmazó) Olvasó számára könnyíthetik az egyes lépések „miértjének”, ill. elméleti háttérének a megértését.

3. A (2.1)—(2.2) függvényegyenlet-rendszer megoldása

Először csupán a (2.1)—(2.2) egyenletekből álló rendszer megoldásával foglalkozunk és (aránylag egészen enyhe feltételek mellett) keressük mindazon G és H_3 (nemtriviális) függvényeket, melyek az említett egyenletrendszer megoldásai. A következőt bizonyítjuk:

3.1. TÉTEL. Ha a $G: R_+^3 \rightarrow R_{\alpha\beta}$ és $H_3: R_{\alpha\beta} \times R_+ \rightarrow R_{\alpha\beta}$

- (3.a) változóiknak (parciálisan) folytonos és szigorúan monoton függvényei, továbbá
(3.b) kielégítik a (2.1)—(2.2) függvényegyenletrendszert,

akkor szükségképpen

$$(3.1) \quad G(x, y, z) = g \left[h \left(\frac{x}{y} \right) + \ln \frac{y}{z} \right],$$

$$(3.2) \quad H_3(u, v) = g[g^{-1}(u) + \ln v]$$

alakúak, ahol $g: R \rightarrow R_{\alpha\beta}$ és $h: R_+ \rightarrow R$ folytonos és szigorúan monoton, egyébként tetszőleges függvények⁵.

Bizonyítás. A (2.1) egyenlet alapján, jól ismert módon, a $\lambda = 1/z$ választással

$$(3.3) \quad G\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = G\left(\frac{1}{z}x, \frac{1}{z}y, \frac{1}{z}z\right) = G(x, y, z)$$

következik, tehát a

$$(3.4) \quad G_3(s, t) := G(s, t, 1) \quad (G_3: R_+^2 \rightarrow R_{\alpha\beta})$$

jelöléssel (2.2) helyett

$$(3.5) \quad G_3\left(\frac{\lambda x}{z}, \frac{\lambda y}{z}\right) = H_3\left[G_3\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \lambda\right]$$

írható. Bevezetve az

$$u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z} \quad (u, v \in R_+)$$

új változókat⁶, (3.5)-ből a formailag egyszerűbb

$$(3.6) \quad G_3(\lambda u, \lambda v) = H_3[G_3(u, v), \lambda]$$

egyenlet adódik.

Legyen a rövidség kedvéért⁷

$$(3.7) \quad g_1(s) := G_3(s, s), \quad (g_1: R_+ \rightarrow R_{\alpha\beta}),$$

akkor (3.7) és (3.6) ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_1(uvw) &= g_1[w(uv)] = H_3[G_3(uv, uv), w] = \\ &= H_3\{H_3[G_3(u, u), v], w\} = H_3\{H_3[g_1(u), v], w\}, \end{aligned}$$

és teljesen hasonlóan

$$g_1(uvw) = g_1[(vw)u] = H_3[G_3(u, u), vw] = H_3[g_1(u), vw].$$

E két utóbbi egyenletet összehasonlítva látjuk, hogy

$$(3.8) \quad H_3\{H_3[g_1(u), v], w\} = H_3[g_1(u), vw]$$

⁵ A 3.1. tétel állítását úgy is fogalmazhatjuk, hogy a (3.a) és (3.b) feltételek teljesülése esetén léteznek olyan a tételben kimondott tulajdonságú g és h egyváltozós függvények, melyek segítségével G és H_3 a (3.1), ill. (3.2) alakban állíthatók elő.

⁶ Itt az új változók bevezetésénél az is érdekes, hogy miközben az x, y és z (egymástól függetlenül) végigfut az R_+ halmaz elemein, ugyanakkor az u és v is (egymástól függetlenül) az R_+ halmaz minden elemét (legalább egyszer) felveszi; később ezt a tényt ki is használjuk.

⁷ A g_1 függvényt G_3 specializálásával definiáltuk; lényeges, hogy $g_1(s) \neq k$ (konst.) legyen; ez viszont (3.6)-ból következik, hiszen az $u=v$ helyettesítéssel előálló $g_1(\lambda u) = H_3[g(u), \lambda]$ egyenletből látjuk, hogy $g_1(u) \equiv k$ azért lehetetlen, mert akkor H_3 nem függene a második változójától a (3.a) feltevéssel ellentétben.

kell legyen, melyet a (már jól ismert) (2.5) tranzláció-egyenletbe írhatunk át. Ugyanis (3.8) ekvivalens a

$$(3.9) \quad \ln H_3[\exp \ln H_3(e^{\ln g_1(u)}, e^{\ln v}), e^{\ln w}] = \ln H_3[e^{\ln g_1(u)}, e^{\ln v + \ln w}]$$

egyenlettel⁸, tehát a

$$(3.10) \quad \begin{aligned} p &= \ln g_1(u), \quad q = \ln v, \quad r = \ln w \\ [p &\in (\ln \alpha, \ln \beta); \quad q, r \in R] \\ G_4(s, t) &:= \ln H_3(e^s, e^t) \\ [G_4: &(\ln \alpha, \ln \beta) \times R \rightarrow (\ln \alpha, \ln \beta)] \end{aligned}$$

jelölésekkel (3.9) valóban a tranzláció

$$(3.11) \quad G_4[G_4(p, q), r] = G_4(p, q+r)$$

egyenletébe megy át.

Feltevéseinkből következően a G_4 is változóinak (parciálisan) folytonos és szigorúan monoton függvénye [vö. (3.a) és (3.10)], tehát a 2.1. tétel szerint létezik olyan g_2 folytonos és szigorúan monoton függvény, melynek segítségével a (3.11) egyenletet kielégítő G_4 függvény a

$$(3.12) \quad \begin{aligned} G_4(p, q) &= g_2[g_2^{-1}(p) + q] \\ [g_2: &R \rightarrow (\ln \alpha, \ln \beta); \quad g_2^{-1}: (\ln \alpha, \ln \beta) \rightarrow R] \end{aligned}$$

alakban állítható elő.

A (3.10) és (3.12) szerint

$$(3.13) \quad \ln H_3(e^p, e^q) = G_4(p, q) = g_2[g_2^{-1}(p) + q] = g_2[g_2^{-1}(\ln e^p) + \ln e^q],$$

tehát az

$$(3.14) \quad \begin{aligned} s &= e^p, \quad t = e^q, \\ g(r) &:= \exp g_2(r), \quad (\Rightarrow) \quad g^{-1}(r') = g_2^{-1}(\ln r') \\ [r &\in R, \quad r' \in R_{\alpha\beta}; \quad g: R \rightarrow R_{\alpha\beta}, \quad g^{-1}: R_{\alpha\beta} \rightarrow R] \end{aligned}$$

jelölésekkel (3.13) helyett, egyezően (3.2)-vel, valóban

$$(3.15) \quad H_3(s, t) = g[g^{-1}(s) + \ln t]$$

írható Mivel $g_2: R \rightarrow (\ln \alpha, \ln \beta)$ folytonos és szigorúan monoton volt, így (3.14) szerint a $g: R \rightarrow R_{\alpha\beta}$ függvény is ilyen lesz.

A G_3 függvény meghatározására (3.6) és (3.15) szerint írhatjuk, hogy

$$(3.16) \quad G_3(\lambda u, \lambda v) = H_3[G_3(u, v), \lambda] = g\{g^{-1}[G_3(u, v)] + \ln \lambda\},$$

tehát a

$$(3.17) \quad G_5(s, t) := g^{-1}[G_3(s, t)] \quad (G_5: R_+^2 \rightarrow R)$$

⁸ Itt használtuk ki azt a feltevésünket, hogy $R_{\alpha\beta} \subset R_+ [\Rightarrow H_3(u, v) > 0]$.

jelöléssel (3.16) helyett a

$$(3.18) \quad G_5(\lambda u, \lambda v) = G_5(u, v) + \ln \lambda$$

egyenletet kapjuk; nyilván G_5 is változóinak (parciálisan) folytonos és szigorúan monoton függvénye [vö. (3.4)].

Legyen (3.18)-ban $\lambda = 1/v$, ekkor a

$$(3.19) \quad h(s) := G_5(s, 1) \quad [h: R_+ \rightarrow R]$$

jelöléssel a

$$(3.20) \quad G_5(u, v) = G_5\left(\frac{u}{v}, 1\right) + \ln v = h\left(\frac{u}{v}\right) + \ln v$$

összefüggés adódik, ahol (3.19)-ből következően h is folytonos és szigorúan monoton függvény. A (3.16), (3.17) és (3.20) egyenletek alapján

$$(3.21) \quad G_3(u, v) = G_2(1 \cdot u, 1 \cdot v) = g\{g^{-1}[G_3(u, v)] + \ln 1\} = g[G_5(u, v)] = \\ = g\left[h\left(\frac{u}{v}\right) + \ln v\right],$$

végül pedig (3.3), (3.4) és (3.21) alapján kapjuk, hogy

$$(3.22) \quad G(x, y, z) = G_3\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = g\left[h\left(\frac{x}{y}\right) + \ln \frac{y}{z}\right],$$

egyezően (3.1)-gyel.

Mellőzve az egyszerű számítást, könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (3.15) és (3.22) függvények tetszőleges (invertálható) g és h esetén is kielégítik a (2.1)–(2.2) függvényegyenlet-rendszert. Ezzel a 3.1. tétel bizonyítását befejeztük.

3.2. Megjegyzés. A bizonyítás menetéből kitűnik, hogy a G -re vonatkozó folytonossági feltevést csak a (3.11) egyenlet megoldásához használtuk, a szigorú monotonitásnak is a megoldásnál csak annyi szerep jut, hogy a (3.12) egyenletben szereplő g_2 függvénynek *van* inverze. Ezek a feltételek — és ez a továbbiakra is vonatkozik — matematikai szempontból lényegesen enyhíthetők.

4. A (2.1)–(2.2)–(2.3) függvényegyenlet-rendszer megoldása

4.1. A (2.1)–(2.2)–(2.3) rendszer megoldását két fő lépésben adjuk meg. Először a következőt bizonyítjuk:

4.1. TÉTEL. Ha a

$$G: R_+^3 \rightarrow R_{\alpha\beta} \quad \text{és} \quad H_2: R_{\alpha\beta} \times R_+ \rightarrow R_{\alpha\beta}$$

- (4.a) változóiknak (parciálisan) folytonos és szigorúan monoton függvényei, továbbá
(4.b) kielégítik a (2.1) és (2.3) függvényegyenleteket,

akkor szükségképpen

$$(4.1) \quad G(x, y, z) = g_0 \left[h_0 \left(\frac{x}{z} \right) + \ln \frac{z}{y} \right],$$

$$(4.2) \quad H_2(u, v) = g_0 [g_0^{-1}(u) + \ln v]$$

alakúak, ahol $g_0: R \rightarrow R_{\alpha\beta}$ és $h_0: R_+ \rightarrow R$ folytonos és szigorúan monoton, egyébként tetszőleges függvények.

Bizonyítás. Most is a (2.1) egyenletből indulunk ki, de itt a $\lambda = 1/y$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor

$$(4.3) \quad G\left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\right) = G\left(\frac{1}{y}x, \frac{1}{y}y, \frac{1}{y}z\right) = G(x, y, z),$$

tehát a

$$(4.4) \quad G_2(s, t) := G(s, 1, t) \quad (G_2: R_+^2 \rightarrow R_{\alpha\beta})$$

jelöléssel (2.3) helyett

$$(4.5) \quad G_2\left(\frac{\lambda x}{y}, \frac{\lambda z}{y}\right) = H_2\left[G_2\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right), \lambda\right]$$

írható. Bevezetve az

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{z}{y} \quad (u, v \in R_+)$$

új változókat, (4.5)-ből a formailag egyszerűbb

$$(4.6) \quad G_2(\lambda u, \lambda v) = H_2[G_2(u, v), \lambda]$$

egyenletet kapjuk.

A (4.6) egyenlet (tartalmilag) egyezik (3.6)-tal, melyet a 3.1. tétel bizonyítása során már megoldottunk. Így (4.6) megoldását [vö. (3.15) és (3.21)] a

$$(4.7) \quad H_2(s, t) = g_0[g_0^{-1}(s) + \ln t]$$

$$(4.8) \quad G_2(u, v) = g_0 \left[h_0 \left(\frac{u}{v} \right) + \ln v \right]$$

függvények⁹ képezik, ahol $g_0: R \rightarrow R_{\alpha\beta}$ és $h_0: R_+ \rightarrow R$ folytonos és szigorúan monoton, egyébként tetszőleges függvények.

Végül (4.3), (4.4) és (4.8) alapján valóban

$$(4.9) \quad G(x, y, z) = G\left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\right) = G_2\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = g_0 \left[h_0 \left(\frac{x}{z} \right) + \ln \frac{z}{y} \right].$$

Egyszerű számítással győződhetünk meg arról, hogy a (4.9) és (4.7) függvények a (2.1) és (2.3) egyenletekből álló függvényegyenlet-rendszert valóban kielégítik. Ezzel a 4.1. tétel bizonyítását befejeztük.

⁹ Természetesen a H_2 és G_2 függvényeket nem feltétlenül ugyanazon g és h (egyváltozós) függvények állítják elő, mint a (3.15) és (3.21) egyenletekben szereplő H_3 és G_3 függvényeket. Megkülönböztetésül ezért szerepel (4.7)–(4.8)-ban g_0 és h_0 .

4.2. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mely függvények lesznek a (2.1)—(2.2)—(2.3) egyenletrendszer *közös* megoldásai. Várhatóan a (3.1), (3.2), (4.1) és (4.2) függvények speciálisabb alakúak lesznek. A következőt bizonyítjuk:

4.2. TÉTEL. Ha a

$$G: R_+^3 \rightarrow R_{\alpha\beta} \quad \text{és} \quad H_2, H_3: R_{\alpha\beta} \times R_+ \rightarrow R_{\alpha\beta}$$

(4.c) változóiknak (parciálisan) folytonos és szigorúan monoton függvényei, továbbá

(4.d) kielégítik a (2.1)—(2.2)—(2.3) függvényegyenlet-rendszert,

akkor szükségképpen

$$(4.10) \quad G(x, y, z) = g \left(a \ln \frac{x}{y} + \ln \frac{x}{z} + b \right),$$

$$(4.11) \quad H_2(u, v) = g[g^{-1}(u) + a \ln v],$$

$$(4.12) \quad H_3(u, v) = g[g^{-1}(u) + \ln v]$$

alakúak, ahol $g: R \rightarrow R_{\alpha\beta}$ folytonos és szigorúan monoton, egyébként tetszőleges függvény, az a és b pedig tetszőleges konstansok az $a \neq 0$ megszorítással.

Bizonyítás. Abból kell kiindulnunk, hogy a G függvény egyidejűleg kell kielégítse mind a (2.1)—(2.2), mind pedig a (2.1) és (2.3) egyenletekből álló egyenletrendszert, következésképpen (3.1) \equiv (4.1) kell legyen¹⁰:

$$(4.13) \quad g \left[h \left(\frac{x}{y} \right) + \ln \frac{y}{z} \right] = g_0 \left[h_0 \left(\frac{x}{z} \right) + \ln \frac{z}{y} \right]$$

$$[g, g_0: R \rightarrow R_{\alpha\beta}; h, h_0: R_+ \rightarrow R].$$

Írjunk itt y helyett x -et és legyen

$$b := h(1) = \text{konst.},$$

ekkor (4.13)-ból

$$g \left(b + \ln \frac{x}{z} \right) = g_0 \left[h_0 \left(\frac{x}{z} \right) + \ln \frac{z}{x} \right],$$

vagy a $t = x/z$ ($\in R_+$) jelöléssel még rövidebben

$$(4.14) \quad g(b + \ln t) = g_0[h_0(t) - \ln t]$$

adódik. Írjunk továbbá (4.13)-ban z helyett x -et és legyen

$$c := h_0(1) = \text{konst.},$$

akkor a $t = x/y$ ($\in R_+$) rövidebb jelöléssel a

$$(4.15) \quad g[h(t) - \ln t] = g_0(c + \ln t)$$

¹⁰ A (4.13) egyetlen függvényegyenletben is négy ismeretlen függvény szerepel; ennek megoldása (pontosabban: az ismeretlen függvények számának redukálása) mégis viszonylag könnyen fog menni (vö. 3. lábj.).

egyenletet nyerjük. Vezessük be továbbá az

$$(4.16) \quad f(s) := g^{-1}[g_0(s)] \quad (\Rightarrow) \quad f^{-1}(t) = g_0^{-1}[g(t)] \quad [f, f^{-1}: R \rightarrow R]$$

jelölést, akkor (4.14)-ből

$$(4.17) \quad h_0(t) = f^{-1}(b + \ln t) + \ln t,$$

(4.15)-ből pedig

$$(4.18) \quad h(t) = f(c + \ln t) + \ln t$$

következik.

Helyettesítsük most a (4.17) és (4.18) függvényeket (4.13)-ba, kapjuk, hogy

$$g \left[f \left(c + \ln \frac{x}{y} \right) + \ln \frac{x}{y} + \ln \frac{y}{z} \right] = g_0 \left[f^{-1} \left(b + \ln \frac{x}{z} \right) + \ln \frac{x}{z} + \ln \frac{z}{y} \right],$$

azaz (4.16)-ot ismét használva

$$(4.19) \quad f \left(c + \ln \frac{x}{y} \right) + \ln \frac{x}{z} = f \left[f^{-1} \left(b + \ln \frac{x}{z} \right) + \ln \frac{x}{y} \right],$$

mely egyenlet már csak egyetlen ismeretlen függvényt tartalmaz.

A (4.19) függvényegyenletet a jól ismert *Cauchy-féle* alapegyenletre vezetjük vissza. Vezessük be ugyanis az

$$u = f^{-1} \left(b + \ln \frac{x}{z} \right), \quad v = \ln \frac{x}{y} \quad (u, v \in R)$$

új változókat, ekkor (4.19) helyett

$$(4.20) \quad f(u+v) = f(c+v) + f(u) - b$$

írható. Mivel itt a bal oldal u -ban és v -ben szimmetrikus, ezért a jobb oldal is ilyen tulajdonságú kell legyen, azaz

$$f(c+v) + f(u) - b = f(c+u) + f(v) - b.$$

Ezt az egyenletet átrendezve

$$f(c+u) - f(u) = f(c+v) - f(v) \equiv d = \text{konst.}$$

adódik, tehát (4.20) helyett

$$f(u+v) = f(u) + f(v) + d - b$$

írható. Innen pedig már látható, hogy a

$$(4.21) \quad \varphi(u) := f(u) + d - b \quad [\varphi: R \rightarrow R]$$

függvény valóban a

$$(4.22) \quad \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

Cauchy-féle alapegyenletet elégíti ki.

Emlékeztetünk arra, hogy g és g_0 folytonos és szigorúan monoton függvények [vö. 3.1. és 4.1. tétel], így (4.16)-ból, ill. (4.21)-ből látjuk, hogy f , ill. φ is ilyen függvények. A (4.22) függvényegyenlet folytonos megoldásai $\varphi(u) = au$ ($a = \text{konst.}$) alakúak, a szigorú monotonitás miatt pedig $a \neq 0$. Így (4.21) alapján

$$f(u) = au + b - d \quad (a \neq 0).$$

E megoldást a (4.20) egyenletbe írva, egyszerű számolással $d = ac$ adódik, tehát

$$(4.23) \quad f(u) = a(u - c) + b \Rightarrow f^{-1}(v) = \frac{v - b}{a} + c \quad (a \neq 0).$$

A (4.16), (4.17) és (4.18) összefüggésekből rendre következik, hogy

$$(4.24) \quad g_0(s) = g[a(s - c) + b], \Rightarrow g_0^{-1}(t) = \frac{g^{-1}(t) - b}{a} + c$$

$$h_0(t) = \frac{a+1}{a} \ln t + c,$$

$$h(t) = (a+1) \ln t + b.$$

Mindezeket a (4.13) egyenletbe helyettesítve, egyszerű számolással győződhetünk meg arról, hogy e függvények valóban megoldások (a g továbbra is folytonos és szigorúan monoton, egyébként tetszőleges függvény), (3.1) alapján pedig G -re valóban

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= g \left[h \left(\frac{x}{y} \right) + \ln \frac{y}{z} \right] = g \left[(a+1) \ln \frac{x}{y} + b + \ln \frac{y}{z} \right] = \\ &= g \left(a \ln \frac{x}{y} + \ln \frac{x}{z} + b \right) \end{aligned}$$

adódik, egyezően (4.10)-zel.

Végül a H_2 függvényt (4.2) és (4.24) alapján számíthatjuk, nevezetesen

$$\begin{aligned} H_2(u, v) &= g_0[g_0^{-1}(u) + \ln v] = g_0 \left[\frac{g^{-1}(u) - b}{a} + c + \ln v \right] = \\ &= g \left\{ a \left[\frac{g^{-1}(u) - b}{a} + c + \ln v \right] + b - ac \right\} = g[g^{-1}(u) + a \ln v], \end{aligned}$$

egyezően (4.11)-gyel. Megjegyezzük, hogy miután a H_3 függvényt már a 3.1. tételben is a g segítségével sikerült megadnunk, így az arra kapott megoldás itt is változatlanul érvényes.

Az egyszerű számítást itt is mellőzve kiemeljük, hogy a (4.10), (4.11) és (4.12) függvények valóban megoldásai a (2.1)–(2.2)–(2.3) egyenletrendszernek. Ezzel a 4.2. tételt minden részletében igazoltuk.

5. A (2.1)—(2.2)—(2.3)—(2.4) függvényegyenlet-rendszer megoldása

A (2.1)—(2.2)—(2.3)—(2.4) függvényegyenlet-rendszer megoldását illetően először arra mutatunk rá, hogy a (2.4) egyenlet *nem független* a (2.1)—(2.2)—(2.3) egyenletrendszertől a következő értelemben:

5.1. TÉTEL. Ha a $G: R_+^3 \rightarrow R_{\alpha\beta}$

(5.a) nulladfokú homogén függvény (azaz megoldása a (2.1) egyenletnek), továbbá

(5.b) G és $H_2, H_3: R_{\alpha\beta} \times R \rightarrow R_{\alpha\beta}$ kielégítik a (2.2)—(2.3) függvényegyenlet-rendszert,

akkor szükségképpen létezik olyan $H_1: R_{\alpha\beta} \times R_+ \rightarrow R_{\alpha\beta}$ függvény, mely G -vel együtt a (2.4) egyenletet kielégíti és ez a H_1 függvény csak a H_2 és H_3 segítségével egyértelműen előállítható.

Bizonyítás. Rendre a (2.1), (2.2) és (2.3) egyenletek alapján a következőképpen számolhatunk:

$$\begin{aligned} G(x, \lambda y, \lambda z) &= G(\lambda^{-2}x, \lambda^{-2}\lambda y, \lambda^{-2}\lambda z) = \\ &= G(\lambda^{-1}\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y, \lambda^{-1}z) = \\ &= H_3[G(\lambda^{-1}x, y, \lambda^{-1}z), \lambda^{-1}] = \\ &= H_3\{H_2[G(x, y, z), \lambda^{-1}], \lambda^{-1}\}, \end{aligned}$$

vagyis [az $u=G(x, y, z)$ rövidebb jelöléssel] a

$$(5.1) \quad H_1(u, \lambda) := H_3[H_2(u, \lambda^{-1}), \lambda^{-1}] \quad (u \in R_{\alpha\beta}, \lambda \in R_+)$$

és G valóban kielégíti a (2.4) egyenletet.

5.2. *Megjegyzés.* Ha az előző bizonyításban, ismét a (2.1) egyenletből kiindulva a (2.2) és (2.3) egyenleteket *fordított* sorrendben alkalmazzuk, akkor az is könnyen belátható, hogy a

$$H_1(u, \lambda) = H_3[H_2(u, \lambda^{-1}), \lambda^{-1}] = H_2[H_3(u, \lambda^{-1}), \lambda^{-1}]$$

egyenlet is érvényes, azaz H_2 és H_3 a H_1 explicit előállításában felcserélhető.

5.3. *Megjegyzés.* Felhívjuk a figyelmet arra is, hogy az 5.1. tétel bizonyításához sem a G -ről, sem pedig a H_2 és H_3 -ról folytonosságot és/vagy szigorú monotonitást nem kellett feltételeznünk.

Az 5.1. tételre támaszkodva, az alcímben jelölt egyenletrendszer megoldása most már egészen egyszerűen adható meg. Érvényes az

5.4. TÉTEL. Ha a $G: R_+^3 \rightarrow R_{\alpha\beta}$ és $H_1, H_2, H_3: R_{\alpha\beta} \times R_+ \rightarrow R_{\alpha\beta}$

(5.c) változóiknak (parciálisan) folytonos és szigorúan monoton függvényei, továbbá

(5.d) kielégítik a (2.1)—(2.2)—(2.3)—(2.4) függvényegyenlet-rendszert,

akkor szükségképpen

$$(5.2) \quad G(x, y, z) = g \left(a \ln \frac{x}{y} + \ln \frac{x}{z} + b \right),$$

$$(5.3) \quad H_3(u, v) = g[g^{-1}(u) + \ln v],$$

$$(5.4) \quad H_2(u, v) = g[g^{-1}(u) + a \ln v],$$

$$(5.5) \quad H_1(u, v) = g[g^{-1}(u) - (a+1) \ln v]$$

alakúak, ahol $g: R \rightarrow R_{a\beta}$ folytonos és szigorúan monoton, egyébként tetszőleges függvény, az a és b pedig tetszőleges konstansok az $a(a+1) \neq 0$ megszorítással.

Bizonyítás. A 4.2. tételben láttuk, hogy az (5.2)—(5.3)—(5.4) függvények megoldásai a (2.1)—(2.2)—(2.3) egyenletrendszernek; így csak (5.5) érvényességét kell igazolnunk, továbbá azt, hogy a G és H_1 a (2.4) függvényegyenletet (is) kielégítik.

A már bizonyított (5.1) egyenletből kiindulva és a (4.11) [\equiv (5.4)], (4.12) [\equiv (5.3)] megoldásokat felhasználva valóban

$$\begin{aligned} H_1(u, v) &= H_3 \left\{ g \left[g^{-1}(u) + a \ln \frac{1}{v} \right], \frac{1}{v} \right\} = \\ &= g \left\{ (g^{-1} \circ g) [g^{-1}(u) - a \ln v] + \ln \frac{1}{v} \right\} = \\ &= g [g^{-1}(u) - (a+1) \ln v] \end{aligned}$$

adódik. Mivel H_1 a második változójának is szigorúan monoton függvénye, ezért (a 4.2. tételből következő $a \neq 0$ kikötésen felül) $a+1 \neq 0$ -nak is meg kell teljesülnie kell.

Az egyszerű számítást ismét csak mellőzve, behelyettesítéssel győződhetünk meg arról, hogy H_1 és G a (2.4) függvényegyenletet valóban kielégítik. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

IRODALOM

- [1] ACZÉL, J., *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Birkhäuser Verl., Basel—Stuttgart, 1961).
- [2] ACZÉL, J., *Lectures on Functional Equations and their Applications* (Academic Press, New York—London, 1966).
- [3] EICHORN, W., „Effektivität von Produktionsverfahren“, *Operations Research-Verfahren* 12 (1972) 98—115.
- [4] EICHORN, W., „Systems of Functional Equations Determining the Effectiveness of a Production Process“ in: *Math. Models in Economics* Eds: J. Los—M. W. Los (Polish Sci. Publ., Warszawa, and North-Holland Publ. Comp., Amsterdam—London, 1974) 433—439.
- [5] EICHORN, W., *Functional Equations in Economics* (in Series: Applied Math. and Comp., Ed. R. Kalaba; Addison—Wesley Publ. Comp., London—Amsterdam—Don Mills—Sydney—Tokyo, 1978).
- [6] HEINEMANN, Z.—VINCZE, E., „Értékbeli mutatók függvényegyenletekkel való meghatározásának lehetőségei a munka termelékenységének mérésére“, *KGMTI Közl.* 4 (1964) 54—68.
- [7] HOSSZÚ, M.—VINCZE, E., „Über die Verallgemeinerungen eines Funktionalgleichungssystems der Wirtschaftlichkeit“, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 6 (1961) 313—321.

- [8] HOSSZÚ, M.—VINCZE, E., „Műszaki fogalom—matematikai tükröződés”, *NME Magyar-nyelvű Közl.* 8 (1962) 223—248.
- [9] VINCZE, E., „Über das Problem der Berechnung der Wirtschaftlichkeit“, *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.* 28 (1960) 33—41.
- [10] VINCZE, E., „A gazdaságosság számításának problémájáról”, *NME Magyar-nyelvű Közl.* 5 (1960) 391—397.

(Beérkezett: 1986. április 10.)

VINCZE ENDRE
NME, MATEMATIKAI INTÉZET ANALÍZIS TANSZÉKE
3515 MISKOLC-EGYETEMVÁROS

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES FUNKTIONALGLEICHUNGSSISSEMS VON WIRTSCHAFTLICHKEIT

E. VINCZE

In der vorliegenden Arbeit wurde das System der Funktionalgleichungen (2.1)—(2.2)—(2.3)—(2.4) vollständig gelöst, wobei die Funktionen in allen Veränderlichen stetig und streng monoton sind. Dieses System ist eine gemeinsame Verallgemeinerung der früher schon untersuchten verschiedenen Wirtschaftlichkeitsmodellen und zwar: [(2.1)—(2.2)—(2.3)] \supset [(1.1)—(1.2)—(1.3)] (vgl. E. VINCZE [9], [10]); [(2.1)—(2.2)—(2.3)] \supset [(1.1)—(1.4)—(1.5)] (vgl. M. HOSSZÚ — E. VINCZE [8], [7]); [(2.1)—(2.2)—(2.3)—(2.4)] \supset [(1.1)—(1.2)—(1.6)—(1.7)] (vgl. W. EICHORN [4], [3], [5]).

KÖNYVISMERTETÉS

Chaos, Fractals, and Dynamics (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series, 98) Szerkesztette P. FISCHER és W. R. SMITH, Marcel Dekker, INC, New York, 1985.

Ebben a kötetben 18 dolgozat található, amelyek mindegyike valamilyen formában kapcsolódik dinamikai rendszerek bifurkációjához, illetve a káosz fellépéséhez dinamikai rendszerekben. E dolgozatokat két konferencián ("Chaos Days at Guelph") mutatták be a University of Guelph-en (Ontario, Kanada) 1981-ben, illetve 1983-ban. A többségükben rendkívül érdekes és gazdagon illusztrált dolgozatokat felsoroljuk és (hely hiányában) csupán egy-két mondatban ismertetjük.

R. H. ABRAHAM (RENÉ THOMnak ajánlott) "*Chaostrophes, Intermittency, and Noise*" c. dolgozatában áttekintést ad különböző, részben a szerző által korábban bevezetett katasztrófa-típusokról.

R. H. ABRAHAM és C. C. SHAW (RENÉ THOMnak ajánlott) "*The Outstructure of the Lorenz Attractor*" c. dolgozatában a szerzőktől megszokott, ragyogó grafikus illusztrációkat találunk a Lorenz attraktorban alapvető szerepet játszó három egyensúlyi helyzet instabilis halmazára nézve.

R. H. ABRAHAM, HÜSEYİN KOCAK és W. R. SMITH "*Chaos and Intermittency in an Endocrine System Model*" c. dolgozata egy háromkomponensű hormon-rendszer modelljét ismerteti, amelyben bizonyos paraméterek változtatására elemi és összetettebb katasztrófák lépnek fel.

O. GUREL "*An Index for Chaotic Solutions in Cooperative Peeling*" c. dolgozatában egyensúlyi helyzetek bifurkációival foglalkozik.

W. F. LANGFORD "*Unfolding of Degenerate Bifurcations*" c. dolgozatában rövid de szemléletes áttekintést ad degenerált Hopf-bifurkációk osztályozásáról, illetve „egyszerű” (csak egyensúlyi helyzeteket eredményező) és Hopf-bifurkációk összeolvadásáról. Egy számítógépes grafikával jól illusztrált példát is mutat invariáns töruszok keletkezésére másodlagos Hopf-bifurkációk útján.

O. E. RÖSSLER "*Example of an Axiom A ODE*" c. dolgozatában olyan négydimenziós közönséges differenciálegyenlet rendszert mutat be, amely A -axiomás dinamikai rendszert generál, és amelynek valószínűleg különös attraktora van.

R. H. ABRAHAM "*Is there Chaos without Noise?*" c. MAURICIO PEIXOTONak ajánlott, filozófiai jellegű dolgozata a kvázi-periodikus paradoxonra keres magyarázatot, illetve a zaj szerepét vizsgálja számítógépes szimulációkban megfigyelt kaotikus jelenségekben.

R. H. ABRAHAM és KATHERINE A. SCOTT "*Chaostrophes of Forced Van der Pol Systems*" c. dolgozata számítógépes kísérletekről számol be. E dolgozat CHIHRO HAYASHINAK van ajánlva.

M. E. ALEXANDER, J. BRINDLEY és I. M. MOROZ "*Numerical Solution of the Lorenz Equations with Spatial Inhomogeneity*" c. dolgozatukban először általánosítják a Lorenz-féle differenciálegyenlet rendszert úgy, hogy az térbeli koordináták szerinti elsőrendű parciális deriváltat is tartalmazzon, majd numerikus vizsgálatuk eredményeképpen megállapítják, hogy ebben a formában az egyenletrendszer kevésbé alkalmas fizikai jelenségek leírására.

S-N. CHOW és D. GREEN JR. "*Some Results on Singular Delay-Differential Equations*" c. dolgozatukban szingulárisan perturbált, késleltetett és egy járulékos paramétert tartalmazó differenciálegyenletek megoldásainak stabilitásvesztésével foglalkoznak. Az 1. Tétel megértését a (4) és (5) formulában levő sajtóhibák nehezítik.

FISCHER PÁL "*Feigenbaum Functional Equations as Dynamical Systems*" c. dolgozatában korábbi vizsgálatait folytatva több érdekes tételt bizonyít a Feigenbaum-féle függvényegyenlet páros, unimodális megoldásainak periodikus pontjai létezésével kapcsolatban.

M. W. HIRSCH "*The Chaos of Dynamical Systems*" c. dolgozatában érdekes, kissé szkeptikus, a tipikusságra és a kaotikus dinamikára vonatkozó eszmefuttatás után tételeket közöl, melyek azt mutatják, hogy monoton dinamikai rendszereknek nincsenek különös attraktorai.

G. IKEGAMI "On Network Perturbations of Electrical Circuits and Singular Perturbation of Dynamical Systems" c. dolgozatában FENICHEL geometriai szinguláris perturbációelméletét alkalmazza elektromos hálózatok ugrásjelenségeinek leírására.

B. B. MANDELBROT öt dolgozata "On the Dynamics of Iterated Maps III—VII" zárja a kötetet. E dolgozatokban a komplex sík bizonyos, egyetlen komplex paramétertől függő, kvadratikus leképezéseinek iteráltjaival foglalkozik. Tárgyalja az ún. *Mandelbrot-halmaz*, ill. a *Julia-halmaz* struktúráját. Több érdekes és mély sejtést ismertet. Ilyenek az ún. „általános n négyzet sejtés”, az, hogy a *Mandelbrot-halmaz* fraktális dimenziója kettő, illetve az, hogy *Julia-halmazok* sorozata egy *Siegel-tárcsához* konvergálhat. E sejtéseket számítógépes kísérletek és szinte művészi, számítógéppel nyert ábrák támasztják alá.

Farkas Miklós

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat a nyomdába érkezett: 1986. augusztus 8. — Terjedelem: 16,80 (A/5 iv)
86-3283—Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Surányi Tibor igazgató

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban kell beküldeni.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezésekképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segéd tételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerinti alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

- [1] Farkas, J., »Über die Theorie der einfachen Ungleichungen«, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 124 (1902) 1—27.
- [2] Kéri, G., „DUALSIMP”, rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertető 2. 1973. május) 19—20.
- [3] Prékopa, A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról”, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
- [4] Prabhu, N. U., “Recent research on the ruin problem of collective risk theory”, in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.
- [5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak ezek költsége — nyomott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Klafszky Emil és Terlaky Tamás</i> : Magyar módszer típusú algoritmusok lineáris programozási feladatok megoldására	1
<i>Sebő András</i> : Hálózati folyam módszerek alkalmazása a terminálidő beosztására	15
<i>Maga Ferenc és Vizvári Béla</i> : Egy speciális 0—1-es feladat halmazfedési feladattá relaxálása	41
<i>Prill Mária</i> : Döntésektől függő ellátási feladatok dekompozíciós megoldásakor fellépő lineáris programozási feladat elemzése	51
<i>Szenteleki Károly és Szidarovszky Ferenc</i> : Szőlő telepítése és feldolgozása többcélú optimalizációs modell alapján	63
<i>Burkauskas Antanas</i> : Valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modellek konvexitási problémájáról	77
<i>Kertész Viktor</i> : Másodrendű differenciálegyenletek parciális aszimptotikus becslései	91
<i>Fazekas Gábor és Pethő Attila</i> : Permutációs forráskódolás	107
<i>Vu Duc Thi</i> : Relációs adatmodell antikulsairól	111
<i>Veres Sándor</i> : Maximum likelihood becslések aszimptotikus nem normalitásáról	125
<i>Kutas Tibor és Tóth János</i> : A balatoni fitoplankton dinamikájának egy sztochasztikus modellje	143
<i>Rapcsák Tamás és Szenthe János</i> : A mechanikai erőegyensúly és a nemlineáris programozás kapcsolatairól	161
<i>Vincze Endre</i> : A gazdaságosság függvényegyenlet-rendszerének egyik általánosítása és annak megoldása	175
<i>Könyvismertetés</i>	189

INDEX

<i>Terlaky, T. and Klafszky, E.</i> , Variants of the Hungarian Method for linear programs	1
<i>Sebő, A.</i> , Application of network flow methods in the scheduling of terminal sessions	15
<i>Maga, F. and Vizvári, B.</i> , The relaxation of a special polynomial zero-one programming problem to set covering problem	41
<i>Prill, M.</i> , The analysis of linear programming problems, resulting from the decomposition solving of supply problems dependent on decisions	51
<i>Szenteleki, K. and Szidarovszky, F.</i> , Multiobjective optimization model for vine planting and processing	63
<i>Burkauskas, A.</i> , On convexity problems of the probabilistic constrained stochastic programming problems	77
<i>Kertész, V.</i> , Partial stability investigations of differential equations of second order	91
<i>Fazekas, G. and Pethő, A.</i> , Permutational source coding	107
<i>Vu Duc Thi</i> , On antikeys of the relational datamodel	111
<i>Veres, S.</i> , On the asymptotic non-normality of the maximum likelihood estimations	125
<i>Kutas, T. and Tóth, J.</i> , A stochastic model of the phytoplankton dynamics in lake Balaton	143
<i>Rapcsák, T. and Szenthe, J.</i> , On the connection between the mechanical equilibrium and the non-linear programming	161
<i>Vincze, E.</i> , Über eine Verallgemeinerung des Funktionalgleichungssystems von Wirtschaftlichkeit	175
<i>Book reviews</i>	189

Alkalmazott matematikai lapok

1986/3-4

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

12.

KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI
TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ

PRÉKOPA ANDRÁS

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTES

ARATÓ MÁTYÁS

A SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG TAGJAI

BENCZUR ANDRÁS, CSISZÁR IMRE, DEMETROVICS JÁNOS, FARKAS MIKLÓS,
GALÁNTAI AURÉL, GYIRES BÉLA, HATVANI LÁSZLÓ, HEPPES ALADÁR,
KÁTAI IMRE, KIS OTTÓ, MAROS ISTVÁN, TANDORI KÁROLY, TUSNÁDY GÁBOR,
VARGA LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS (technikai szerkesztő)

MUNKATÁRSÁK

BAJCSAY PÁL, BALLA KATALIN, BÉKÉSSY ANDRÁS, CSÁKI PÉTER,
CSIRIK JÁNOS, DÉNES JÓZSEF, DÖMÖLKI BALINT, ELBERT ÁRPÁD,
FORGÓ FERENC, GÉCSEG FERENC, GERGELY JÓZSEF, GESZTELYI ERNŐ,
GYÖRFFY LÁSZLÓ, KLAFSZKY EMIL, KÓSA ANDRÁS, KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA,
LÁSZLÓ ZOLTÁN, MIKOLÁS MIKLÓS, MOGYORÓDI JÓZSEF, NÉMETH GÉZA,
NEMETZ TIBOR, RÉVÉSZ PÁL, RÓZSA PÁL, STAHL JÁNOS, SZÉP JENŐ,
TANKÓ JÓZSEF, TOMKÓ JÓZSEF, TÖKE PÁL, VINCZE ENDRE

XII. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XII., Kende u. 13—17.

Kiadóhivatal: 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közül cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztő bizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Prékopa András, főszerkesztő
1502 Budapest, Kende u. 13—17.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 128 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a Kultúra Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

ZÉRUSHOZ TARTÓ MEGOLDÁSOK LÉTEZÉSÉNEK FELTÉTELEI HOMOGÉN LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ESETÉBEN

KERTÉSZ VIKTOR

Budapest

Tekintsük az $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$ homogén lineáris egyenletet. Tételezzük fel, hogy az $x \equiv 0$ megoldás nem aszimptotikusan stabilis, ennek ellenére létezik $x(t)$ megoldás, amelyre $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Ez a tény nem bizonyítható globális felső becsléssel. Jelen dolgozatban megmutatjuk, hogy szoros kapcsolat áll fenn a fenti egyenlet zérushoz konvergáló és az $\dot{y} = -A^T(t)y$ egyenlet normában végtelenhez tartó megoldásai között. Az utóbbi megoldások alkalmasan választott indefinit kvadratikus *Ljapunov-függvénnyel* kimutathatók.

1. Bevezetés

Tekintsük az

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

differentiálegyenletet, ahol

$$f(t, 0) \equiv 0.$$

Tételezzük fel, hogy e differentiálegyenlet valamennyi $x(t)$ megoldása zérushoz tart: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Természetesen túlzás lenne azt mondani, hogy ez a tény minden esetben könnyen kimutatható. Igaz azonban, hogy a differentiálegyenletek kvalitatív elméletében több módszer létezik, amelyek közül sokszor találunk alkalmasat a zérushoz konvergálás bizonyítására.

Most azt feltételezzük, hogy differentiálegyenletünknek van zérushoz tartó megoldása, ugyanakkor olyan megoldás is van, amely nem tart zérushoz. Ezt a tényt a fent említett szokásos módszerekkel már nem tudjuk feltárni, mert ezek az eljárások csak az origó egy adott környezetéből induló *összes* megoldásra érvényes állítások levezetésére alkalmasak. Ilyen értelemben ezek az eljárások *globális vizsgálati módszerek*.

Célunk az, hogy olyan utakat keressünk, amelyek *nem globális* tehát csak a megoldások egy részére vonatkozó vizsgálatokra alkalmasak. Egy lehetséges út LJAPUNOV második módszerének kiterjesztése nem globális vizsgálatokra. LJAPUNOV második módszerét eredetileg és ma is főképpen globális kutatásra használják. Az ehhez szükséges *Ljapunov-függvény pozitív definit*. YOSHIKAWA [13] a *Ljapunov-függvénynek* és e függvény rendszer szerinti deriváltjának egy nagyon általános definícióját adja meg. E definíció *indefinit* függvény alkalmazását is lehetővé teszi. [6, 8]-ban kvadratikus indefinit *Ljapunov-függvényt* használtunk fel arra, hogy megmutassuk léteznek nem zérushoz tartó megoldások. Ekkor azonban még mindig

marad tisztázatlan kérdés. Vajon a nem zérushoz tartó megoldások mellett léteznek-e zérushoz konvergálók is? Ezt a kérdést ezen az úton nem tudjuk megválaszolni. Ugyanis a nem zérushoz tartó, ún. nagy megoldások kimutatásához szükséges alsó becslés létrehozásánál meghatározó körülmény, hogy e nagy megoldásokhoz egy bizonyos invariáns halmaz rendelhető. A zérushoz tartó, ún. kis megoldások esetében ilyen invariáns halmaz általában nincs. Ezt a nehézséget csak a módszer további fejlesztésével lehet kiküszöbölni, amit *lineáris* esetben sikerült megtennünk. Ezt az újabb eljárást [7]-ben az $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + y = 0$ egyenletre kidolgoztuk (l. [7]-ben a 7.1. tétel bizonyítását). [10]-ben a tételt általánosan is kimondtuk lineáris egyenletekre, de bizonyítást nem közöltünk. Jelen dolgozatban ismertetjük a bizonyítást és néhány további eredményről számolunk be. Mielőtt azonban erre rátérnénk, néhány szót kell ejtenünk a *dichotómiák elméletével* [2] kapcsolatosan.

Exponenciális dichotómia esetében az

$$\dot{x} = A(t)x; \quad x \in \mathbb{R}^n$$

differenciálegyenletnek a megoldásai két csoportba sorolhatók: egy részük zérushoz, másik részük végtelenhez tart. A konvergencia minden esetben egyenletes és exponenciális. COPPEL kimutatja, hogy ez a tény milyen összefüggésben van negatív rendszer szerinti deriválttal rendelkező, *indefinit kvadratikusan Ljapunov-függvény* létezésével. Így tehát, amikor indefinit kvadratikusan *Ljapunov-függvényt* alkalmazunk [10]-ben és [7]-ben a nagy és kis megoldások szétválasztására, akkor nem új alapotól indulunk ki. Azonban attól a tényről eltekintve, hogy az alkalmazott *Ljapunov-függvény* mindkét esetben indefinit kvadratikusan, a módszer a két esetben lényegesen különbözik. Az általunk vizsgált egyenleteknél nem exponenciális, legfeljebb közönséges dichotómia áll fenn.

2. Zérushoz tartó megoldás létezésének elégséges feltétele

Vizsgálatunk tárgya az

$$(2.1) \quad \dot{x} = A(t)x; \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad t \geq t_0$$

egyenlet, ahol $A(t)$ $n \times n$ -es mátrix függvény. A megoldások aszimptotikus viselkedésénél az *egyenletes stabilitásnak* (l. [11] 2.2. definícióját) fontos szerepe van. Ezzel kapcsolatosan néhány tételre és összefüggésre van szükségünk.

Legyen $X(t)$ (2.1)-nek alaprendszer. A $|\cdot|$ mátrixnormát a $|\cdot|$ vektornormából az alábbi összefüggéssel definiáljuk:

$$(2.2) \quad |A| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

2.1. TÉTEL. A (2.1) egyenlet $x \equiv 0$ egyensúlyi helyzet pontosan akkor egyenletesen stabilis, ha

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq K$$

valamely $0 < K$ -ra és bármely $t_0 \leq s \leq t$ -re.

A bizonyítást l. pl. [2]-ben.

2.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha a (2.1) egyenlet $x \equiv 0$ egyensúlyi helyzete egyenletesen stabilis, akkor létezik $L > 0$, hogy $|X(t)| \leq L; t \geq t_0$.

Figyeljük meg, hogy a fordított állítás általában nem igaz: ha $|X(t)| \leq L$; $t \geq t_0$ valamely $0 < L$ -re, akkor még nem biztos, hogy $|X(t)X^{-1}(s)|$ korlátos $t_0 \leq s \leq t$ -re. Ezt a körülményt a következő példa bizonyítja.

Legyen

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}.$$

Ekkor $|X(t)| = 1$, ugyanakkor

$$\left| (X(2k\pi)X^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)) \right| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & -e^{\frac{\pi}{2} + 2m\pi} \\ e^{-2k\pi} & 0 \end{bmatrix} \right\|$$

tetszőlegesen nagy, ha m elég nagy (k és m pozitív egészek).

Az

$$(2.3) \quad \dot{y} = -A^T(t)y; \quad t \geq t_0$$

egyenletet nevezzük a (2.1)-hez rendelt *adjungált egyenletnek*, ahol a felső T index a transzponálást jelöli. (2.3) adjungált egyenlete nyilván (2.1). $X^{T-1}(t)$ (2.3)-nak nyilván alaprendszere.

2.2. TÉTEL. (A zérushoz tartó megoldás létezésének elégséges feltétele.)

Legyen (2.1)-nek az $x \equiv 0$ egyensúlyi helyzete egyenletesen stabilis és (2.3)-nak létezzen $y_0(t)$ megoldása, amelyre $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_0(t)| = \infty$. Akkor (2.1)-nek létezik $x_0(t)$ megoldása, amelyre $\lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $X(t)$ (2.1) olyan alaprendszere, amelyre $X(s) = I$, $t_0 \leq s$. Ekkor $Y(t) = X^{T-1}(t)$ (2.3)-nak olyan alaprendszere, amelyre ugyancsak $Y(s) = I$. Bontsuk fel $X(t)$ -t az alábbi módon:

$$X(t) = S(t)M(t); \quad S^T(t) = S(t); \quad M^T(t) = M^{-1}(t).$$

Legyen $x(t)$ (2.1)-nek, $y(t)$ pedig (2.3)-nak egy-egy megoldása. Megmutatjuk, hogy ha

$$y(s) = M^T(t)x(t),$$

akkor

$$y(t) = M(t)x(s),$$

ahol $t_0 \leq s \leq t$. Ugyanis

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(t)y(s) = X^{T-1}(t)M^T(t)x(t) = \\ &= X^{T-1}(t)M^T(t)X(t)x(s) = S^{-1}(t)M(t)M^T(t)S(t)M(t)x(s) = \\ &= M(t)x(s). \end{aligned}$$

Legyen $y_\tau(t)$ (2.3)-nak az

$$y_\tau(t) = \frac{y_0(t)}{|y_0(\tau)|}$$

összefüggéssel definiált megoldása, ahol $t_0 \leq t \leq \tau$. Legyen továbbá $x_\tau(t)$ (2.1)-nek az a megoldása, amelyre

$$x_\tau(s) = M^T(\tau)y_\tau(\tau).$$

Ekkor igazak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}y_\tau(s) &= M^T(\tau)x_\tau(\tau), \\|y_\tau(\tau)| &= |x_\tau(s)| = 1, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} |y_\tau(s)| &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} |x_\tau(\tau)| = 0.\end{aligned}$$

Válasszunk egy $s < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_n < \dots$ sorozatot, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$. Legyen x_0 az $x_{\tau_n}(s)$ pontok valamelyik torlódási pontja és $x_0(t)$ (2.1)-nek az a megoldása, amelyre $x_0(s) = x_0$. Becsüljük most meg $|x_0(\tau_n)|$ -t.

$$\begin{aligned}|x_0(\tau_n)| &\leq |x_0(\tau_n) - x_{\tau_n}(\tau_n)| + |x_{\tau_n}(\tau_n)| = \\ &= |X(\tau_n)(x_0 - x_{\tau_n}(s))| + |x_{\tau_n}(\tau_n)| \leq L|x_0 - x_{\tau_n}(s)| + |x_{\tau_n}(\tau_n)|.\end{aligned}$$

Legyen N olyan természetes szám, hogy $n \geq N$ esetén adott $0 < \delta$ -ra $|x_{\tau_n}(\tau_n)| \leq \delta/2$.

A $\tau_N, \tau_{N+1}, \dots$ számok közül válasszuk ki azt a τ_{n_0} -t, amelyre

$$|x_0 - x_{\tau_{n_0}}(s)| \leq \delta/2L.$$

Ekkor $|x_0(\tau_{n_0})| \leq \delta$.

Válasszunk most egy tetszőleges $0 < \varepsilon$ számot. Ehhez adjunk meg egy olyan $0 < \delta$ számot (és ezt alkalmazzuk az $|x_0(\tau_n)|$ -re levezetett becslésnél is), amelyre igaz a következő: ha $|x_0(t_1)| \leq \delta$ és $t_1 \leq t$, akkor $|x_0(t)| \leq \varepsilon$. Ebből következik, hogy $\tau_{n_0} \leq t$ esetén $|x_0(t)| \leq \varepsilon$.

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_0(t)| = 0$!

A tétel jelentősége abban áll, hogy az eredeti egyenlet nehezen kimutatható kis megoldása helyett az adjungált egyenlet nagy megoldásait kell vizsgálnunk, amit [6]-ban sok esetre megoldottunk.

Megmutatjuk, hogy a tételben az egyenletes stabilitás lényeges feltétel.

Legyen ugyanis

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & t \cos t \\ -\frac{\cos t}{t} & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}; \quad 0 < t_0.$$

Ennek alaprendszeré:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \sin \sin t & -\cos \sin t \\ \frac{1}{t} \cos \sin t & \frac{1}{t} \sin \sin t \end{bmatrix}.$$

Nyilvánvalóan nincs zérushoz tartó megoldás. Ugyanakkor az adjungált egyenlet alaprendszeré:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \sin \sin t & -\cos \sin t \\ t \cos \sin t & t \sin \sin t \end{bmatrix},$$

amelyből látható, hogy az

$$y(t) = Y(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

megoldásra $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty$. Természetesen az egyenletes stabilitás nem is áll fenn.

Érdekes a következő példa is:

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2 - \frac{2}{t} & t^2 - \frac{4}{t} \\ -t^2 & \frac{2}{t} - t^2 \end{bmatrix};$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^2 & \frac{1}{t^2} - t \\ -t^2 & t \end{bmatrix};$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t - \frac{1}{t^2} & t^2 \end{bmatrix}; \quad 0 < t_0.$$

Láthatjuk, hogy az eredeti rendszer és az adjungált rendszer *valamennyi* megoldása normában a végtelenhez tart. Az egyenletes stabilitás itt sem teljesül.

A következő pontban a 2.2. tétel alkalmazására mutatunk példát.

3. Az $\ddot{z} + p(t)\dot{z} + q(t)z = 0$ egyenlet vizsgálata

A másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedésében még sok nyitott probléma van. (Az ilyen egyenletekkel foglalkozó számos munka közül csupán ízeitől említenek néhányat: [1, 4, 5, 7].) Ezért az alanti eredmények nem csak mint szemléltető példák lehetnek érdekesek, hanem önmagukban is érdeklődésre tarthatnak számot.

Ahhoz, hogy a 2.2. tételt alkalmazhassuk, először feltételt kell adni a zérus egyensúlyi helyzet stabilitására.

3.1. TÉTEL. A

$$(3.1) \quad \ddot{z} + p(t)\dot{z} + q(t)z = 0; \quad t \geq t_0$$

egyenletre teljesüljenek a következő feltételek:

- (i) $p \in C^0; \quad q \in C^1$
- (ii) $0 < q(t) < M, \quad t_0 \leq t, \quad \text{valamely } 0 < M\text{-re,}$
- (iii) $\int_{t_0}^{\infty} \sqrt{q(s)} ds = \infty,$
- (iv) $p(t) \leq \frac{d}{dt} \ln \frac{1}{\sqrt{q(t)}}.$

Ekkor a zérus egyensúlyi helyzet egyenletesen stabilis.

Bizonyítás. Tekintettel az első három feltételre, a t változóról új τ változóra térhetünk át az alábbi összefüggés szerint:

$$\tau(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{q(s)} ds,$$

$$w(\tau) = z(t(\tau)).$$

A $dw/d\tau = w'$ és $d^2w/d\tau^2 = w''$ jelölések bevezetésével egyenletünk a következőképpen módosul:

$$(3.2) \quad w'' + \tilde{p}(\tau)w' + w = 0; \quad 0 \leq \tau,$$

ahol

$$\tilde{p}(\tau) = \frac{\dot{q}(t)}{2q^{3/2}(t)} + \frac{p(t)}{q^{1/2}(t)} \Big|_{t=t(\tau)}; \quad 0 \leq \tau.$$

(iv) alapján nyilvánvaló, hogy $\tilde{p}(\tau) \geq 0$; $0 \leq \tau$. Mutassuk meg, hogy (3.2) bármely $w(\tau)$ megoldása esetében $w^2(\tau) + w'^2(\tau)$ monoton csökkenő függvény:

$$\frac{d}{d\tau} (w^2(\tau) + w'^2(\tau)) = 2w(\tau)w'(\tau) + 2w''(\tau)w'(\tau) = -2\tilde{p}(\tau)w'^2(\tau) \leq 0.$$

A $w(\tau)$ -nak megfelelő, a (3.1)-hez tartozó megoldás legyen $z(t)$: $z(t) = w(\tau(t))$. Vegyük figyelembe, hogy

$$w'(\tau) \sqrt{q(t(\tau))} = \dot{z}(t) \Big|_{t=t(\tau)}.$$

Az alábbi egyenlőtlenségeket egyszerűen beláthatjuk:

$$z(t) \leq \sqrt{w^2(\tau) + w'^2(\tau)} \Big|_{\tau=\tau(t)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{q(t)}} \dot{z}(t) \leq \sqrt{w^2(\tau) + w'^2(\tau)} \Big|_{\tau=\tau(t)},$$

$$\sqrt{z^2(t) + \dot{z}^2(t)} \leq \sqrt{1 + M} \sqrt{w^2(\tau) + w'^2(\tau)} \Big|_{\tau=\tau(t)}.$$

Mivel a jobb oldal monoton csökkenő függvénye t -nek, így az egyenletes stabilitást beláttuk!

Néhány példát mutatunk, amelyek azt illusztrálják, hogy tételünk bizonyos esetekben meglehetősen éles.

Az állandó együtthatós esetben (iii) következik (ii)-ből, (i) nyilvánvaló, (ii) és (iv) pedig a szükséges és elégséges feltételt eredményezik.

A továbbiakban vizsgált két példa egyenlete [12]-ben szerepel.

A

$$\ddot{z} + \frac{1 - \alpha - 2\beta}{t} \dot{z} + \left(t^{2\alpha - 2} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{t^2} \right) z = 0$$

differentiálegyenlet két lineárisan független megoldása:

$$z_1(t) = t^\beta \sin t^\alpha \quad \text{és} \quad z_2(t) = t^\beta \cos t^\alpha, \quad \text{ha} \quad \alpha \neq 0,$$

ill.

$$z_1(t) = t^\beta \quad \text{és} \quad z_2(t) = t^\beta \ln t, \quad \text{ha} \quad \alpha = 0,$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

(i), (ii) és (iii) teljesül, ha $0 < \alpha < 1$ és t_0 elég nagy. (iv)-re az alábbi egyenlőtlenséget nyerjük:

$$\frac{1 - \alpha - 2\beta}{t} \cong -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2(2\alpha - 2)t^{2\alpha-3} - 2(\beta^2 + \alpha\beta)t^{-3}}{\alpha^2 t^{2\alpha-2} + (\beta^2 + \alpha\beta)t^{-2}},$$

amelyből:

$$1 - \alpha - 2\beta \cong (1 - \alpha) \frac{1 - 2 \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2(2\alpha - 2)} t^{-2\alpha}}{1 + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2} t^{-2\alpha}}.$$

Ez utóbbi pontosan akkor teljesül minden $t_0 \leq t$ -re, ha $\beta < 0$. Tehát, ha $0 < \alpha < 1$ és $\beta < 0$, akkor az origó egyenletesen stabilis. A megoldások ismeretében most azt is tudjuk, hogy akkor valamennyi megoldás a deriváltjával együtt zérushoz tart.

Végül tekintsük a

$$\ddot{z} + \frac{1 - \alpha - \beta}{t} \dot{z} + \frac{\alpha\beta}{t^2} z = 0; \quad t > 0$$

Euler-típusú egyenletet, amelynek két lineárisan független megoldása

$$\begin{aligned} z_1(t) &= t^\alpha; \quad z_2(t) = t^\beta, & \text{ha} \quad \alpha \neq \beta, \\ z_1(t) &= t^\alpha; \quad z_2(t) = t^\alpha \ln t, & \text{ha} \quad \alpha = \beta. \end{aligned}$$

A 2.2. tétel (i)–(iv) feltételei most a következőt jelentik: $\alpha < 0$ és $\beta < 0$.

3.2. TÉTEL. A (3.1) egyenletre teljesüljenek a 3.1. tétel feltételei, továbbá az alábbi feltétel:

$$(v) \quad p(t) > \frac{q(t) + \beta^2}{\beta}, \quad \text{valamely} \quad 0 < \beta\text{-ra.}$$

Ekkor (3.1)-nek van zérushoz tartó megoldása.

Bizonyítás. Mutassuk meg, hogy a 2.2. tétel feltételei teljesülnek. Az egyenletes stabilitást a 3.1. tétellel már bebizonyítottuk. Így csupán azt kell kimutatnunk, hogy az adjungált egyenletnek van végtelenhez tartó megoldása. Ebből a célból egyenletünket mátrixos formába írjuk át:

$$(3.3) \quad \dot{x} = A(t)x,$$

ahol

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}; \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}.$$

Az adjungált egyenlet:

$$\dot{y} = \tilde{A}(t)y,$$

ahol

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & q(t) \\ -1 & p(t) \end{bmatrix}.$$

Célszerűen az adjungált egyenletet ilyen alakban fogjuk kezelni:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) & -1 \\ q(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Most ez utóbbi egyenletre alkalmazzuk [6] 4. pontjának eredményeit. Legyen $0 < \beta$ adott konstans és

$$C = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

akkor

$$F^T(t)C + CF(t) = \begin{bmatrix} 2p(t)\beta^2 & -q(t) - \beta^2 \\ -q(t) - \beta^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A nagy megoldások alsó becslésében szereplő $\varrho(t)$ függvénynek akkor van minimuma t függvényében, ha a

$$\kappa = \frac{2p(t)\beta^2}{2\beta(q(t) + \beta^2)}$$

kifejezés (l. [6]-ban (4.5)) 1-nél nagyobb. Ez pedig (v) miatt valóban igaz. Ekkor (l. [6]-ban (4.7)):

$$\varrho(t) \cong 2p(t) - \frac{1}{p(t)} \left(\frac{q(t) + \beta^2}{\beta} \right)^2 \cong p(t).$$

Ha $\int_0^\infty \varrho(t) dt = \infty$ teljesül, akkor az adjungált egyenlet nagy megoldásai végtelenhez tartanak. Ez pedig (v) miatt valóban igaz!

Érdekes az (v) feltételt közelebbről megvizsgálni. Belátható, hogy igaz a következő azonosság:

$$\frac{q(t) + \beta^2}{\beta} \cong 2\sqrt{q(t)}.$$

(v)-ből tehát következik az

$$(v') \quad p(t) > 2\sqrt{q(t)}$$

feltétel.

A (3.1) egyenletet írjuk át polár koordinátarendszerbe az alábbi transzformációs képlet felhasználásával:

$$z = r \cos \varphi,$$

$$\dot{z} = r \sin \varphi.$$

Ekkor φ -re az alábbi differenciálegyenletet nyerjük

$$\dot{\varphi} = -\cos^2 \varphi (\operatorname{tg}^2 \varphi + p(t) \operatorname{tg} \varphi + q(t)).$$

Ebből megállapíthatjuk, hogy

$$p(t) < 2\sqrt{q(t)}$$

esetén φ t -nek monoton csökkenő függvénye, a megoldások $(z(t))$ *oszcillálni* fognak. Könnyen kimutatható, hogy az adjungált egyenlet megoldásai is *oszcillálni* fognak. Most már világos, hogy módszerünk miért „mond csődöt”, amikor (v') nem teljesül: az *oszcilláció* eleve kizárja azt, hogy a $z^T C z$ indefinit *Ljapunov-függvény* által, a $z^T C z > 0$ egyenlőtlenséggel meghatározott halmaz invariáns legyen.

A 3.2. tétel az állandó együtthatós esetben a következő feltételeket szolgáltatja:

$$p > 2\sqrt{q} > 0.$$

Eltekintve az *oszcillációtól* és a dupla multiplicitású gyök esetétől, ez éppen a zérus egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis voltát jelenti.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy a 3.2. tétel nem annyira szűk-e, hogy minden esetben az aszimptotikus stabilitással együtt biztosítja a deriváltjával együtt zérushoz tartó megoldás létezését? Erre a válasz: nem. [7]-ben megmutattuk,

hogy ha $q(t) \equiv 1$, $p(t) > 2$ és $\int_{t_0}^{\infty} (1/p(t)) dt < \infty$, akkor van zérushoz tartó, és nem zérushoz tartó megoldás is.

Most egy általánosabb feltételt is adunk arra, hogy mikor létezik nem zérushoz tartó megoldás. (3.3)-ra alkalmazzuk [6] 4. pontjának eredményeit:

$$A^T(t)C + CA(t) = \begin{bmatrix} 0 & \beta^2 + q(t) \\ \beta^2 + q(t) & 2p(t) \end{bmatrix},$$

$$\kappa = \frac{2p(t)\beta^2}{2\beta(\beta^2 + q(t))} > 1,$$

$$p(t) > \frac{\beta^2 + q(t)}{\beta},$$

$$-p(t) + \sqrt{p(t) - \left(\frac{q(t) + \beta^2}{\beta}\right)^2} \geq -\frac{1}{p(t)} \left(\frac{q(t) + \beta^2}{\beta}\right)^2.$$

Ezzel nyilvánvalóan bebizonyítottuk a következő tételt:

3.3. TÉTEL. Legyenek (3.1)-ben p pozitív és q nem negatív folytonos függvények és létezzen $\beta > 0$, amelyre a 3.2. tétel (v) feltétele teljesül. Ha ezen felül még a

$$(vi) \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{p(t)} \left(\frac{q(t) + \beta^2}{\beta}\right)^2 dt < \infty$$

feltétel is teljesül, akkor (3.1)-nek létezik nem zérushoz tartó megoldása.

A (iv) és (v) feltételeket szemügyre véve, azt látjuk, hogy ezek $p(t)$ -nek eleendően nagyra választását követelik meg. Ugyanez a helyzet (vi)-tal is. Tehát ez a feltétel nincs a többivel ellentétben, sőt (vi)-ből következik (v).

Tételeinket a következő példával szemléltetjük.

Tekintsük a

$$\ddot{z} + p(t)\dot{z} + \left(1 + \frac{1}{t}\right)z = 0$$

differenciálegyenletet, ahol $p \in C^0$, $t > 0$.

A 3.1. tétel (i), (ii) és (iii) feltételei teljesülnek. (iv) azt jelenti, hogy

$$p(t) \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{t+t^2}.$$

Legyen

$$p_1(t) = \frac{2}{t} + 1 + t,$$

és

$$p_2(t) = \frac{2}{t} + 1 + 2t + t^2.$$

(v) mindkét esetben teljesül, (vi) azonban csak p_2 esetében. Ha $p(t) \equiv p_1(t)$, akkor a differenciálegyenlet egy megoldása:

$$z(t) = \frac{1}{t}.$$

Előállítva egy másik lineárisan független megoldást, egyszerűen beláthatjuk, hogy ebben az esetben a differenciálegyenlet bármely megoldása deriváltjával együtt a zérushoz tart.

Ha $p(t) \equiv p_2(t)$, akkor

$$z(t) = 1 + \frac{1}{t}$$

megoldás. Ez a megoldás nem tart zérushoz. Természetesen létezik a deriváltjával együtt zérushoz tartó megoldás is, amelyet az állandó variálásával könnyen előállíthatunk.

4. A homogén lineáris egyenlet és adjungált egyenlete közötti kapcsolat az általános esetben

A 2. pontban az egyenlet és adjungáltja közötti kapcsolatot csupán akkor vizsgáltuk, amikor az eredeti egyenlet zérus egyensúlyi helyzete egyenletesen stabilis volt. Ha az egyenletes stabilitást nem követeljük meg, az adjungált egyenletnél egy végtelenhez tartó megoldás létezéséből az eredeti rendszerre vonatkozólag semmiféle következtetést nem vonhatunk le: mint láttuk lehetséges, hogy az eredeti rendszer valamennyi megoldása a zérushoz tart, vagy valamennyi megoldása a végtelenhez tart, de egyéb esetek is lehetségesek.

Megmutatjuk, hogy ilyen esetben is van kapcsolat a két egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedése között.

4.1. TÉTEL. A (2.1) egyenletnek legyen $X(t)$ alaprendszere. Ha az $X(t)x_0$ megoldás zérushoz tart, akkor (2.3) $X^{T-1}(t)x_0$ megoldása a ∞ -hez tart.

Bizonyítás. $X(t)$ -t írjuk fel $X(t) = N(t)D(t)M(t)$ alakban, ahol $N(t)$ és $M(t)$ ortogonális, $D(t)$ pedig diagonális mátrix. Az $M(t)x_0$ vektor elemei legyenek rendre $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Bármely t -hez létezik egy k egész ($1 \leq k \leq n$), amelyre

$$|x_k(t)| \cong \frac{|x_0|}{\sqrt{n}}.$$

Legyen $0 < \varepsilon$ tetszőleges és legyen T olyan nagy, hogy $|X(t)x_0| < \varepsilon$, $t \geq T$. Legyenek $D(t)$ főátlójában rendre a $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ számok.

Akkor

$$|\lambda_k(t)| \leq \frac{\sqrt{n}}{|x_0|} \varepsilon, \quad t \geq T.$$

Ugyanakkor

$$|X^{T-1}(t)x_0| = |D^{-1}(t)M(t)x_0| \cong \frac{|x_0|}{\varepsilon \sqrt{n}} \frac{|x_0|}{\sqrt{n}}; \quad t \geq T.$$

$|x_0|^2/n$ állandó, és $1/\varepsilon$ tetszőlegesen nagy szám, így állításunkat beláttuk!

Érdekes, hogy amíg $X(t)x_0$ zérushoz tartásából $X^{T-1}(t)x_0$ végtelenhez tartása következik, addig fordítva ez nem áll, még az eredeti egyenlet egyenletes stabilitása esetén sem. Ez az oka annak, hogy a 2.2. tétel bizonyítása lényegesen bonyolultabb, mint a 4.1. tételé.

4.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha az adjungált egyenlet zérus egyensúlyi helyzete stabilis, akkor az eredeti egyenletnek nem lehet zérushoz tartó megoldása.

5. A megoldások globális viselkedései közötti összefüggés az adjungált egyenlet pároknál

A bevezetőben említettük, hogy minket azok az esetek érdekelnek, amelyekre nem tudunk globális becsléseket adni. Tehát, ha van zérushoz tartó megoldás, akkor emellett van nem ilyen is. Ha van ∞ -hez tartó megoldás, akkor van nem végtelenhez tartó megoldás is. A teljesség kedvéért azonban azokra az esetekre is kitérünk, amelyeknél globális becslések is adhatók.

A 4.1. tételből következik, hogy ha az eredeti egyenlet összes megoldása a zérushoz tart, akkor az adjungált egyenlet összes megoldása a végtelenhez tart.

Az előzőekben láttuk, hogy fordított következtetés általában nem vonható le. Ugyanakkor bizonyos egyéb feltételek teljesülése esetén a fordított következtetés is igaz. Ehhez egy definícióra és néhány lemmára van szükségünk.

5.1. Definíció. Legyen A tetszőleges kvadratikus mátrix. $m(A)$ -val az A -hoz egyértelműen hozzárendelt következő számot értjük:

$$m(A) = \min_{|x|=1} |Ax|.$$

5.1. LEMMA. Legyen A tetszőleges kvadratikus, nem elfajuló mátrix. Ekkor

$$m(A) = 1/|A^{-1}|.$$

Bizonyítás. Nyilván létezik x_1 és x_2 vektor, hogy

$$|x_1| = |x_2| = 1; \quad |Ax_1| = m(A); \quad |A^{-1}x_2| = |A^{-1}|.$$

Legyen x tetszőleges olyan vektor, amelyre $|x|=1$. Ezzel $A^{-1}Ax=x$, továbbá:

$$|A^{-1}| = \max_{|x|=1} \frac{|A^{-1}Ax|}{|Ax|} = \max_{|x|=1} \frac{|x|}{|Ax|} = 1/\min_{|x|=1} |Ax| = 1/m(A)!$$

5.2. LEMMA. Legyen A tetszőleges kvadratikus, nem elfajuló mátrix. Akkor $|A|=|A^T|$.

Bizonyítás. A -t $A=SM$; $S^T=S$; $M^T=M^{-1}$ alakban felírva:

$$|A| = |SM| = |S|; \quad |A^T| = |M^T S| = |S|!$$

5.3. LEMMA. Ha A kvadratikus, nem elfajuló, akkor

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Bizonyítás. Ha $A=SM$; $S^T=S$; $M^T=M^{-1}$, akkor

$$(A^T)^{-1} = (M^T S)^{-1} = S^{-1} M; \quad (A^{-1})^T = (M^T S^{-1})^T = S^{-1} M!$$

5.4. LEMMA. Legyen $X(t)$ a (2.1) és $Y(t)$ a (2.3) egyenlet alaprendszer, amelyekre $Y(t)=X^{T^{-1}}(t)$, akkor

$$(5.1) \quad m(X(t)) = 1/|Y(t)|,$$

$$(5.2) \quad m(Y(t)) = 1/|X(t)|.$$

Bizonyítás. Az állítás az előző lemmák, továbbá az $X^{T^{-1}}(t)=Y(t)$; $Y^{T^{-1}}(t)=X(t)$ azonosságok nyilvánvaló következménye!

5.5. LEMMA. Az előző lemma jelöléseivel élve

$$|x(t)| \cong m(X(t))|X^{-1}(t_0)x(t_0)|,$$

$$|y(t)| \cong |Y(t)| |Y^{-1}(t_0)y(t_0)|,$$

ahol $x(t)$ (2.1)-nek, $y(t)$ pedig (2.3)-nak tetszőleges megoldása.

Bizonyítás. Az állítás $m(X(t))$ és $|Y(t)|$ definíciójának, valamint az

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0),$$

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y(t_0)$$

összefüggések közvetlen következménye!

5.6. TÉTEL. Ha az adjungált egyenlet összes megoldása a végtelenhez tart és emellett $\lim_{t \rightarrow \infty} m(Y(t)) = \infty$, akkor az eredeti egyenlet összes megoldása a zérushoz tart.

Bizonyítás. Az előző lemmák közvetlen következményéről van itt szó, ha $X(t)$ és $Y(t)$ szerepét felcseréljük!

Megjegyezzük, hogy az 5.6. tételnek csak elvi érdekessége van, hiszen nem feltelezhetjük, hogy az alaprendszer ismeryük.

Most a globális viselkedések közötti összefüggést más oldalról világítjuk meg. [9]-ből láthatjuk, hogy (2.1) *valamennyi* $x(t)$ megoldására az alábbi felső becslést adhatjuk:

$$(5.3) \quad |x(t)| \leq K|S^{-1}(t)| \exp \int_{t_0}^t \mu(S(\tau)A(\tau)S^{-1}(\tau) + \dot{S}(\tau)S^{-1}(\tau))d\tau,$$

ahol $K > 0$ adott konstans és $S(t)$ tetszőleges reguláris és folytonosan differenciálható mátrix függvény, $\mu(C)$ pedig a C mátrix szimmetrikus részének legnagyobb sajátértékét jelöli. Hasonlóképpen, az

$$(5.4) \quad \dot{y} = B(t)y$$

egyenlet $y(t)$ megoldásaira az alábbi alsó becslés adható:

$$(5.5) \quad |y(t)| \geq M|Q(t)|^{-1} \exp - \int_{t_0}^t \mu(-Q(\tau)B(\tau)Q^{-1}(\tau) - \dot{Q}(\tau)Q^{-1}(\tau))d\tau,$$

ahol $S(t)$ szerepét most $Q(t)$ tölti be, $M > 0$ adott konstans. Legyen most $B(t) = -A^T(t)$ és $Q(t) = S^T(t)$. Akkor $y(t)$ alsó becslése így írható át:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} |y(t)| &\geq M|S^{-1}(t)|^{-1} \exp - \int_{t_0}^t \mu(S(\tau)A(\tau)S^{-1}(\tau) + \dot{S}(\tau)S^{-1}(\tau))d\tau = \\ &= M \left\{ |S^{-1}(t)| \exp \int_{t_0}^t \mu(S(\tau)A(\tau)S^{-1}(\tau) + \dot{S}(\tau)S^{-1}(\tau))d\tau \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

E két becslésből az alábbi két állítás következik:

- Ha $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$ és ezt alkalmas $S(t)$ választásával az (5.3) becsléssel ki tudjuk mutatni, akkor ebből következik, hogy az adjungált egyenlet *valamennyi* megoldása végtelenhez tart.
- Ha $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty$ és ezt alkalmas $Q(t)$ választásával az (5.5) becsléssel ki tudjuk mutatni, akkor ebből következik, hogy az eredeti egyenlet *valamennyi* megoldása zérushoz tart.

Tekintettel arra, hogy létezik olyan eset (l. a 2. szakasz ide vonatkozó példáját), amelynél az eredeti és az adjungált egyenlet megoldásai egyaránt a végtelenhez tartanak, ezért az alábbi tétel mondható ki.

5.7. TÉTEL. Tekintsük az (5.4) egyenletet. Tételezzük fel, hogy az egyenlet valamennyi $y(t)$ megoldására igaz a $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty$ reláció. Akkor ebből nem következik, hogy létezik olyan $Q(t)$ reguláris és folytonosan deriválható $n \times n$ -es mátrix függvény, amelyre (5.5) jobb oldala a végtelenhez tartana.

Ez a tétel első pillanatra azért meglepő, mert ha a tételben szereplő esettel szemben (2.1) valamennyi megoldása a zérushoz tart, akkor ez alkalmas $S(t)$ választása mellett az (5.3) becsléssel mindig kimutatható (l. [3]).

Legyen (2.1) alaprendszere $X(t)$, amelyre $X(t_0)=I$. Akkor (2.1) $x(t)$ megoldásaira a lehetséges legélesebb alsó és felső becslés a következő (l. 5.5. lemma):

$$(5.7) \quad x(t_0)m(X(t)) \leq |x(t)| \leq |x(t_0)||X(t)|, \quad t \geq t_0.$$

A becslések élessége abban áll, hogy bármilyen adott $t_0 \leq t$ -hez létezik olyan konkrét $x_1(t)$, ill. $x_2(t)$ megoldás, hogy éppen egyenlőség áll fenn:

$$|x(t_0)|m(X(t)) = |x_1(t)|;$$

$$|x_2(t)| = |x(t_0)||X(t)|.$$

Ez utóbbi állítás egyszerűen következik $m(X(t))$ és $|X(t)|$ definíciójából. (5.7) első egyenlőtlensége az

$$m(X(t)) = |X(t)|^{-1}$$

azonosság figyelembevételével átírható:

$$(5.8) \quad |x(t_0)||X^{-1}(t)|^{-1} \leq |x(t)| \leq |x(t_0)||X(t)|.$$

Ez a becslés megkapható, ha az (5.3), ill. (5.4) becslésekben $S(t)=X(t)$ (ill. $Q(t)=X(t)$) választással élünk. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $S(t)$ (ill. $Q(t)$) transzformáló mátrix alkalmazásával a μ funkcionál segítségével létrehozott exponenciális alsó és felső becslések tetszőlegesen élesíthetők, sőt a lehetséges legélesebb becslés is elérhető [3]. Ez utóbbi kijelentés ellentétben látszik lenni az 5.7. tétellel. Ellentmondásról azonban nincs szó. Ugyanis az a rendkívül érdekes körülmény áll fenn, hogy $m(X(t))$ aszimptotikus viselkedéséből nem mindig következtethetünk a megoldások aszimptotikus viselkedésére. Ha $\lim_{t \rightarrow \infty} m(X(t))=0$, akkor az alábbi esetek bármelyike lehetséges:

- Van zérushoz tartó megoldás.
- Nincs zérushoz tartó megoldás.

Például:

$$X(t) = \begin{bmatrix} t \cos \frac{1}{t} & -t \sin \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} & \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} \end{bmatrix},$$

sőt, minden megoldás a végtelenhez tart, például (l. 2. szakasz):

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^2 & \frac{1}{t^2} - t \\ -t^2 & t \end{bmatrix}.$$

IRODALOM

- [1] BALLIEU, R. J. and PEIFFER, K., "Attractivity of the origin for the equation $\ddot{x} + f(t, x, \dot{x})|\dot{x}|^q \dot{x} + g(x) = 0$ ", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 65 (1978) 321—332.
- [2] COPPEL, W. A., *Dichotomies in Stability Theory*, Lecture Notes in Mathematics No. 629 (Springer, Berlin, 1978).
- [3] GARAY, B. M. and KERTÉSZ, V., "Estimates by Lozinsky's functional improved in the linear autonomous case", *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 3 (1984) 87—95.

- [4] HARTMAN, PH., *Ordinary Differential Equations* (John Wiley & Sons, Inc., New York—London—Sidney, 1964).
- [5] HATVANI, L., "A generalization of the Barbashin—Krasovskij theorem to the partial stability in nonautonomous systems", *Colloquia Math. Soc. János Bolyai* 30, Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, Hungary, 1979, 381—409.
- [6] KERTÉSZ, V., „Indefinit kvadratikus Ljapunov függvények alkalmazása stabilitás vizsgálatokhoz”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 8 (1982) 307—322.
- [7] KERTÉSZ, V., „A csillapított rezgőmozgás differenciálegyenletének stabilitási vizsgálata”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 8 (1982) 323—339.
- [8] KERTÉSZ, V., "Application of indefinite Lyapunov function for stability investigations", *ZAMM* 63 (1983) T66—T68.
- [9] KERTÉSZ, V., „Pozitív definit kvadratikus Ljapunov függvények alkalmazása stabilitási vizsgálatokhoz”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 9 (1983) 375—386.
- [10] KERTÉSZ, V., "Separation of large and small solutions using indefinite Lyapunov functions", *ZAMM* 64 (1984) T366—T367.
- [11] KERTÉSZ, V., „Nemlineáris differenciálegyenletek attraktorai”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 10 (1984) 231—256.
- [12] KERTÉSZ, V., „Parciális stabilitás vizsgálatok”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* megjelenés alatt.
- [13] YOSHIZAWA, T., *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and almost Periodic Solutions* (Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1975).

(Beérkezett: 1986. november 1.)

KERTÉSZ VIKTOR
BME GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR MATEMATIKA TANSZÉK
1521 BUDAPEST, STOCZEK U. H ÉP. IV. E.

CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF SOLUTIONS CONVERGING TO ZERO IN THE CASE OF HOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. KERTÉSZ

Consider the homogeneous linear equation $\dot{x} = A(t)x$; $x \in \mathbb{R}^n$; $t \geq t_0$. Suppose that the zero solution is not asymptotically stable; still there exists a solution $x(t)$ for which $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. This fact can not be proved by a global upper estimation of the solutions. In this paper we show that there is a close relationship between the solutions of the above equation tending to the origin and those solutions of the equation $\dot{y} = -A^T(t)y$ which tend in norm to the infinity. The latter solutions can be revealed by using an appropriate indefinite quadratic *Lyapunov-function*.

DISZKRÉT DINAMIKUS RENDSZEREK ELŐÁLLÍTÁSA ADOTT INPUT ÉS OUTPUT IDŐSORBÓL

LÁSZLÓ LAJOS

Budapest

Dinamikus rendszer input-outputjából (vezérlés és megfigyelés) próbálunk a rendszerre következtetni. A feladat nemlineáris függvények négyzetösszegének minimalizálására vezet, melyet *Newton-iterációval* oldunk meg. A *Hesse-mátrix* inverzét explicit alakban előállítva a műveletigényt jelentősen csökkentjük.

A feladat általános megfogalmazása

Legyen Σ egy dinamikus rendszer, amely az $\{u(t)\}_{t=0}^T$ input sorozat hatására az $\{y(t)\}_{t=1}^{T+1}$ output sorozatot állítja elő, ahol $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^n$ minden t -re. Keresünk olyan

$$x(0) = 0$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

diszkrét dinamikus rendszert (azaz: $A \in R^{k \times k}$, $B \in R^{k \times m}$, $C \in R^{n \times k}$ mátrixokat), amely ugyanezt a kapcsolatot eredményezi. Egy $\Sigma = \Sigma(A, B, C)$ rendszer input-output kapcsolatát az

$$M_i = CA^iB, \quad i = 0, 1, \dots$$

Markov-paraméterek bevezetésével az

$$(1) \quad y(t+1) = \sum_{\tau=0}^t M_{t-\tau} u(\tau), \quad t = 0, 1, \dots, T$$

összefüggések adják.

Feladatunkat e jelölések bevezetésével két részre oszthatjuk:

1. Adott $\{u(t)\}$, $\{y(t)\}$; keresendő $\{M_i\}$.

2. Adott $\{M_i\}$; keresendő A, B, C .

Jelen dolgozatban az 1. feladattal foglalkozunk. A 2. feladat a (parciális) realizáció, amellyel kapcsolatban érvényes ([1]) a következő tétel:

„ $\{M_i\}$ akkor és csak akkor realizálható, ha létezik $L \in N$ és $\{c_i\}_{i=0}^{L-1}$ úgy, hogy fennállnak az

$$(2) \quad M_{t+L} = \sum_{i=0}^{L-1} c_i M_{t+i}, \quad t = 0, 1, \dots, L-1$$

rekurzív összefüggések”.

E feltétel teljesülését természetesen most is fel kell tennünk, így az 1. feladat a következőképpen fogalmazható: keressük az (1) egyenletrendszernek a (2) feltételek melletti legkisebb négyzetes megoldását.

A feladatot célszerű átfogalmazni úgy, hogy az $\{\mathbf{M}_i\}$ paraméterek száma csökkenjen (a $\{c_i\}$ együtthatók rovására). Erre (2) ad lehetőséget. Ebből ugyanis

$$\mathbf{M}_{t+L} = \sum_{i=0}^{L-1} c_i(t+L)\mathbf{M}_i, \quad t = 0, 1, \dots, T-L,$$

ahol $0 \leq i \leq L-1$ esetén

$$(3) \quad c_i(t) = \begin{cases} \delta_{it}, & \text{ha } 0 \leq t \leq L-1, \\ \sum_{j=0}^{L-1} c_j c_i(t+j-L), & \text{ha } L \leq t \leq T. \end{cases}$$

Speciálisan $c_i = c_i(L)$. Ezzel a célfüggvény a következőképpen alakul:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sum_{t=0}^T \left\| \sum_{\tau=0}^t \mathbf{M}_{t-\tau} \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{y}(t+1) \right\|^2 &= \sum_{t=0}^T \left\| \sum_{\tau=0}^t \sum_{i=0}^{L-1} c_i(t-\tau) \mathbf{M}_i \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{y}(t+1) \right\|^2 = \\ &= \sum_{t=0}^T \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{M}_i \sum_{\tau=0}^t c_i(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{y}(t+1) \right\|^2. \end{aligned}$$

A megoldandó feladat tehát: (4) minimalizálása a (3) feltételek mellett.

Egy konkrét modell

A fenti feladatra az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének Matematikai Módszerek Osztályán Csernátóny Csaba és Tihanyi Ambrus vizsgálatai vezetnek. A modellben olyan kategóriák szerepelnek, mint a devizaegyenleg, a fogyasztás, a beruházás vagy az export ($\mathbf{u}(t)$, ill. $\mathbf{y}(t)$ változókként). A vizsgált időintervallum negyedévekre való felosztásából adódóan $T=28$, más variánsban $T=80$.

A célfüggvénynek, mint a $\{c_i\}$ változók polinomiális függvényének — valószínűleg T viszonylag nagy értékéből adódó — rendkívüli érzékenysége következtében a MINOS (nemlineáris programok megoldására szolgáló) programcsomag paramétereit nem sikerült tökéletesen beállítani, így saját programmal próbálkoztunk. Ez kettős előnnyel jár:

- (a) Szemben a MINOS-szal, itt felhasználhatjuk a másodrendű deriváltakat is;
- (b) figyelembe vehetjük a feladat speciális adottságait.

A továbbiakban egy a fenti kívánalmaknak megfelelő megoldási módszert mutatunk be, amelynek a programja az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjának Honeywell gépén FORTRAN nyelven készült el.

A feladat megoldása

A (3), (4) problémát felfoghatjuk feltétel nélküli minimalizálásnak is, hiszen a $c_i(t)$, $t \geq L$ változók (3) alapján kifejezhetők a $c_i = c_i(L)$ alapváltozókkal. Összes változóink tehát:

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{L-1}), \quad \mathbf{M} = (\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_{L-1}).$$

Itt definíció szerint

$$\mathbf{M}_i = (M_i^{(j,k)})_{j=1, n}^{k=1, m} = \mathbf{M}_i^{(\cdot, \cdot)}, \quad 0 \leq i \leq L-1.$$

Célszerű azonban az \mathbf{M} tömböt az

$$\mathbf{M}^{(j)} = (M_i^{(j,k)})_{i=0, L-1}^{k=1, m} = \mathbf{M}^{(j, \cdot)}, \quad 1 \leq j \leq n$$

mátrixok segítségével

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \dots, \mathbf{M}^{(n)})$$

formában felbontani. Tehát

$$\mathbf{x} = (\mathbf{c}, \mathbf{M}) = (\mathbf{c}, \mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(n)})$$

lesz számításaink során a független változó vektor.

Megjegyzés: A sor- és oszlopvektorok használatánál szokásos konvencióktól a bonyolult indexhasználat miatt eltekintünk.

Az $\mathbf{x} := \mathbf{x} - f''(\mathbf{x})^{-1} f'(\mathbf{x})$ Newton iterációs lépésnek megfelelően vezessük be az f célfüggvény gradiensére az

$$f'(\mathbf{x}) = (\mathbf{g}\mathbf{c}, \mathbf{g}\mathbf{M}) = (\mathbf{g}\mathbf{c}, \mathbf{g}\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{g}\mathbf{M}^{(n)}),$$

a „másodrendű növekményre” pedig az

$$f''(\mathbf{x})^{-1} f'(\mathbf{x}) = (\mathbf{d}\mathbf{c}, \mathbf{d}\mathbf{M}) = (\mathbf{d}\mathbf{c}, \mathbf{d}\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{d}\mathbf{M}^{(n)})$$

jelölést. Ekkor egy iterációs lépés a következő alakú:

$$(5) \quad \mathbf{c} := \mathbf{c} - \mathbf{d}\mathbf{c},$$

$$\mathbf{M}^{(j)} := \mathbf{M}^{(j)} - \mathbf{d}\mathbf{M}^{(j)}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Az egyes iterációs lépések között elvégzendő tevékenység leírásától — annak bizonyos fokig heurisztikus volta miatt — eltekintünk; célunk a fenti képlet kiszámításához szükséges munka gazdaságossá tétele. Mivel a változók száma $L_1 = L + mnL$, a szokásos módszer egy L_1 -edrendű szimmetrikus mátrix meghatározásából, invertálásából és egy (a gradiens-) vektorral való szorzásból áll. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a vizsgált feladat esetében ennél jóval kevesebb műveletre van szükség. Igaz a következő állítás.

1. LEMMA. A (4) függvényre fennáll:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{c}, \mathbf{M})}{\partial M_{i_1}^{(j_1, k_1)} \partial M_{i_2}^{(j_2, k_2)}} = 0, \quad \text{ha } j_1 \neq j_2,$$

valamint

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{c}, \mathbf{M})}{\partial M_{i_1}^{(j, k_1)} \partial M_{i_2}^{(j, k_2)}} \quad \text{független } j\text{-től.}$$

Bizonyítás. Vezessük be az $f_j(t)$ függvényeket az

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}, \mathbf{M}) &= \sum_{t=0}^T \sum_{j=1}^n f_j(t)^2 = \\ &= \sum_{t=0}^T \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=0}^{L-1} M_i^{(j, k)} \sum_{\tau=0}^t c_i(t-\tau) \sum_{k=1}^m u_k(\tau) - y(t+1) \right]^2 \end{aligned}$$

egyenlőséggel, és legyen

$$z_{i,k}(t) = \sum_{\tau=0}^t c_i(t-\tau) u_k(\tau), \quad 0 \leq i \leq L-1, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Jelölje továbbá ∂_1 az $M_{i_1}^{(j_1, k_1)}$ szerinti, ∂_2 az $M_{i_2}^{(j_2, k_2)}$ szerinti parciális deriválást. Ekkor

$$(6) \quad \frac{\partial f_{j_1}(t)}{\partial_2} = \delta_{j_1 j_2} \cdot z_{i_2, k_2}(t)$$

minden szóba jövő indexre, és így

$$\frac{\partial f(\mathbf{c}, \mathbf{M})}{\partial_1} = 2 \sum_{t=0}^T \sum_{j=1}^n f_j(t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial_1} = 2 \sum_{t=0}^T f_{j_1}(t) z_{i_1, k_1}(t),$$

valamint

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\mathbf{c}, \mathbf{M})}{\partial_1 \partial_2} &= 2 \sum_{t=0}^T \left[\frac{\partial f_{j_1}(t)}{\partial_2} \cdot \frac{\partial f_{j_1}(t)}{\partial_1} + f_{j_1}(t) \frac{\partial^2 f_{j_1}(t)}{\partial_1 \partial_2} \right] = \\ &= 2 \delta_{j_1 j_2} \sum_{t=0}^T z_{i_1, k_1}(t) z_{i_2, k_2}(t), \end{aligned}$$

hiszen (6) szerint $\frac{\partial^2 f_{j_1}(t)}{\partial_1 \partial_2} = 0$. Az utóbbi egyenlőségből következik mindkét állítás.

KÖVETKEZMÉNY. A másodrendű deriváltak mátrixa

$$f''(\mathbf{c}, \mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_n \\ \mathbf{B}_1^T \mathbf{A} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{B}_n^T & & \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

alakú, tehát szimmetrikus blokkmátrix, amely csak első blokksorában és blokkoszlopában különbözik egy olyan blokkdiagonális mátrixtól, amelynek minden blokkja azonos.

Az inverz kiszámításánál éppen ebből indultunk ki, ugyanis skalár blokkok esetén a feladat az „egy diáddal módosított mátrix inverzének” jól ismert meghatározása. A módosítandó mátrix speciális blokkdiagonális alakja miatt az alábbi lemma szerint az inverz explicit alakban felírható.

2. LEMMA.

$$f''(\mathbf{c}, \mathbf{M})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{H}\mathbf{B}_1\mathbf{A}^{-1} & \dots & -\mathbf{H}\mathbf{B}_n\mathbf{A}^{-1} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{H} & \mathbf{F}_{11} + \mathbf{A}^{-1} & & \mathbf{F}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_n^T\mathbf{H} & \mathbf{F}_{n1} & & \mathbf{F}_{nn} + \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{H} = (\mathbf{B}_0 - \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_j^T)^{-1},$$

és

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{H} \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Bizonyítás. A bizonyítást az alábbi sémának megfelelően négy lépésben végezzük el:

$$f''(\mathbf{c}, \mathbf{M}) f''(\mathbf{c}, \mathbf{M})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. & 2. \\ 3. & 4. \end{pmatrix}.$$

$$1. \quad \mathbf{B}_0 \mathbf{H} - \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{H} = (\mathbf{B}_0 - \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i^T) \mathbf{H} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{I};$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & -\mathbf{B}_0 \mathbf{H} \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} = \\ & = (\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_0 \mathbf{H} \mathbf{B}_j) \mathbf{A}^{-1} + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{H} \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} = \\ & = (\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_0 \mathbf{H} \mathbf{B}_j) \mathbf{A}^{-1} + (\mathbf{B}_0 - \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{H} \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} = 0, \quad 1 \leq j \leq n; \end{aligned}$$

$$3. \quad \mathbf{B}_i^T \mathbf{H} + \mathbf{A}(-\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{H}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \mathbf{B}_i^T (-\mathbf{H} \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1}) + \mathbf{A}(\mathbf{F}_{ij} + \delta_{ij} \mathbf{A}^{-1}) = \\ & = -\mathbf{B}_i^T \mathbf{H} \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{H} \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} + \delta_{ij} \mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{I}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

(\mathbf{I} mindenütt a megfelelő rendű egységmátrix).

Ezek után az

$$f''(\mathbf{c}, \mathbf{M})^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{g}\mathbf{c} \\ \mathbf{g}\mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{c} \\ \mathbf{d}\mathbf{M} \end{pmatrix}$$

egyenlőségből

$$\mathbf{d}\mathbf{c} = \mathbf{H}(\mathbf{g}\mathbf{c} - \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}\mathbf{M}^{(j)}),$$

$$\mathbf{d}\mathbf{M}^{(i)} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{H} \mathbf{g}\mathbf{c} + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} \mathbf{g}\mathbf{M}^{(j)} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}\mathbf{M}^{(i)} =$$

$$= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{g}\mathbf{M}^{(i)} - \mathbf{B}_i^T \mathbf{H} \mathbf{g}\mathbf{c} + \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_i^T \mathbf{H} \mathbf{B}_j \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}\mathbf{M}^{(j)})$$

minden $i=1, 2, \dots, n$ esetén. A

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{H}\mathbf{B}_j\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}\mathbf{M}^{(j)}, \quad 1 \leq j \leq n$$

jelölések bevezetésével a képletek tovább egyszerűsödnek:

$$(7) \quad \mathbf{dc} = \mathbf{H}\mathbf{g}\mathbf{c} - \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j,$$

$$\mathbf{dM}^{(i)} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{g}\mathbf{M}^{(i)} - \mathbf{B}_i^T \mathbf{dc}).$$

Összefoglalva a fentieket, látható, hogy míg egy iterációs lépéshez az (5) képlet közvetlen alkalmazása esetén $L_1 = L + mnL$ -edrendű mátrixszal kapcsolatos műveletek szükségesek, addig (7) szerint

1. eleve kevesebb mátrixelemet kell meghatározni;
2. két kicsirendű mátrixot kell invertálni, mégpedig egy L -edrendűt (l. \mathbf{B}_0) és egy mL -edrendűt (l. \mathbf{A});
3. végül $f''(\mathbf{c}, \mathbf{M})^{-1}$ ismeretében a mátrix-vektor szorzás is jelentős egyszerűsítéssel végezhető el.

IRODALOM

- [1] KALMAN, R. E., FALB, P. L. and ARBIB, M. A., *Topics in Mathematical System Theory* (McGraw-Hill Book Company, New York—San Francisco—St. Louis—Toronto—Sidney, 1969).

(Beérkezett: 1986. január 7.)

LÁSZLÓ LAJOS
ORSZÁGOS TERVHIVATAL SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA
1149 BUDAPEST, ANGOL U. 27.

REPRODUCING OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS FROM THE INPUT-OUTPUT VARIABLES

L. LÁSZLÓ

We attempt to reproduce the system from the input-output variables (control and observation). This leads to a nonlinear least squares problem. By explicit inversion of the *Hessian*, the number of operations in a *Newton iteration step* can be reduced.

AZ INFORMÁCIÓ MÉRÉSE RELÁCIÓS ADATBÁZISOKBAN

BENCZÚR ANDRÁS

Budapest

A dolgozatban az adatbáziskezelő rendszerek hatékonyságának vizsgálatához ismertetünk egy általános, a fő feladatokat kijelölő modellt. Ezen belül az egyik legfontosabb feladat az adatbázis információtartalmának mérése, mennyiségi jellemzése. Ennek lehetőségeit, problémáit elemezzük részletesen a relációs adatbázisokon.

1. Bevezetés

Ahhoz, hogy egy számítógépes információkezelő rendszer hatékonyságát elemezni tudjuk, ismernünk kell a felhasznált eszköz (pl. adatbáziskezelő rendszer) teljesítmény mutatóit, s azt viszonyítanunk kell a megoldandó feladathoz. Ehhez az információs rendszer működésének fő jellemzőire van szükségünk:

- a rendszerben lévő információ mennyiségének mértékére (mind a tömegszerűséget, mind az összetettséget figyelembe véve),
- az információs rendszer működésének dinamikus mutatóira (változások, felhasználás dinamikája).

Mindezek az információs rendszerek szervezésének, tervezésének témaköréhez tartoznak, ahol még univerzális modellekről, szabványokról nem beszélhetünk. Ezzel az általános kérdéssel foglalkozik az [1] dolgozat. A következőkben csak a számítástechnikai belső kérdéskörrel, az adatbáziskezelő rendszerek teljesítménymutatóival, hatékonysági jellemzőivel foglalkozunk.

2. Az adatbáziskezelő rendszerek hatékonysági modellezésének alapfeladatai

Egy adatbáziskezelő rendszer — bármennyire univerzális legyen is — a szituációk, feladatok közül csak egy behatárolt halmazra készül fel. A felkészülés azt jelenti, hogy a számításba vett szituációkat homogén csoportokba sorolja, amelyeken belül azonos megoldást alkalmaz. A másik tipikus törekvés, hogy a hasonló, csak mennyiségben eltérő szituációkhoz lehetőleg a mennyiségi paramétereiktől lineárisan függő erőforráslekötést igényeljenek a megoldások.

Az első jelenséget úgy is jellemezhetjük, hogy egy adatbáziskezelő rendszer sohasem a szituációk előfordulásának valódi eloszlását veszi kiindulásnak, hanem a tekintett homogén részhalmazokon a priori egyenletes eloszlást tételez fel. A második jelenség pontosabban azt jelenti, hogy egy adatbáziskezelő rendszer, mint igen

bonyolult algoritmus, egy nagy feladatosztályt old meg, amelyet szétszed részfeladatokra, s azokon belül igyekszik egy-egy mérettartományban a méretparaméterektől lineárisan függő bonyolultságú (erőforrásigényű) megoldást adni. Természetesen a megoldás bonyolultsága nem lehet kisebb a feladat bonyolultságánál, tehát az adott tartományban jó megoldás csak úgy érhető el, hogy az olcsó erőforrásokra már a tartomány alsó határán is igen bonyolult megoldást választ, míg a drága, szűk keresztmetszetet jelentő erőforrásokon egyszerű, lineárisan növekvő a megoldás bonyolultsága. Ebből következik, hogy az alsó határon, vagy alatta a megoldás, még az olcsóbb erőforrásban mérve is, túlbonyolult, drága. A felső határon pedig ugrásszerűen változik a megoldás viselkedése, hirtelen nő a bonyolultsága, az olcsó erőforrások kihasználása nem fokozható tovább, egyre nagyobb rész jut a bonyolultságból a drágább, vagy lassúbb erőforrásokra.

Lényeges tehát, hogy jellemezni tudjuk egy adatbáziskezelő rendszer használatánál a feladat információmennyiség jellegű méretét, továbbá a választott algoritmusok méretfüggő bonyolultságát, hogy a kedvező működési tartományt jól be tudjuk határolni. Ezt a következő három komponens együtteseként vizsgálhatjuk:

- (i) Az adatbázis lehetséges állapotainak eloszlása a séma és a méretparaméterek függvényeként. Az eloszlás alapján lehet az állapot kódjának méretére jellemző információmennyiséget megadni.
- (ii) Az adatbázis állapotai közötti átmenetet leíró függvények algoritmikus bonyolultsági mértéke az állapotokat reprezentáló kód, az átmenetek lehetséges halmaza függvényeként.
- (iii) Az adatvisszakereséseket megadó függvények algoritmikus bonyolultsági mértéke a lehetséges kérdések halmazának, az állapotokat reprezentáló kódnak függvényeként.

Ez a három komponensből álló modell nem csak arra alkalmas, hogy az adatbáziskezelő rendszer algoritmusainak hatékonyságát elemezni lehessen, hanem arra is lehetőséget ad, hogy az információs rendszer méretéből, dinamikájából adódó terhelést rávétsük, s ezzel mintegy mérhetővé tegyük.

A következőkben ennek az általános modellnek szem előtt tartásával az (i) komponens kérdéseit elemezzük a relációs adatmodellre épülő rendszerekben.

3. A relációs adatmodell alapfogalmai

A relációs adatmodell alapfogalma, a reláció, nem más, mint véges sok véges elemű halmaz (komponens) direkt szorzatának egy időben változó részhalmaza.

A reláció jellemzéséhez tartozik a komponenseknek, mint halmazoknak azonosítása, a komponensekre való hivatkozásnak, mint tulajdonságoknak megadása, valamint a relációnak, és előfordulásainak (azaz az adott időben érvényes részhalmaznak) azonosítása.

A következőkben használt jelölések kicsit eltérnek az irodalomban használt, egyébként sem egységes jelölésektől a sajátos tárgyalásmód érdekében. A részletesebb megismeréshez DEMETROVICS—DENEV—PAVLOV [2], J. D. ULLMAN [3] és A. A. SZTOGNIJ—V. V. PASZICSNYIK [4] könyveit ajánljuk.

Legyen R relációnév, D_1, D_2, \dots, D_n pedig véges, nem feltétlenül különböző halmazok. Az R reláció a $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ tér feletti reláció, ha minden

r_τ előfordulására $r_\tau \subseteq D$ teljesül, ahol τ az időparamétert jelöli. Az r előfordulásnak mint halmaznak elemei, t_1, t_2, \dots, t_k , D -beli pontok, így rendezett n -eseket jelentenek: $t_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}\}$, ahol $d_{ij} \in D_j$. Megadhatjuk tehát az r előfordulást $n \times k$ -s mátrix formájában, amit relációs táblázatnak hívunk, ahol a sorok az r relációfordulás elemeinek felelnek meg. A táblázat oszlopainak is nevet adunk; A_1, A_2, \dots, A_n ; amelyeket tulajdonságoknak mondunk.

A tulajdonság bevezetésével a t sor D_t -beli komponensére (koordinátájára) $A_i \cdot t$ -vel hivatkozunk.

Az R reláció típusán tulajdonságainak felsorolását értjük, amit vagy $R(A_1, \dots, A_n)$, vagy $R(U)$ formában adunk meg, ahol $U = \{A_1, \dots, A_n\}$. A két jelölés közötti árnyalati különbséget a tulajdonságoknak rendezett, vagy nem rendezett halmazként való használata jelenti. A jelölésben explicite nem szerepel, hogy előzetesen az (A_i, D_i) tulajdonság — tulajdonságérték megfeleltetést elvégeztük. Ezt a következőkben is mindig feltételezzük, tehát a tulajdonság egyértelműen azonosít egy értéktartományt.

Az $R(A_1, \dots, A_n)$ relációtípus az adatmodellezésben azt jelenti (innen származnak az elnevezések is), hogy egy olyan, időben változó objektum- (egyed-) halmazt kívánunk reprezentálni, amelyben minden egyes egyed az A_1, A_2, \dots, A_n tulajdonságokkal jellemezhető, s az egyes tulajdonságok lehetséges értékeit — az eddigi megfeleltetést használva — a D_1, D_2, \dots, D_n értéktartományból vehetik fel. Az egyes egyedeknek így a D tér pontjait feleltethetjük meg, amiről a továbbiakban feltételezzük, hogy egyértelmű, azaz adott időpontban különböző objektumoknak különböző D -beli pont felel meg.

Amennyiben D -nek nem minden részhalmaza lehet R -nek előfordulása, azt mondjuk, az objektumok között függőség áll fenn, s ez R előfordulásain egy F függőségi rendszert jelent. Legáltalánosabban F -et úgy tekinthetjük, mint D lehetséges részhalmazainak rendszerét, azaz $F \subseteq 2^D$.

Az R reláció sémáján a (D, U, F) hármast értjük, ahol $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ a reláció alaptere, D_i -k az értéktartományok, $U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ a tulajdonságok halmaza, az A_i tulajdonság szerint a reláció előfordulásának sorai D_i -beli értékeket vehetnek fel, $F \subseteq 2^D$ a függőségi rendszer, ami azt jelenti, hogy R minden lehetséges r előfordulására $r \in F$ teljesül.

1.1. Megjegyzés. A reláció típusának és sémájának megkülönböztetése, valamint a függőségi rendszer ilyen megadása így nem szerepel az irodalomban.

A két legfontosabb függőségtípust, a funkcionális és a többértékű függőséget mutatjuk még meg.

A funkcionális függőség definíciója:

Legyen $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$ az $R(U)$ típusú reláció tulajdonságainak két részhalmaza. Akkor mondjuk, hogy az r előfordulás kielégíti az $X \rightarrow Y$ funkcionális függőséget, ha valahányszor $t_1, t_2 \in r$ és $X.t_1 = X.t_2$, akkor $Y.t_1 = Y.t_2$ is igaz, ahol az $X.t$ jelölés a t sornak az X -beli tulajdonságokon felvett értékeit jelöli. Amennyiben az $R(D, U, F)$ sémára teljesül, hogy minden $r \in F$ esetén r kielégíti az $X \rightarrow Y$ funkcionális függőséget, azt mondjuk, hogy az F függőségi rendszer tartalmazza az $X \rightarrow Y$ funkcionális függőséget.

A többértékű függőség definíciója:

Legyenek $X, Y, Z \subset U$, amelyekre $X \cup Y \cup Z = U$, $X \cap Y = \emptyset$ és $X \cap Z = \emptyset$ teljesül. Az $R(U)$ reláció r előfordulása kielégíti az $X \rightarrow Y$ többértékű függőséget, ha

valahányszor $t_1, t_2 \in r$ és $X.t_1 = X.t_2$, mindig létezik $t_3 \in r$, amelyen $X.t_3 = X.t_1$, és $Y.t_3 = Y.t_1$ és $Z.t_3 = Z.t_2$. Amennyiben az $R(D, U, F)$ sémára teljesül, hogy minden $r \in F$ esetén r kielégíti az $X \rightarrow Y$ többértékű függőséget, azt mondjuk, hogy az F függőségi rendszer tartalmazza az $X \rightarrow Y$ többértékű függőséget.

Az $R(U)$ relációtípushoz az $X \rightarrow Y$, illetve $X \twoheadrightarrow Y$ függőségek $F_{X \rightarrow Y}$, illetve $F_{X \twoheadrightarrow Y}$ függőségi rendszert jelölnek ki. $F_{X \rightarrow Y}$ az a legbővebb részhalmaza 2^D -nek, amelynek minden elemére $X \rightarrow Y$ teljesül.

Az $R(U)$ relációtípuson az F_1, F_2, \dots, F_m függőségi rendszerek által generált F függőségi rendszeren az $F = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_m$ függőségi rendszert értjük.

1.2. Megjegyzés. Legyen $G = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_m, Y_m)\}$ funkcionális vagy többértékű függőségek rendszere, és G^+ a lezártja, azaz olyan (X, Y) többértékű vagy funkcionális függőségek rendszere, amelyek minden olyan relációelőforduláson teljesülnek, amelyen G minden eleme teljesül. Igaz ekkor az $F_{X_1, Y_1} \cap \dots \cap F_{X_m, Y_m} = F_{G^+}$ összefüggés.

A funkcionális és a többértékű függőségeknek még egy szemléltetését adjuk meg.

Tekintsük az $R(U)$ reláció r előfordulását, és legyen $X \subseteq U$ egy tulajdonsághalmaz, $X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}\}$.

Az $r \subseteq D$ halmazt bontsuk fel diszjunkt halmazokra az X tulajdonsághalmazon felvett értékek szerint, azaz

$$r = \sum_{\substack{x=(d_{i_1}, \dots, d_{i_m}) \\ d_{i_j} \in D_{i_j}}} B_x(r), \quad \text{ahol } B_x(r) \text{ az } r \text{ reláció}$$

azon t sorainak halmaza, amelyen $X.t = x$. Jelöljük a $B_x(r)$ halmazokból álló teljes halmazrendszert $\mathcal{B}_X(r)$ -rel. Az $X \rightarrow Y$ funkcionális függőség teljesülése esetén tetszőleges $A \in \mathcal{B}_X(r)$ és $B \in \mathcal{B}_Y(r)$ halmazokra vagy $A \cap B = \emptyset$, vagy $A \subseteq B$ teljesül, azaz a $\mathcal{B}_X(r)$ halmazrendszer a $\mathcal{B}_Y(r)$ halmazrendszer finomítása.

Az $X \twoheadrightarrow Y$ (és az ezzel ekvivalens $X \twoheadrightarrow Z$) többértékű függőség teljesülése esetén tetszőleges $A \in \mathcal{B}_X(r)$, $B \in \mathcal{B}_Y(r)$ és $C \in \mathcal{B}_Z(r)$ halmazokra ha $A \cap B$ és $A \cap C$ egyike sem üres, akkor $A \cap B \cap C$ sem üres. (Amennyiben $X \cup Y \cup Z = V \subset U$ teljesül, a fenti feltétel az $X \twoheadrightarrow Y|V$ beágyazott többértékű függőséggel ekvivalens.) Az $X \twoheadrightarrow Y$ többértékű függőség annak felel meg, hogy minden $A \in \mathcal{B}_X(r)$ halmazon a $\mathcal{B}_Y(A)$ és $\mathcal{B}_Z(A)$ halmazrendszerek függetlenek. (Ezt a fogalmat RÉNYI ALFRÉD vezette be, egy Ω halmaz részhalmazaiából álló \mathcal{A} és \mathcal{B} halmazrendszereket függetleneknek nevezzük, ha minden $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$ nem üres halmazokra $A \cap B \neq \emptyset$.)

4. Az információ mérése relációs adatbázisokban

Az irodalomban céljaimnak megfelelő információmérési modellt relációs adatbázisokra mindezekig nem leltem. A már említett SZTOGNIJ—PASZICSNYIK [3] könyvben találtam egy dolgozatra, amely ilyen megközelítést sejtetett. K. K. NAMBIAR [5] hivatkozott dolgozata valóban tartalmaz ilyen kísérletet, azonban javasolt információ és entrópia mértékei kezdetlegeseek, kódhossz becslésére nem használhatók.

Az X halmaz elemeinek számát $|X|$ -szel jelölve, az [5] dolgozat az $R(U)$ típus r előfordulásához a $H(r) = \log_2 |r|$ entrópiát és az $I(r) = \log_2 \frac{|D|}{|r|}$ információ-mennyiséget rendeli. $H(r)$ indoklása az $|r|$ számú lehetőségből azonos valószínűséggel történő választás entrópiájával történik, $I(r)$ bevezetéséhez nincs indoklás.

Az $R(D, U, F)$ relációséma r előfordulásának információtartalmát és a séma entrópiáját szigorú értelemben akkor tudnánk meghatározni, ha ismernénk a visszatükrözött valós objektumhalmaznak, mint véletlen halmaznak az eloszlását, s ezen az egyes tulajdonságértékek eloszlását. Mindez az adatbáziskezelő rendszerek szempontjából az információs rendszerre tartozó külső kérdés, a valós világ modellezésének problémája.

Induljunk ki tehát abból a 2. pontban megfogalmazott elvből, hogy egy relációs adatbáziskezelő rendszer az azonos sémájú relációk azonos méretű előfordulásait azonos hosszúságú kóddal ábrázolja. Ez az elv egy apriori egyenletes eloszlást tételez fel az $R(D, U, F)$ sémán az azonos elemszámú előfordulásokon, amire az F függőségi rendszer feltételes eloszlásaként fogunk hivatkozni.

Jelöljük $F(k)$ -val az F függőségi rendszer k elemű relációelőfordulásainak halmazát és legyen

$$N_F(k) = |F(k)| = |\{r: r \in F, |r| = k\}|.$$

Az F függőségi rendszer feltételes eloszlásának az $F(k)$ halmazokon egyenletes eloszlást tekintjük, s ennek az eloszlásnak entrópiájaként definiáljuk az F függőségi rendszer feltételes információját,

$$I_F(k) = \log_2 N_F(k).$$

Az $I_F(k)$ feltételes információ azt fejezi ki, hogy az F függőségi rendszer és az r relációelőfordulás elemszámainak ismeretében az r reláció kódolásához átlagosan $I_F(k)$ bit elegendő. Érdemes megjegyezni, hogy $I_F(k)$ hosszú kód hordozza az r relációban lévő információ döntő hányadát. A teljes információhoz hozzátartozik még D megadása, amit $m_i = |D_i|$ jelöléssel, s feltételezve, hogy D_i elemei az $1, 2, \dots, m_i$ természetes számok, $n \log_2 n + \sum_{i=1}^n \log_2 m_i$ hosszú kóddal meg tudunk adni. Ezen kívül k értékét is kódolnunk kell, ami legfeljebb $\log_2 M = \log_2 |D| = \sum_{i=1}^n \log_2 m_i$ hosszú kódot igényel.

S végül az utolsó, hiányzó információ, az F függőségi rendszer kódolása, a gyakorlatban előforduló esetekben meglepő módon rövid kódot eredményez. Ennek oka nyilván az, hogy az elvileg lehetséges 2^{2^M} különböző függőségi rendszerből csak igen kevés fordul elő. Általában F megadása néhány funkcionális vagy többértékű függőség, s néhány lineáris összefüggés segítségével történik. Egy funkcionális függőség kódolása például, mint U két részhalmazának kódolása, $2n$ bittel megadható.

Érdemes még megjegyezni, hogy D és F kódja az adatbázis statikus részét jelenti, az adatbázis sémaleírása tartalmazza. Az $I_F(k)$ információ az adatbázis időben változó állapotának kódjára ad méretjellemzést. Az adatbázis sémájának kódja és állapotának kódja között több nagyságrend méreteltérést tapasztalhatunk a nagyméretű adatbázisokban.

A következőkben néhány érdekes példát mutatunk $I_F(k)$ meghatározására, amit érdemes lesz összehasonlítani az „egy sor — egy rekord” általános kódolási megoldás $k \cdot \log_2 M = k \cdot \sum_{i=1}^n \log_2 m_i$ kódhosszával.

4.1. *Példa.* Legyen $F=2^D$, azaz nincs semmilyen függőségi korlátozás. Ekkor $I_F(k) = \log_2 \binom{M}{k}$, ami kis k esetén $k(\sum_{i=1}^n \log_2 m_i)$ -vel, míg M -hez közeli k esetén $(M-k)(\sum_{i=1}^n \log_2 m_i)$ -vel közelíthető. Az utóbbi érték azt az egyszerű ténnyt szemlélteti, hogy túltelített esetben egyszerűbb a komplementer halmaz tárolása.

4.2. *Példa.* Tekintsük az $R(A_1, A_2)$ kétdimenziós relációt és legyen $F=F_{A_1 \rightarrow A_2}$.

$N_F(k)$ értékét ($k < m_1$) egyszerűen meghatározhatjuk, hiszen $\binom{m_1}{k}$ választási lehetőségünk van a k sor első tulajdonságértékeire, hiszen két azonos sor nem lehet, s minden sorban tetszőleges elemet választhatunk D_2 -ből a második tulajdonságérték gyanánt.

Így $N_F(k) = \binom{m_1}{k} m_2^k$, tehát

$$I_F(k) = \log_2 \binom{m_1}{k} + k \log_2 m_2.$$

Abban az esetben, amikor $k=m_1$, azaz a relációelőfordulás egy teljes $D_1 \xrightarrow{f} D_2$ függvényt ad meg,

$$I_F(m_1) = m_1 \log_2 m_2.$$

4.3. *Példa.* Legyen az $R(A_1, A_2, A_3)$ relációtípuson a függőségi rendszer $F=F_{A_1 \rightarrow A_2}$. Tételezzük fel, hogy $m_1 \ln m_1 < k$. Ekkor

$$I_F(k) < m_1 \log_2 m_2 + \log_2 \binom{m_1 m_3}{k}.$$

A k -ra tett feltétel miatt ugyanis $F(k)$ majdnem minden r elemére teljesül, hogy $B_{A_1}(r)$ egyik részhalmaza sem üres, azaz minden D_1 -beli érték legalább egyszer előfordul. Az $A_1 \rightarrow A_2$ funkcionális függőség tehát egy teljes $D_1 \xrightarrow{f} D_2$ függvényt ad meg r -ben, ami $m_2^{m_1}$ féleképpen lehetséges. Minden ilyen függvény választáshoz még tetszőlegesen választható k számú különböző pont a $D_1 \times D_3$ halmazból, ami $\binom{m_1 m_3}{k}$ választási lehetőséget ad, ha eltekintünk attól, hogy esetleg nem minden D_1 -beli érték fordul elő.

A pontos formulát $N_F(k)$ -ra KISS ATTILA matematikus hallgató határozta meg:

$$N_F(k) = \sum_{l=1}^k \binom{m_1}{l} m_2^l \sum_{j=0}^l \binom{(l-j)m_3}{k} \binom{l}{j} (-1)^j.$$

4.4. *Példa.* Legyen az $R(A_1, A_2, A_3, A_n)$ relációtípuson a függőségi rendszer $F=F_{A_1 \rightarrow A_2} \cap F_{A_3 \rightarrow A_4}$. Feltételezve, hogy $m_1 \ln m_1 < k$ és $m_3 \ln m_3 < k$ teljesül, az

előző példához hasonló módon

$$I_F(k) < m_1 \log_2 m_2 + m_3 \log_2 m_4 + \log_2 \binom{m_1 m_3}{k}.$$

A pontos formula $N_F(k)$ -ra szintén KISS ATTILA számítása szerint

$$N_F(k) = \sum_{l_1=0}^k \binom{m_1}{l_1} m_2^{l_1} \sum_{l_2=0}^k \binom{m_3}{l_2} \sum_{j=1}^{l_2} m_4^{l_2} \binom{l_2}{j} (-1)^{l_2-j} \sum_{i=0}^{l_1} \binom{(l_1-i)j}{k} \binom{l_1}{i} (-1)^i.$$

4.5. Példa. Legyen az $R(A_1, A_2, A_3)$ relációtípuson

$$F = F_{A_1 A_2 \rightarrow A_3} \cap F_{A_1 A_3 \rightarrow A_2} \cap F_{A_2 A_3 \rightarrow A_1}.$$

Ez a példa $N_F(k)$ meghatározásának kombinatorikus bonyolultságára mutat rá. Teljesül az alábbi

4.1. TÉTEL. $m_1 = m_2 = m_3 = n$ és $k = n^2$ esetén $N_F(k)$ megegyezik az $n \times n$ -es latinnégyzetek számával.

Bizonyítás. Jelölje L az $n \times n$ -es latinnégyzetek halmazát és legyen $l = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^n \in L$, ahol $\{l_{ij}\}_{i,j}$ mátrix minden sora és oszlopa az $(1, 2, \dots, n)$ számok egy-egy permutációja.

Feltéve, hogy $D_1 = D_2 = D_3 = \{1, 2, \dots, n\}$, az L és F halmazok elemei között az alábbi kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható meg:

$r \rightarrow l$ megfeleltetés: l_{ij} értéke legyen d , ha az (i, j, d) hármas eleme r -nek.

$l \rightarrow r$ megfeleltetés: ha l_{ij} értéke d , akkor az (i, j, d) hármas legyen eleme r -nek. A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű volta egyszerűen igazolható. (A példának egy másik érdekes szemléltetése az $n \times n \times n$ -es térbeli „sakktáblán” maximális, n^2 számú bástya elhelyezése úgy, hogy ne üssék egymást.)

5. Relációk dekomponálása és kompozíciója — vetítés és összekapcsolás

Az előző pontban bevezetett feltételes információ általában nem elegendő egy relációs adatbázis információtartalmának mérésére, hiszen ehhez a k változó eloszlására is szükségünk lenne. A reláció előfordulásának mérete a külső információs rendszer változási dinamikájától függ. A változások jellegében az a tipikus eset, hogy azok összetett — vagy a legújabban elterjedt univerzális (l. ULLMAN [3]) relációk esetén komponensekre azaz vetületekre vonatkozóan jelennek meg. Ez a gyakorlati háttér vetette fel a relációk információtartalmának dekomponálással és kompozícióval összefüggő tulajdonságainak vizsgálatát.

A relációs adatbázisok tervezésének fontos része a különféle normálformákra való transzformálás.

Ismert (l. pl. ULLMAN [3]) a 3. normál formának az a tulajdonsága, hogy csak funkcionális függőségeket megengedve minden relációséma felbontható (vetítésekkel) 3. normál formájú relációkra úgy, hogy sem tartalom, sem függőségben nem jelent ez információvesztést, azaz a vetületi relációk kompozíciója visszaadja a kiinduló relációt és a vetületeken érvényes függőségekből a kiinduló funkcionális függőségi rendszer levezethető.

Az információtartalom mennyiségi összefüggéseinek vizsgálata vezetett a fenti tulajdonságok alábbi általános megfogalmazásához.

Tekintsük az $U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ tulajdonsághalmazt, s legyenek U_1, U_2, \dots, U_k az U részhalmazai, s teljesüljön $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k = U$.

Legyenek r, r_1, r_2, \dots, r_k az $R(U), R(U_1), \dots, R(U_k)$ relációtípusok előfordulásai.

Az r_i relációt az r reláció U_i -re való vetületének nevezzük és $r_i = \Pi_{U_i}(r)$ -rel jelöljük, ha egy t sor akkor és csak akkor eleme r_i -nek, ha létezik olyan s sora r -nek, amelyre $U_i \cdot s = t$.

Az r relációt az r_1, r_2, \dots, r_k relációk természetes összekapcsolásának, vagy röviden kompozíciójának nevezzük, ha egy t sor akkor és csak akkor eleme r -nek, ha léteznek olyan $t_1 \in r_1, t_2 \in r_2, \dots, t_k \in r_k$ sorok, amelyekre $U_i \cdot t = t_i, i = 1, 2, \dots, k$. Jelölésben az $r = \sigma(r_1, r_2, \dots, r_k)$, vagy $k=2$ esetén a szokásos $r = r_1 \times r_2$ jelölést használjuk az $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ esetben $r_1 \times r_2$ -t az r_1 és r_2 direkt szorzatának nevezzük.

A most bevezetett jól ismert relációs algebrai műveletek felhasználásával relációsémák közötti műveleteket értelmezhetünk. Vegyük az

$$R(D, U, F), R_1(D_1, U_1, F_1), \dots, R_k(D_k, U_k, F_k)$$

sémákat, ahol D_{U_i} az U_i -nek megfelelő D -ben, azaz $D_{U_i} = \Pi_{U_i}(D)$.

Az R_i sémát az R séma vetületének nevezzük, és $R_i A_i = \Pi_{U_i}(R)$ -rel jelöljük, ha $r_i \in F_i$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik $r \in F$, amelyre $\Pi_{U_i}(r) = r_i$. A vetületi séma F_i függőségi rendszerét F vetületének nevezzük és $F_i = \Pi_{U_i}(F)$ -fel jelöljük.

Az R_1, R_2, \dots, R_k sémák együttesét az R séma dekompozíciójának nevezzük, és $\{R_1, \dots, R_k\} = \Pi_{\{U_1, U_2, \dots, U_k\}}(R)$ -rel jelöljük, ha a sémák aktuális r, r_1, \dots, r_k előfordulásaira mindig teljesül $r_i = \Pi_{U_i}(r), i = 1, 2, \dots, k$. Ebben az esetben az $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ relációelőfordulásokat az r relációelőfordulás dekomponáltjának nevezzük, s $\{r_1, \dots, r_k\} = \Pi_{\{U_1, \dots, U_k\}}(r)$ -rel jelöljük. A dekompozícióban szereplő $R_i(D_{U_i}, U_i, F_i)$ sémára a definíció alapján $F_i = \Pi_{U_i}(F)$ következik.

Az R sémát az R_1, R_2, \dots, R_k sémák kompozíciójának nevezzük, és $R = \sigma(R_1, R_2, \dots, R_k)$ -val jelöljük, ha a sémák aktuális r, r_1, \dots, r_k előfordulásaira teljesül $r = \sigma(r_1, \dots, r_k)$. Az $R(U, D, F)$ séma függőségi rendszerét az F_1, \dots, F_k függőségi rendszerek kompozíciójának nevezzük és $F = \sigma(F_1, \dots, F_k)$ -val jelöljük.

Az altereken adott F_1, F_2, \dots, F_k függőségi rendszerek alapján az $R(U)$ relációtípushoz egy másfajta függőségi rendszert is generálhatunk, ha F_i -t úgy tekintjük, mint az r előfordulás $\Pi_{U_i}(r)$ vetületére tett megszorítást, azaz vegyük azt az F'_i függőséget $R(U)$ -n, amire $r \in F'_i$, ha $\Pi_{U_i}(r) \in F_i$. Az így bevezetett F'_1, \dots, F'_k függőségi rendszerek metszeteként adódó F függőségi rendszert nevezzük az F_1, F_2, \dots, F_n rendszerek lezárásának, és $F = \sigma^+(F_1, \dots, F_k)$ -val jelöljük.

5.1. Megjegyzés. Annak ellenére, hogy σ^+ enyhébb megszorításnak tűnik F elemein mint σ , általában σ^+ és σ között nincs tartalmazási reláció. Ezt mutatja az alábbi példa:

5.1. Példa. Legyen $U = \{A_1, A_2, A_3\}$, $U_1 = \{A_1, A_2\}$, $U_2 = \{A_2, A_3\}$, és $F_1 = \{r_1: |\Pi_{A_2}(r_1)| = c\}$, $F_2 = \{r_2: |\Pi_{A_2}(r_2)| = c\}$, ahol $c < |D_2|$ tetszőleges egész szám. Akkor $\sigma^+(F_1, F_2) = \{r: |\Pi_{A_2}(r)| = c\}$, míg $\sigma(F_1, F_2) = F_{A_2 \rightarrow A_3} \cap \{r: |\Pi_B(r)| < c\}$, ami nyilvánvalóan mutatja, hogy egyik függőségi rendszer sem tartalmazza a másikat.

Amennyiben F_1, F_2, \dots, F_k mindegyike csak funkcionális függőségekből áll, $\sigma^+(F_1, \dots, F_k) \supseteq \sigma(F_1, \dots, F_k)$, hiszen σ^+ nem más, mint a F_i -beli funkcionális függőségek lezárásaként adódó teljes funkcionális függőségi rendszer, míg σ egyik eleme sem sérthet meg egyetlen F_i -beli funkcionális függőséget sem, gyakran tartalmaz azonban σ beágyazott többértékű függőségeket, s ilyenkor valódi tartalmazás áll fenn σ^+ és σ között.

A sémák között bevezetett kompozíció és dekompozíció műveletek információörző tulajdonságait a funkcionális és többértékű függőségre teljesen kidolgozott (l. pl. ULLMANN [3] 7. fejezet) veszteségmentes összekapcsolású és függőségörző dekompozíció mintájára vezetjük be.

A veszteségmentes összekapcsolású dekompozíció definíciója: Az $R(D, U, F)$ sémának $\Pi_{\{U_1, U_2, \dots, U_k\}}(R) = \{R_1, \dots, R_k\}$ dekompozíciója veszteségmentes összekapcsolású dekompozíció, ha minden $r \in F$ esetén $r = \sigma(\Pi_{U_1}(r), \dots, \Pi_{U_k}(r))$.

5.2. *Megjegyzés.* Az F függőségi rendszer ebben az esetben kielégíti (azaz része) az U_1, U_2, \dots, U_k tulajdonsághalmazokkal adott összekapcsolási függőséget (*join dependency*).

A függőségörző dekompozíció definíciója: Az $R(D, U, F)$ séma $\Pi_{\{U_1, \dots, U_k\}}(R)$ dekompozíciója függőségörző, ha $F = \sigma(\Pi_{U_1}(F), \dots, \Pi_{U_k}(F))$.

A dekompozíció tulajdonságainak analógiájára vezethetjük be a kompozíció hasonló tulajdonságait.

A veszteségmentes vetítésű kompozíció definíciója: Az $R(D, U, F)$ séma az $\{R_1(D_{U_1}, U_1, F_1), \dots, R_k(D_{U_k}, U_k, F_k)\}$ sémarendszernek veszteségmentes vetítésű kompozíciója, ha minden $r_1 \in F_1, \dots, r_k \in F_k$ esetén teljesül

$$r_i = \Pi_{U_i}(\sigma(r_1, \dots, r_k)), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

A függőségörző kompozíció definíciója: Az $R(D, U, F)$ séma az $\{R_1, \dots, R_k\}$ sémarendszernek függőségörző kompozíciója, ha $F_i = \Pi_{U_i}(\sigma(F_1, \dots, F_k))$, $i = 1, \dots, k$. A következőkben egy egyszerű példán mutatjuk be, hogy a fenti tulajdonságok teljesülése milyen kapcsolatban van az előző pontban bevezetett feltételes információval, hogyan függ össze a komponensek információmennyisége a kompozíció információmennyiségével.

5.2. *Példa.* Legyen $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, s tételezzük fel, hogy az $R(D, U, F)$ sémára az $A \rightarrow A_2$ és $A_3 \rightarrow A_4$ funkcionális függőségek teljesülését mindig megköveteljük, azaz $F \subseteq F_{A_1 \rightarrow A_2} \cap F_{A_3 \rightarrow A_4}$. Az R reláció felbontásában mindig szerepelnek az $R_1(D_{U_1}, U_1, F_1)$ és $R_2(D_{U_2}, U_2, F_2)$ sémák, ahol

$$U_1 = \{A_1, A_2\}, \quad U_2 = \{A_3, A_4\} \quad \text{és} \quad F_1 \subseteq F_{A_1 \rightarrow A_2}, \quad F_2 \subseteq F_{A_3 \rightarrow A_4}.$$

a) *eset.* Tételezzük fel, hogy a $\Pi_{\{U_1, U_2\}}(R)$ dekompozíció veszteségmentes összekapcsolású. Ebből azonnal következik, hogy $r \in F$ esetén $r = \Pi_{U_1}(r) \times \Pi_{U_2}(r)$, azaz r mindig két reláció direkt szorzata.

Az F függőségi rendszert nevezzük F_1 és F_2 direkt szorzatának, $F = F_1 \times F_2$. Egyszerűen látható, hogy tetszőleges F_1 és F_2 függőségeken

$$N_{F_1 \times F_2}(k) = \sum_{k_1, k_2 = k} N_{F_1}(k_1) N_{F_2}(k_2),$$

ami azt mutatja, hogy a feltételes információ additivitása ebben az esetben nem

várható. Ez arra mutat rá, hogy az $F_1 \times F_2(k)$ halmaz az adott esetben nem homogén, a homogén részhalmazait éppen az $F_1(k_1) \times F_2(k_2)$ részhalmazok alkotják.

Speciálisan, ha $F_1 = F_{A_1 \rightarrow A_2}$ és $F_2 = F_{A_3 \rightarrow A_4}$ és mindkét függőség telített elemeit nézzük, akkor

$$N_{F_1 \times F_2}(m_1 m_3) = N_{F_1}(m_1) \cdot N_{F_2}(m_3),$$

azaz

$$I_{F_1 \times F_2}(m_1 m_3) = I_{F_1}(m_1) + I_{F_2}(m_3).$$

b) eset. Tekintsük az $R_3(D_{U_3}, U_3, F_3)$ sémát, ahol $U_3 = \{A_1, A_3\}$, és $F_3 = 2^{D_{U_3}}$. Az $R(D, U, F)$ sémának $(F = F_{A_1 \rightarrow A_2} \cap F_{A_3 \rightarrow A_4})$ a $\Pi_{\{u_1, u_2, u_3\}}(R)$ dekompozíciója veszteségmentes összekapcsolású és függőségörző dekompozíció. Az R_3 reláció az a) esethez képest többletinformációt hordoz. $N_F(k)$ — ahogy ezt a 4.4. példánál láttuk, nem várható, hogy szorzatra bomlik fel.

Az a) esetnél bevezetett $F_1(k_1) \times F_2(k_2)$ részhalmazokon belül, ha $\Pi_{A_1}(r_1) = \Pi_{A_1}(r_2)$ és $\Pi_{A_3}(r_2) = \Pi_{A_3}(r_3)$, teljesül a szorzatra bomlás, azaz a feltételes információk összeadódnak. Ennek a feltételnek teljesülése $k_1 = m_1$ és $k_2 = m_3$ esetén adja a 4.4. példánál szereplő

$$I_F(k) = I_{F_1}(m_1) + I_{F_2}(m_3) + I_{F_3}(k)$$

összefüggést.

Érdekes észrevétel, hogy az R_1, R_2, R_3 sémáknak nincs jó tulajdonságú kompozíciója, hiszen ha a már használt $\Pi_{A_1}(r_1) = \Pi_{A_1}(r_3)$, $\Pi_{A_3}(r_2) = \Pi_{A_3}(r_3)$ feltételek nem teljesülnek, veszteséges a kompozíció. Az univerzális relációs modellnél — itt R lenne az univerzális reláció — ezt a problémát csak a null-értékek, vagy hiányértékek bevezetésével lehet áthidalni.

F_1, F_2 és F_3 megszorításával csak egy esetben érhető el a kompozíció veszteségmentessé és függőségörzővé tétele, ha csak telített relációkat engedünk meg, azaz $k_1 = m_1$, $k_2 = m_3$ és $|\Pi_{A_1}(r_3)| = m_1$, $|\Pi_{A_3}(r_3)| = m_3$.

c) eset. Legyen $U_4 = \{A_2, A_4\}$, s az $R_4(D_{U_4}, U_4, F_4)$ sémán $F_4 = 2^{D_{U_4}}$. Ha azt akarjuk biztosítani, hogy az R relációnak a $\Pi_{\{u_1, u_2, u_4\}}$ dekompozíciója veszteségmentes legyen, ahhoz R -en még az $A_2 \rightarrow A_4$ többértékű függőségnek is teljesülnie kell, azaz $F = F_{A_1 \rightarrow A_2} \cap F_{A_3 \rightarrow A_4} \cap F_{A_2 \rightarrow A_4}$.

Fordított irányban, ha annak feltételét keressük, hogy a $\sigma(R_1, R_2, R_4)$ kompozíció veszteségmentes legyen, akkor az r_1, r_2 és r_4 relációelőfordulások között a $\Pi_{A_2}(r_1) = \Pi_{A_2}(r_4)$ és $\Pi_{A_4}(r_2) = \Pi_{A_4}(r_4)$ feltételeknek kell teljesülnie. Ezt az F_1, F_2, F_4 függőségi rendszerekben csak úgy tudjuk egymástól függetlenül biztosítani, ha a

$$|\Pi_{A_2}(r_1)| = m_2, |\Pi_{A_2}(r_4)| = m_2, |\Pi_{A_4}(r_2)| = m_4$$

és $|\Pi_{A_4}(r_4)| = m_4$ feltételeket is megköveteljük.

Az R_1, R_2 és R_4 sémák teljesen független vetületei az R sémának az $F = \sigma(F_1, F_2, F_4)$ függőségi rendszer esetén s ekvivalensek R -rel, azaz a veszteségmentesség és függőségörzés minden irányban teljesüljön. Ebből következik, hogy az r előfordulás információtartalma megegyezik az $r_1 = \Pi_{U_1}(r)$, $r_2 = \Pi_{U_2}(r)$, $r_4 = \Pi_{U_4}(r)$ információtartalmának összegével. Ezt az additivitást azonban az $I_F(k)$ feltételes információ nem elégíti ki, hiszen k összefüggése $k_1 = |r_1|$, $k_2 = |r_2|$ és különösen $k_4 = |r_4|$ -gyel nem homogén, és igen bonyolult.

Amennyiben a feltételeket k_1 , k_2 és k_4 -re adjuk meg, használhatjuk az alábbi kompozíciós információértékeket:

$$I_{\sigma(F_1, F_2, F_4)}(k_1, k_2, k_4) = I_{F_1}(k_1) + I_{F_2}(k_2) + I_{F_4}(k_4).$$

Érdekes ezt a mennyiséget a $k_1 = m_1$, $k_2 = m_3$ és $k_4 > m_3 \ln m_3$, $k_4 > m_4 \ln m_4$ értékekre a b) esetben kapott

$$I_F(k) = I_{\sigma(F_1, F_2, F_3)}(m_1, m_2, k) = I_{F_1}(m_1) + I_{F_2}(m_2) + I_{F_3}(k)$$

értékkel összehasonlítani. Az eltérést

$$I_{F_3}(k) = \binom{m_1 m_3}{k}, \quad \text{és} \quad I_{F_4}(k_4) = \binom{m_2 m_4}{k_4}$$

különbsége okozza. Az adott feltételek mellett $m_1 > m_2$ és $m_3 > m_4$ teljesül, ezért $k_4 = k$ esetén $I_{F_3}(k) > I_{F_4}(k)$.

Az igazi különbséget azonban nem ez mutatja, hanem az, hogy $|\sigma(r_1, r_2, r_4)|$ ebben az esetben lényegesen nagyobb, mint k .

Befejezésül még egy tanulságos példát mutatunk, amely az univerzális relációk használatának problematikusságára is rámutat. A példa ULLMAN [3] 9. fejezetében, az univerzális relációk tárgyalásánál szerepel.

5.3. Példa. Tekintsük az $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ tulajdonsághalmazt, s ennek $U_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$, $U_2 = \{A_1, A_2, A_4\}$, $U_3 = \{A_1, A_3, A_5\}$ és $U_4 = \{A_2, A_3, A_6\}$ részhalmazait. Tételezzük fel, ami az univerzális relációknál kiindulási elv, hogy az $R(D, U, F)$ sémának a $\Pi_{\{U_1, U_2, U_3, U_4\}}(R)$ dekompozíciója veszteségmentes összekapcsolású. (Ez egyébként az $A_1 A_2 A_3 \rightarrow A_4$, $A_1 A_2 A_3 \rightarrow A_5$ és $A_1 A_2 A_3 \rightarrow A_6$ többértékű függőségek által meghatározott F függőségi rendszert jelenti.) Jóllehet az U_1 , U_2 , U_3 , U_4 rendszer az univerzális relációk elméletében jó tulajdonságú, pontosabban ez azt jelenti, hogy mint az U halmaz részhalmazaiából álló hipergráf aciklikus, mégsem teljesül, hogy a $\Pi_{\{U_1, U_2, U_3, U_4\}}(R)$ dekompozíció független relációkat eredményezzen. Függetlenség csak amellet az erős telítettségi feltétel mellett teljesülne, ha minden $r \in F$ esetén

$$\Pi_{A_1, A_2}(r) = D_1 \times D_2, \quad \Pi_{A_1, A_3}(r) = D_1 \times D_3 \quad \text{és} \quad \Pi_{A_2, A_3} = D_2 \times D_3$$

lenne, ami igen erős megszorítás.

A kérdés az információmérés szempontjából az, hogy mit válasszunk homogén részállapotnak az adott séma esetén. Az $R(D, U, F)$ séma előfordulásain az $F(k)$ halmazok választása nem megfelelő, ezt bizonyítani $N_F(k)$ meghatározásával lehet. Egyszerűsítsük annyival $N_F(k)$ meghatározását, hogy tételezzük fel még az $A_1 A_2 \rightarrow A_4$, $A_1 A_3 \rightarrow A_5$, és $A_2 A_3 \rightarrow A_6$ funkcionális függőségeket is. Ez azért előnyös, mert így $|r| = |\Pi_{\mathbf{u}_i}(r)|$ teljesül, és

$$N_F(k) = N_{F_1}(k) \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{N_{F_1}(k_1, k_2, k_3 | k)}{N_{F_1}(k)} m_4^{k_1} m_5^{k_2} m_6^{k_3}$$

ahol $N_{F_1}(k_1, k_2, k_3 | k) = |\{r_1 : r_1 \in F_1(k), |\Pi_{A_1 A_2}(r_1)| = k_1, |\Pi_{A_1 A_3}(r_1)| = k_2, |\Pi_{A_2 A_3}(r_1)| = k_3\}|$. Minthogy $\sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{N_{F_1}(k_1, k_2, k_3 | k)}{N_{F_1}(k)} = 1$, a *Jensen egyenlőtlenség* felhasználá-

lásával kapjuk, hogy

$$I_F(k) = I_{F_1}(k) + \log_2 \left(\sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{N_{F_1}(k_1, k_2, k_3|k)}{N_{F_1}(k)} m_4^{k_1} m_5^{k_2} m_6^{k_3} \right) > \\ > I_{F_1}(k) + \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{N_{F_1}(k_1, k_2, k_3|k)}{N_{F_1}(k)} (k_1 \log_2 m_4 + k_2 \log_2 m_5 + k_3 \log_2 m_6).$$

Ez az egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy az állandó $I_F(k)$ hosszúságú kód helyett egy változó hosszúságú kódolást választva átlagban rövidebb kódot kapunk, ami bizonyítja, hogy az $F(k)$ halmaz nem tekinthető homogénnek. Az egyenlőtlenség bal oldalának megfelelő kódhossz az alábbi kódolási eljárással érhető el.

Külön kódoljuk a $\Pi_{U_1}(r)=r$, $\Pi_{U_2}(r)=r_2$, $\Pi_{U_3}(r)=r_3$ és $\Pi_{U_4}(r)=r_4$ vetületi relációkat, de kihasználjuk az r_1 -ben r_2 , r_3 és r_4 -re vonatkozó információt. r_1 -et az $F_1(k)$ halmazon egyenletes eloszlásnak megfelelő $I_{F_1}(k)$ hosszú kóddal adjuk meg. Míthogy r_1 egyértelműen meghatározza k_1 -et és a $D_1 \times D_2$ halmazból választott k_1 számú pontot, elegendő csak az egyes pontokhoz választott D_4 -beli értékeket kódolni $\log_2 m_4$ hosszú kódokkal, s így r_2 egyértelműen kódolható $k_1 \log_2 m_4$ hosszú kóddal. Hasonlóan járhatunk el r_3 és r_4 kódolásánál.

Ez a kódolási eljárás közel áll ahhoz, mintha az $F_1(k)$, $F_2(k_1)$, $F_3(k_2)$ és $F_4(k_3)$ halmazokat választottuk volna homogén részhalmazoknak. Ezek a halmazok az egymástól függetlenül végzett $I_{F_1}(k)$, $I_{F_2}(k_1)$, $I_{F_3}(k_2)$ és $I_{F_4}(k_3)$ hosszú kódolás együttesen hosszabb kódot ad, mint az előző kódolási eljárás. Ennek az az oka, hogy az r_1 , r_2 , r_3 és r_4 relációelőfordulások nem függetlenek egymástól. Egymásra vonatkozó információkat r_1 teljes egészében tartalmazza, s ezt használtuk ki az előző kódolásnál.

Amennyiben az r_1 , r_2 , r_3 és r_4 relációelőfordulásokat egymástól függetlenül kódoljuk, s nem követeljük meg r létezését, amire $r_i = \Pi_{U_i}(r)$ teljesül, akkor az $r_1 \times r_2 \times r_3 \times r_4$ direkt szorzat formában előállított univerzális relációval ekvivalens információt adtunk meg. Az így választott redundáns kódolás, ami az általában használt kód relációs adatbáziskezelő rendszereknél, a következő modellhez vezet.

Tekintsük az $U' = \{A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A_4, A'_1, A'_3, A_5, A'_2, A'_3, A_6\}$ tulajdonsághalmazt, s ennek az $U'_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$, $U'_2 = \{A'_1, A'_2, A_4\}$, $U'_3 = \{A'_1, A'_3, A_5\}$, $U'_4 = \{A'_2, A'_3, A_6\}$ részhalmazait.

Az $R'(D', U', F')$ séma F' függőségi rendszere legyen a $\Pi_{\{u'_1, u'_2, u'_3, u'_4\}}$ dekompozícióra nézve veszteségmentes összekapcsolású, azaz $r' \in F'$, ha

$$r' = \Pi_{U'_1}(r') \times \Pi_{U'_2}(r') \times \Pi_{U'_3}(r') \times \Pi_{U'_4}(r').$$

Az r' relációelőfordulásból megkaphatjuk az R relációséma r előfordulását, ha az $r' \cap \varrho$ relációt vetítjük az $\{U\}$ tulajdonságokra, ahol ϱ a következő konstans reláció: $t \in \varrho$ akkor és csak akkor, ha $A_1 \cdot t = A'_1 \cdot t = A''_1 \cdot t$, $A_2 \cdot t = A'_2 \cdot t = A''_2 \cdot t$ és $A_3 \cdot t = A'_3 \cdot t = A''_3 \cdot t$. Jelöljük F'' -vel azt a függőségi rendszert, amelyet úgy kapunk F' -ből, hogy minden elemét elmetszük a konstans ϱ relációval. Az így megadott $R''(D', U', F'')$ séma ekvivalens az $R(D, U, F)$ sémával. Az F'' és F' közötti kapcsolat mintájára más konstans relációk is bevezethetők, s további függőségi rendszereket kaphatunk.

Ezt a módszert általános modellezési elvként is megfogalmazhatjuk. Tekintsük az O_1, O_2, \dots, O_n kiindulási objektumhalmazokat. Reprezentáljuk mindegyiket egy-

egy relációsémával, az $R_i(D_i, U_i, F_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ sémákkal, ahol az U_i halmazok diszjunkt tulajdonsághalmazok. Univerzális objektumhalmaznak az $O=O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$ direkt szorzatot tekintjük, amit az $R=R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ direkt szorzattal reprezentálhatunk. Amennyiben O részhalmazát, azaz az O_1, O_2, \dots, O_n halmazok elemei között egy relációt kívánunk megadni, használhatjuk az előző módszert, ha létezik olyan P függvény, amely megadja, hogy egy objektum n -es hozzátartozik-e a részhalmazhoz vagy sem. Ilyen függvényt könnyen megadhatunk, ha a kapcsolatot tulajdonságértékek megegyezése jelenti. Ez az eset áll fenn az univerzális relációknál, ahol a tulajdonságérték egyezést az azonos tulajdonságnév használata adja meg. Az azonos tulajdonságnevek használata különböző objektumok között egyszerűbbé teszi a lekérdező nyelvet, amellyel az objektumosztályokat reprezentáló relációk direkt szorzata helyett természetes összekapcsolásokon adhatunk meg kérdéseket. Ennek ára azonban egy igen merev séma, amely nem engedi meg az objektumosztályok önálló kezelését, különböző null-értékek bevezetésére kényyszerül, s tárolási kódja általában mégis a direkt szorzat komponenseinek tárolását jelenti.

IRODALOM

- [1] BENCZÚR, A., "Problems in modelling of data base performance", "Перспективы развития вычислительной техники 1983", 85—98. Warszawa, 1983, Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- [2] DEMETROVICS, J., DENEV, J. és PAVLOV, R., *A számítástudomány matematikai alapjai* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1985).
- [3] ULLMAN, J. D., *Principles of Database Systems* (Computer Science Press, Rockville, 1982).
- [4] SZTOGNIJ, A. A., PASZICSNYIK, V. V., "Реляционные модели баз данных". Институт Кибернетики, А. Н. УССР им. в.м Глушкова, Kiev, 1983.
- [5] NAMBIAR, K. K., "Some analytic tools for the design of relational data base systems", Proc of the 6-th Int. Conf. on VLDB, 1980, 417—428.

(Beérkezett: 1986. május 6.)

BENCZUR ANDRÁS
ELTE SZÁMÍTÓKÖZPONT
1117 BUDAPEST, BOGDÁNFY ÚT 10/B.

INFORMATION MEASUREMENT IN RELATIONAL DATABASES

A. BENCZÚR

There is given a draft model for performance evaluation of database systems. The starting point of the model is how to measure the information stored in a database. Some solutions and problems are stated and investigated for relational databases.

A SZEPARÁCIÓS ELV ALKALMAZÁSA LINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁSI FELADATBAN SZÍNES ZAJ ESETÉN

KISS ATTILA

Budapest

A cikk a szeparációs elv alkalmazhatóságát bizonyítja az időben folytonos lineáris esetben, a szokásostól eltérően nem fehér, hanem színes zajjal torzított megfigyelés esetén. Speciális esetként a skalár autonóm esetre adódó eredményt is felírjuk explicit alakban, és végül a feladat személyi számítógépen történő programozhatóságáról is szó esik.

1. Bevezetés

A Wonham-féle szeparációs tétel [lásd pl. [3] 188. old.] a

$$(1.1) \quad dx = Ax dt + Bu dt + GdW,$$

$$(1.2) \quad dy = Hx dt + R dV,$$

$$(1.3) \quad J(u) = E \left(\int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt + \Psi[x(T)] \right)$$

típusú rendszer esetén adja meg az optimális irányítás alakját, ahol y a megfigyelés, u az irányítás és $J(u)$ az átlagos költség függvény. Az $x=x(t)$, $y=y(t)$, $u=u(t)$ folyamatok vektorfolyamatokat, A , B , G , H , R mátrixokat jelölnek (általában az időtől, t -től, függenek). Az $L(t, x, u)$ nemnegatív valós, a $\Psi(x)$ valós függvény. A $W=W(t)$, $V=V(t)$ független Wiener-folyamatokat jelölnek, melyek ugyanahhoz a növekvő, F_t , σ -algebrához adaptáltak.

Természetesen felvetődő kérdés, hogy más típusú megfigyelés esetén lehet-e bizonyítani hasonló jellegű tételt. Be fogjuk látni, hogy ha $x(t)$ (1.1)-gyel adott, és C , N , R valós mátrixok, akkor az

$$(1.4) \quad y = Cx + z,$$

$$(1.5) \quad dz = Nz dt + R dV$$

alakú megfigyelés esetén is használhatjuk a szeparációs elvet az optimális irányítás meghatározására. Ez azt jelenti, hogy először Kálmán-szűréssel meghatározzuk az $\hat{x}(t)$ optimális becslést, majd az erre felírható rendszert optimálisan szabályozzuk. A szeparációs tétel korábbi bizonyításától való eltérést az okozza, hogy az Itô-formula alkalmazása után y -ra olyan sztochasztikus differenciálegyenletet kapunk, amely nemcsak x -től, hanem y -től, és W -től is függ. A (1.4), (1.5) összefüggések

mutatják, hogy az additív zaj nem fehér zaj, ami természetes feltétel a gyakorlatban. Ezzel a problémával foglalkozott, más megközelítésben, BALAKRISHNAN több cikkében (lásd pl. [5]). A bizonyítás lépéseit lemmákban foglaljuk össze, és a kapott eredményt a 2. rész végén egy tételben összegezzük.

2. A szeparációs elv alkalmazása színes zaj esetén

Tekintsük az (1.1), (1.4), (1.5) egyenletrendszert. Alakítsuk át a megfigyelést differenciálegyenletté az *Itô-formula* felhasználásával:

$$(2.1) \quad dy = \dot{C}x dt + C dx + dz = \\ = \dot{C}x dt + C[Ax dt + Bu dt + G dW] + N[y - Cx]dt + R dV,$$

ahol \dot{C} -tal azt a mátrixot jelöltük, melynek elemei a C mátrix elemeinek t -szerinti deriválásával adódnak. Bevezetve a $H = \dot{C} + CA - NC$ jelölést a következő, (1.1), (1.4), (1.5)-tel ekvivalens rendszert kapjuk:

$$(2.2) \quad dx = Ax dt + Bu dt + G dW, \\ dy = Hx dt + Ny dt + CBu dt + CG dW + R dV.$$

Ezután mindig fel fogjuk tenni, hogy az (1.1), (2.2)-ben szereplő mátrixok korlátosak a $[0, T]$ -ben.

Tekintsük a következő 2 rendszert:

$$(2.3) \quad dx_0 = Ax_0 dt + G dW, \quad x_0(0) = x(0),$$

$$(2.4) \quad dy_0 = Hx_0 dt + CG dW + R dV, \quad y_0(0) = 0;$$

$$(2.5) \quad dx_+ = Ax_+ dt + Bu dt, \quad x_+(0) = 0,$$

$$(2.6) \quad dy_+ = Hx_+ dt + Ny dt + CBu dt, \quad y_+(0) = y(0),$$

ahol y az eredeti rendszer megfigyelt folyamata. Vegyük észre, hogy ekkor

$$(2.7) \quad x = x_0 + x_+,$$

$$(2.8) \quad y = y_0 + y_+.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(2.9) \quad G_t^0 = \sigma(y_0(r), r \leq t),$$

$$(2.10) \quad G_t^u = \sigma(y(r), r \leq t),$$

$$(2.11) \quad \hat{x}_0(t) = E(x_0(t)|G_t^0),$$

$$(2.12) \quad \hat{x}(t) = E(x(t)|G_t^u),$$

ahol $\sigma(\cdot)$ a generált σ -algebrát, $E(\cdot|\cdot)$ a feltételes várható értéket jelöli.

Ezen jelölések mellett érvényes a következő lemma:

2.1. LEMMA. Ha az $u(t)$ G_t^0 -mérhető és $G_t^0 = G_t^u$, akkor

a) a $P(x(t)|G_t^u)$ feltételes eloszlás *Gauss eloszlás*,

$$(2.13) \quad \hat{x}(t) = \hat{x}_0(t) + x_+(t),$$

és az $x(t) - \hat{x}(t)$ folyamat kovariancia mátrix a következő *Riccati differenciálegyenletnek* a szimmetrikus, pozitív definit megoldása:

$$(2.14) \quad \dot{P} = AP + PA' - [GG'C' + PH'](CGG'C' + RR')^{-1}[GG'C' + PH']' + GG',$$

a

$$(2.15) \quad P(0) = \text{cov } x(0)$$

kezdeti feltétellel. (G' a G mátrix transzponáltját, $\text{cov } x(0)$ az $x(0)$ vektor kovariancia mátrixát jelöli.)

b) Az $\hat{x}(t)$ folyamat kielégíti az alábbi sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$(2.16) \quad d\hat{x} = [A\hat{x} + Bu]dt + F[dy_0 - H\hat{x}_0 dt],$$

$$(2.17) \quad \hat{x}(0) = Ex(0),$$

ahol

$$(2.18) \quad F = [GG'C' + PH'] [CGG'C' + RR']^{-1},$$

továbbá

$$(2.19) \quad dy_0 - H\hat{x}_0 dt = (B \circ B)^{\frac{1}{2}} d\tilde{W},$$

ahol \tilde{W} Wiener-folyamat és

$$(2.20) \quad (B \circ B) = [CGG'C' + RR'].$$

Bizonyítás. Feltételes várható értéket véve (2.7)-ben kapjuk, hogy

$$(2.21) \quad \hat{x}(t) = \hat{x}_0(t) + E(x_+(t)|G_t^u),$$

így (2.13) belátásához elég megmutatni, hogy az $x_+(t)$ G_t^u -mérhető. Írjuk fel az $x_+(t)$ explicit alakját (2.5)-ből, a lineáris egyenletekre vonatkozó jól ismert megoldó formula alapján:

$$(2.22) \quad x_+(t) = \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\sigma) B(\sigma) u(\sigma) d\sigma,$$

ahol $\Phi(t)$ a

$$(2.23) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

homogén egyenlet fundamentális megoldása. (2.22)-ből látszik, hogy $u(t)$ mérhetősége az $x_+(t)$ mérhetőségét is maga után vonja. Másrészt (2.7), (2.13) miatt $x - \hat{x} = x_0 - \hat{x}_0$, így $\text{cov}(x - \hat{x}) = \text{cov}(x_0 - \hat{x}_0)$. A $\text{cov}(x - \hat{x}_0)$ viszont a *Kálmán-szűrési tétel* szerint (lásd [2] 425. old.) kielégíti a (2.14) differenciálegyenletet a (2.15) kezdeti

feltétellel, és \hat{x}_0 -ra az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet írható fel:

$$(2.24) \quad d\hat{x}_0 = A\hat{x}_0 dt + F[dy_0 - H\hat{x}_0 dt],$$

$$(2.25) \quad \hat{x}_0(0) = Ex(0).$$

Végezetül összeadva a (2.5) és (2.24) egyenleteket, kihasználva a már bizonyított (2.13) összefüggést, \hat{x} -ra a (2.16) differenciálegyenletet nyerjük, a (2.17) kezdeti feltétellel.

Vegyük észre, hogy a 2.1. lemma feltételei mellett, (2.8) miatt $y_+(t)$ is $G_t^u = G_t^0$ -mérhető.

Hajtsuk végre a következő átalakítást:

$$(2.26) \quad dy_0 - H\hat{x}_0 dt = d(y - y_+) - H(\hat{x} - x_+) dt = dy - (H\hat{x} + Ny + CBu) dt.$$

Az $\hat{x}(t)$ folyamatra felírt (2.16) sztochasztikus differenciálegyenletet az alábbi alakra hozhatjuk:

$$(2.27) \quad d\hat{x} = [A\hat{x} + Bu] dt + F[dy - (H\hat{x} + Ny + CBu) dt].$$

A (2.16), (2.19)-ből pedig a következőt nyerjük:

$$(2.28) \quad d\hat{x} = [A\hat{x} + Bu] dt + F[B \circ B]^{\frac{1}{2}} d\tilde{W}.$$

A (2.28) (2.17) rendszerhez olyan $\hat{L}, \hat{\Psi}$ költségfüggvényeket rendelünk, hogy a 2.1. lemmában szereplő $u(t)$ irányításokra az átlagos költség megegyezzen az eredeti rendszer átlagos költségével. Legyen tehát

$$(2.29) \quad \hat{L}(t, \hat{x}, u) = \int_{R^n} L(t, x, u) g(t, x - \hat{x}) dx,$$

$$(2.30) \quad \hat{\Psi}(\hat{x}) = \int_{R^n} \Psi(x) g(T, x - \hat{x}) dx,$$

$$(2.31) \quad \hat{J}(u) = E \left(\int_0^T \hat{L}(t, \hat{x}(t), u(t)) dt + \hat{\Psi}[\hat{x}(T)] \right),$$

ahol

$$(2.32) \quad g(t, x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det P(t))^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} x' P(t)^{-1} x \right],$$

$P(t)$ mátrix a (2.14), (2.15) szimmetrikus, pozitív definit megoldása, n az $x(t)$ állapotvektor dimenziója, $\det P(t)$ pedig a $P(t)$ mátrix determinánsát jelöli.

2.2. LEMMA. Ha az $u(t)G_t^0$ -mérhető és $G_t^0 = G_t^u$, akkor $J(u) = \hat{J}(u)$.

Bizonyítás. A 2.1. lemmából, az $u(t)$ mérhetőségéből és (2.29)-ből következik, hogy 1 valószínűséggel teljesül az

$$(2.33) \quad E(L(t, x(t), u(t)) | G_t^0) = \hat{L}(t, \hat{x}(t), u(t))$$

egyenlőség. Emiatt

$$(2.34) \quad E \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt = E \int_0^T E(L | G_t^0) dt = E \int_0^T \hat{L} dt,$$

és hasonlóan

$$(2.35) \quad E\Psi(x(T)) = E\hat{\Psi}(\hat{x}(T)).$$

2.3. LEMMA. Jelölje \mathcal{C}^k a $[0, T]$ zárt intervallumból R^k -ba képező folytonos függvények halmazát. Legyen $\Phi: \mathcal{C}^k \rightarrow \mathcal{C}^k$ folytonos operátor. Ekkor minden \mathcal{C}^k -beli $h(t)$ függvény esetén a

$$(2.36) \quad g(t) = h(t) + \int_0^t (\Phi g)(r) dr$$

egyenletnek egyértelműen létezik megoldása a \mathcal{C}^k halmazban.

Továbbá $g_0 \equiv 0$ esetén a

$$(2.37) \quad g_{l+1}(t) = h(t) + \int_0^t (\Phi g_l)(r) dr, \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

iteráció szuprémum normában konvergál a (2.36) egyenlet megoldásához.

A bizonyítás megtalálható pl. a [3] 191. oldalán. Jelöljük U -val azt a véges dimenziós halmazt, amelyből az irányítások felveszik az értékeiket.

Legyen Γ azoknak a γ funkcionáloknak a halmaza, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

(2.38) a) $[0, T] \times \mathcal{C}^k \rightarrow U$ alakú Borel-mérhető funkcionál,

(2.39) b) a $\gamma(t, 0)$ függvény korlátos,

(2.40) c) létezik olyan K_γ konstans, hogy minden \mathcal{C}^k -beli g, h függvény esetén

$$\|\gamma(t, g) - \gamma(t, h)\|_1 \leq K_\gamma \|g - h\|_2$$

ahol $\|\cdot\|_1$ a $[0, 1]$ U alakú függvényeken értelmezett szuprémum norma, míg $\|\cdot\|_2$ a \mathcal{C}^k téren értelmezett szuprémum norma,

(2.41) d) ha $g(r) = h(r)$ teljesül minden olyan r -re, amelyre $0 \leq r \leq t$, akkor $\gamma(t, g) = \gamma(t, h)$ is teljesül.

2.4. LEMMA. Ha $u(t) = \gamma(t, y)$ valamely Γ -beli γ -ra, ahol $y = y(t)$ az (1.4)-ben megadott megfigyelt folyamat, és $y(0)$ G_t^0 -mérhető, akkor

(2.42) a) az $u(t)$ folyamat G_t^u -mérhető,

(2.43) b) $G_t^u = G_t^0$.

Bizonyítás. (2.10) miatt $y(r)$ G_t^u -mérhető, ha $r \leq t$.

Legyen

$$(2.44) \quad y_t(r) = \begin{cases} y(r), & r \leq t, \\ y(t), & r > t. \end{cases}$$

Ekkor $y_t(r)$ G_t^u -mérhető. (2.38) és (2.41) miatt

$$(2.45) \quad u(t) = \gamma(t, y) = \gamma(t, y_t),$$

vagyis ezzel beláttuk a (2.42)-t. (2.43) igazolásához először a

$$(2.46) \quad G_t^0 \subset G_t^u$$

tartalmazást bizonyítjuk. Legyen Φ a (2.23) egyenlet fundamentális megoldása. (2.22) és (2.6) összevetésével kapjuk, hogy

$$(2.47) \quad y_+(t) = y(0) + \int_0^t H(\tau) \left[\int_0^\tau \Phi(\tau) \Phi^{-1}(\sigma) B(\sigma) u(\sigma) d\sigma \right] + \\ + N(\tau) y(\tau) + C(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Ha $\sigma, \tau \leq t$, akkor $u(\sigma)$ és $y(\tau)$ G_t^u -mérhető, tehát (2.47) miatt $y_+(t)$ is G_t^u -mérhető, de akkor (2.8) miatt $y_0(r)$ is G_t^u -mérhető, ha $r \leq t$. Így a (2.9) felírásból (2.46) következik. A másik irányú tartalmazáshoz definiáljunk egy $\xi: \mathcal{C}^k \rightarrow \mathcal{C}^k$ operátort az alábbi módon:

$$(2.48) \quad (\xi g)(t) = H(t) \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\sigma) B(\sigma) \gamma(\sigma, g) d\sigma + \\ + C(t) B(t) \gamma(t, g) + N(t) g(t).$$

Felhasználva a (2.40) becslést és a (2.48)-ban szereplő mátrixok korlátosságát könnyen igazolható a ξ operátor folytonossága. Vegyük észre, hogy (2.8), (2.47) miatt az $y(t)$ a következő integrálegyenlet megoldása:

$$(2.49) \quad y(t) = y_0(t) + y(0) + \int_0^t (\xi y)(\tau) d\tau.$$

Definiáljuk az alábbi iterációt:

$$(2.50) \quad y^{(0)} \equiv 0 \\ y^{(l+1)}(t) = y_0(t) + y(0) + \int_0^t (\xi y^{(l)})(\tau) d\tau, \quad (l = 0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor 2.3. lemma szerint az $y^{(l)}$ tart az $y(t)$ -hez ($l \rightarrow \infty$), $\|\cdot\|_2$ normában, minden rögzített ω esetén. A feltételünk szerint $y(0)$ G_t^0 -mérhető, így (2.50) és (2.9)-ből rekurzívan adódik, hogy $y^{(l+1)}$ is G_t^0 -mérhető. A normalitást figyelembe véve és az $y^{(l)}(t) - y(t) \xrightarrow{2(l \rightarrow \infty)} 0$ konvergenciát, azt kapjuk, hogy $y(t)$ is G_t^0 -mérhető, ami (2.10) miatt a $G_t^u \subset G_t^0$ tartalmazást jelenti.

Jelöljük \mathfrak{U} -val a következő tulajdonságú irányítások halmazát:

$$(2.51) \quad u: [0, T] \rightarrow U,$$

$$(2.52) \quad u(t) = \gamma(t, y) \text{ valamely } \Gamma\text{-beli } \gamma\text{-ra,}$$

$$(2.53) \quad E \int_0^T |u(t)|^k dt < \infty, \text{ minden } k=0, 1, \dots \text{ esetén,}$$

$$(2.54) \quad u(t) \text{ az } F_t\text{-hez adaptált,}$$

$$(2.55) \quad \text{létezzen erős megoldása az (1.1), (2.2) rendszernek,}$$

Az \mathfrak{U} halmaz elemeit megengedett irányításoknak hívjuk. Az (1.1), (2.2) rendszerhez tartozó optimalizálási feladat a következő:

$$(2.56) \quad J(u) \rightarrow \min_{\mathfrak{U}},$$

ahol $J(u)$ a (1.3)-mal van definiálva.

Vegyük észre, hogy ha $y(0)$ G_t^0 -mérhető, akkor tetszőleges megengedett irányítás esetén a 2.4. lemma biztosítja a 2.2. lemma feltételeit. Tehát $u \in \mathfrak{U}$ esetén $J(u) = \hat{J}(u)$, ahol $\hat{J}(u)$ a (2.31) képlettel van megadva. Ebből következik, hogy az (1.1), (2.2), (2.56)-tal adott részleges megfigyelésű optimalizálási feladat helyett tekintethetjük a (2.17), (2.28) teljesen megfigyelhető rendszert a

$$(2.57) \quad \hat{J}(u) \rightarrow \min_{\mathfrak{B}}$$

optimalizálási feladattal, ahol \mathfrak{B} a (2.51), (2.53), (2.54) tulajdonságú irányítások halmaza. Mivel $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$, ezért ha a (2.57) feladatot olyan $u(t)$ irányítás minimalizálja, amely \mathfrak{U} -nak is eleme, akkor a $J(u) = \hat{J}(u)$ egyenlőség miatt ez az $u(t)$ optimális irányítás az (1.1), (2.2), (2.56) feladathoz is (feltéve az $y(0)$ G_t^0 -mérhetőségét). Közismert tény, hogy egy teljesen megfigyelhető rendszerhez az optimális irányítást explicit módon meg tudjuk adni, ha a költségfüggvény kvadratikus. (Lásd pl. [4] 221—222. old.) Azt fogjuk belátni, hogy ha (1.3)-ban L és Ψ kvadratikus forma, akkor a (2.17), (2.28) teljesen megfigyelhető rendszerhez ugyanezt a kvadratikus költségfüggvényt választhatjuk, mert az ehhez kiszámolt optimális irányítás a (2.57) feladatot is optimalizálja. Sőt az optimális irányítás explicit alakjából az is könnyen kiolvasható lesz, hogy az irányítás \mathfrak{U} -ban is benne van, tehát az eredeti (1.1), (2.2), (2.56) feladatnak is optimális megoldása.

Legyen tehát C_1 , D_1 , F_1 szimmetrikus, pozitív mátrix és legyen

$$(2.58) \quad J(u) = E \left(\int_0^T [x'(r) C_1(r) x(r) + u(r)' D_1(r) u(r)] dr + x(T)' F_1(T) x(T) \right),$$

ahol $x = x(r)$ az (1.1), (2.2) rendszer u irányításához tartozó megoldása, melyet oszlopvektornak képzelünk. (x' az x vektor transzponáltját jelöli.) Határozzuk meg a $\hat{J}(u)$ függvényt a (2.29), (2.30), (2.31) definíciók alapján.

$$(2.59) \quad \begin{aligned} \hat{L}(t, \hat{x}, u) &= \int_{R^n} (x' C_1 x + u' D_1 u) g(t, x - \hat{x}) dx = \\ &= \int_{R^n} (\tilde{x} + \hat{x})' C_1 (\tilde{x} + \hat{x}) g(t, \tilde{x}) d\tilde{x} + u' D_1 u, \end{aligned}$$

ahol az $\tilde{x} = x - \hat{x}$ jelölést alkalmaztuk.

Az

$$(2.60) \quad 1 = \int_{R^n} g(t, \tilde{x}) d\tilde{x},$$

$$(2.61) \quad 0 = \int_{R^n} \tilde{x} g(t, \tilde{x}) d\tilde{x},$$

és az

$$(2.62) \quad (\tilde{x} + \hat{x})' C_1 (\tilde{x} + \hat{x}) = \tilde{x}' C_1 \tilde{x} + \tilde{x}' C_1 \hat{x} + \hat{x}' C_1 \tilde{x} + \hat{x}' C_1 \hat{x}$$

azonosságok felhasználásával kapjuk, hogy

$$(2.63) \quad \hat{L}(t, \hat{x}, u) + \hat{x}' C_1 \hat{x} + u' D_1 u + \int_{R^n} \tilde{x}' C_1 \tilde{x} g(t, \tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Hasonlóan számolással adódik, hogy

$$(2.64) \quad \hat{\Psi}(\hat{x}) = \hat{x}' F_1(T) \hat{x} + \int_{R^n} \tilde{x}' F_1(T) \tilde{x} g(T, \tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Tehát

$$(2.65) \quad \hat{J}(u) = E \left(\int_0^T (\hat{x}(t)' C_1(t) \hat{x}(t) + u'(t) D_1(t) u(t)) dt + \right. \\ \left. + \hat{x}(T)' F_1(T) \hat{x}(T) \right) + Z,$$

ahol

$$(2.66) \quad Z = E \left(\int_0^T \tilde{x}(t)' C_1(t) \tilde{x}(t) dt + \tilde{x}(T)' F_1(T) \tilde{x}(T) \right),$$

és az $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ jelöléseket használtuk. Vegyük észre, hogy 2.1. lemma szerint az $\tilde{x}(t)$ változó az irányítástól független, 0 várható értékű, $P(t)$ szórású normális eloszlású változó, ahol $P(t)$ a (2.14) *Riccati differenciálegyenlet* szimmetrikus, pozitív definit megoldása a (2.15) kezdeti feltétel mellett. Következésképpen Z független az $u(t)$ irányítástól.

Legyen

$$(2.67) \quad \hat{\hat{J}}(u) = E \left(\int_0^T (\hat{x}'(t) C_1(t) \hat{x}(t) + U'(t) D_1(t) u(t)) dt + \hat{x}(T)' F_1(T) \hat{x}(T) \right),$$

és tekintsük a

$$(2.68) \quad \hat{\hat{J}}(u) \rightarrow \min_u$$

optimalizálási feladatot. Ekkor a (2.17), (2.28), (2.68) feladathoz talált optimális $u^*(t)$ irányítás a (2.17), (2.28), (2.57) feladatnak is optimális megoldása lesz. Mivel (2.67)-ben a költségfüggvény kvadratikus, ezért az $u^*(t)$ irányítást explicit módon meg tudjuk adni:

$$(2.69) \quad u^*(t) = G_1(t) \hat{x}(t),$$

ahol

$$(2.70) \quad G_1(t) = -D_1^{-1}(t) B(t)' K(t),$$

és $K(t)$ mátrixfüggvény a (2.71) *Riccati differenciálegyenlet* szimmetrikus, pozitív definit megoldása a (2.72) végfeltétel mellett.

$$(2.71) \quad \dot{K} = -A'K - KA + KBD_1^{-1}B'K - C_1,$$

$$(2.72) \quad K(T) = F_1(T).$$

Ahhoz, hogy az $u^*(t)$ az eredeti (1.1), (2.2), (2.56) feladatnak is optimális megoldása legyen, elég azt megmutatni, hogy $u^*(t) \in \mathcal{U}$.

Definiáljuk γ_{G_1} -et az alábbi módon:

$$(2.73) \quad \gamma_{G_1}(t, y) = G_1(t) \hat{x}(t),$$

ahol $y=y(t)$ a megfigyelt folyamat, $\hat{x}(t)$ pedig a (2.17), (2.28) rendszernek a (2.69)-ben megadott $u^*(t)$ optimális irányításhoz tartozó megoldása. Tegyük még fel azt is, hogy $G_1(t)$ a $[0, T]$ intervallumban folytonosan deriválható. Azt fogjuk belátni, hogy $\gamma_{G_1}(\cdot, \cdot) \in \Gamma$, amiből következik, hogy $u^*(t) \in \mathfrak{U}$. Írjuk be a (2.27) sztochasztikus differenciálegyenletbe az $u^*(t)$ (2.69)-ben felírt alakját. Az összevonások után kapjuk, hogy

$$(2.74) \quad d\hat{x} = (A - FH + BG_1 - FCBG_1)\hat{x} dt - FNy dt + F dy.$$

Jelöljük Φ_{G_1} -gyel a

$$(2.75) \quad \frac{dx}{dt} = (A - FH + BG_1 - FCBG_1)x$$

homogén egyenlet fundamentális megoldását.

A lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek elméletéből ismert, (lásd pl. [4] 146. oldalát), hogy a lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek megoldása kifejezhető a fundamentális megoldás segítségével. Ezt alkalmazva a következő formulát nyerjük:

$$(2.76) \quad \begin{aligned} \hat{x}(t) = & \Phi_{G_1}(t) Ex(0) - \int_0^t \Phi_{G_1}(t) \Phi_{G_1}^{-1}(r) F(r) N(r) y(r) dr + \\ & + \int_0^t \Phi_{G_1}(t) \Phi_{G_1}^{-1}(r) F(r) dy(r). \end{aligned}$$

Ezt összevetve (2.73)-mal a $\gamma_{G_1}(t, g)$ funkcionál alábbi alakját kapjuk:

$$(2.77) \quad \gamma_{G_1}(t, g) = G_1(t) \left(\Phi_{G_1}(t) Ex(0) - \int_0^t \Phi_{G_1}(t) \Phi_{G_1}^{-1}(r) F(r) N(r) g(r) dr + \right. \\ \left. + \int_0^t \Phi_{G_1}(t) \Phi_{G_1}^{-1}(r) F(r) dg(r) \right).$$

(2.77)-ben parciálisan integrálva a következő kifejezéshez jutunk:

$$(2.78) \quad \gamma_{G_1}(t, g) = G_1(t) \left(\Phi_{G_1}(t) Ex(0) - \int_0^t \Phi_{G_1}(t) \Phi_{G_1}^{-1}(r) F(r) N(r) g(r) dr + \right. \\ \left. + [\Phi_{G_1}(t) \Phi_{G_1}^{-1}(r) F(r) g(r)]_{r=0}^t - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial r} [\Phi_{G_1}(t) \Phi_{G_1}(r) F(r)] \right) g(r) dr \right).$$

Tegyük fel, hogy (1.1), (2.2)-ben szereplő összes mátrix normanégyszete integrálható a $[0, T]$ intervallumon. (Ez különben is szükséges ahhoz, hogy az (1.1), (2.2) rendszer megoldásáról beszélhessünk.) Ezek után könnyen igazolható, hogy $\gamma_{G_1}(\cdot, \cdot)$ funkcionál kielégíti a (2.38)–(2.41) feltételeket, vagyis $\gamma_{G_1} \in \Gamma$, ami viszont maga után vonja, hogy $u^*(t) \in \mathfrak{U}$.

Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze.

2.1. TÉTEL. Legyen adott az (1.1), (1.4), (1.5) rendszer, ahol a $V=V(t)$ és $W=W(t)$ olyan független *Wiener-folyamatokat* jelölnek, melyek ugyanahhoz a növekvő F_t σ -algebrához adaptáltak. Tegyük fel, hogy az (1.1), (2.2)-ben szereplő összes mátrix normanégyzete integrálható a $[0, T]$ intervallumon. Tegyük fel továbbá, hogy a $C(t)G(t)G(t)'C(t)'+R(t)R(t)'$ mátrix invertálható minden $[0, T]$ -beli t pontban, és a normanégyzete integrálható a $[0, T]$ intervallumon. Tekintsük a (2.58)-ban megadott átlagos költséget, és az (2.51)–(2.55) feltételekkel meghatározott megengedett irányítások \mathfrak{U} halmazát. Tegyük még fel, hogy $y(0)$ G_1^0 -mérhető, és a (2.70)-ben definiált $G_1(t)$ függvény folytonosan differenciálható a $[0, T]$ intervallumban. Ekkor az (1.1), (1.4), (1.5), (2.56) optimalizálási feladatnak az $u^*(t)$ megoldása a (2.69) kifejezéssel adható meg, amelyben az együtthatót a (2.70)–(2.72) formulák határozzák meg. Továbbá a (2.12)-ben definiált $\hat{x}(t)$ folyamat a (2.27) sztochasztikus differenciálegyenletnek a megoldása a (2.17) kezdeti feltétellel, ($u(t)=u^*(t)$ helyettesítéssel), amelyhez az együtthatókat a (2.14), (2.15), (2.18) egyenletekből határozhatjuk meg.

3. A skalár autonóm eset

Ha az (1.1), (1.4), (1.5), (2.58)-ban szereplő összes mátrix t -től független konstans mátrix, akkor az optimális irányítás meghatározásához szükséges (2.14), (2.15), illetve (2.71), (2.72) *Riccati differenciálegyenletek* is konstans együtthatójú egyenletek. Az ilyen típusú egyenletek megoldását zárt alakban is elő tudjuk állítani. (Lásd [1] 82. oldalát.) Így a 2.1. tételben meghatározott optimális irányítást az autonóm esetben még tömörebb alakra hozhatjuk. A skalár autonóm esetben például a következő eredményt kapjuk. (Az $A, B, C, C_1, D_1, G, N, R$ konstans valós számokat jelöljés $H=C(A-N)$.)

3.1. TÉTEL. Legyen adott az (1.1), (1.4), (1.5) konstans együtthatójú skalár rendszer, ahol a $V(t)$ és $W(t)$ olyan független 1 dimenziós *Wiener-folyamatokat* jelölnek, melyek ugyanahhoz a növekvő F_t σ -algebrához adaptáltak. Tegyük fel, hogy $(CG)^2+R^2 \neq 0$. Tekintsük a következő átlagos költséget:

$$(3.1) \quad J(u) = E \left(\int_0^T (C_1 x^2(r) + D_1 u^2(r)) dr + F_1(T) x^2(T) \right),$$

ahol $C_1, D_1, F_1(T)$ konstans valós számok, és $x(r)$ az (1.1), (2.2) skalár autonóm rendszer u irányításához tartozó megoldása. Tegyük fel, hogy $y(0)$ G_1^0 -mérhető, ahol G_1^0 a (2.9)-cel van megadva. Tekintsük a (2.51)–(2.55) feltételekkel meghatározott megengedett irányítások \mathfrak{U} halmazát.

Ekkor az (1.1), (1.4), (1.5), (2.56) rendszerhez tartozó optimális irányítás az alábbi módon adható meg:

$$(3.2) \quad u^*(t) = -\frac{B}{D_1} K(t) \hat{x}(t),$$

ahol a $K(t)$ valós függvény a következő képlettel definiálható:

$$(3.3) \quad K(t) = \frac{\exp(2\tilde{A}t)}{\tilde{C}_0 - \frac{B^2(\exp(2\tilde{A}t) - 1)}{2D_1\tilde{A}}} + \tilde{C}_1,$$

ha $\tilde{A} \neq 0$, és

$$(3.4) \quad K(t) = \frac{1}{\tilde{C}_0 - \frac{B^2}{D_1}t} + \tilde{C}_1$$

abban az esetben, ha $\tilde{A} = 0$.

A \tilde{C}_0 , \tilde{C}_1 , \tilde{A} számokat az alábbi egyenletekből számolhatjuk ki:

$$(3.5) \quad \frac{B^2}{D_1} \tilde{C}_1^2 - 2A\tilde{C}_1 - C_1 = 0,$$

$$(3.6) \quad \tilde{A} = -A + \tilde{C}_1 \frac{B^2}{D_1},$$

$$(3.7) \quad \tilde{C}_0 = \frac{\exp(2\tilde{A}T)}{F_1(T) - \tilde{C}_1} + \frac{B^2(\exp(2\tilde{A}T) - 1)}{2D_1\tilde{A}},$$

ha $\tilde{A} \neq 0$, és

$$(3.8) \quad \tilde{C}_0 = \frac{1}{F_1(T) - \tilde{C}_1} + \frac{B^2}{D_1}T$$

abban az esetben, ha $\tilde{A} = 0$.

Továbbá a (2.12)-ben definiált $\hat{x}(t)$ folyamat a (2.27) sztochasztikus differenciál-egyenlet megoldása, ha (2.27)-ben az $u^*(t)$ -t vesszük az irányításnak, és (2.17)-et a kezdeti feltételnek. A (2.27)-ben szereplő $F(t)$ valós függvény a következő képlettel adható meg:

$$(3.9) \quad F(t) = \frac{G^2C + P(t)H}{(CG)^2 + R^2},$$

ahol $P(t)$ -re explicit formula adható.

Ha $\tilde{\tilde{A}} \neq 0$, akkor

$$(3.10) \quad P(t) = \frac{\exp(2\tilde{\tilde{A}}t)}{\tilde{\tilde{C}}_0 + \frac{H^2(\exp(2\tilde{\tilde{A}}t) - 1)}{2\tilde{\tilde{A}}((CG)^2 + R^2)}} + \tilde{\tilde{C}}_1$$

és ha $\tilde{\tilde{A}} = 0$, akkor

$$(3.11) \quad P(t) = \frac{1}{\tilde{\tilde{C}}_0 + \frac{H^2t}{(CG)^2 + R^2}} + \tilde{\tilde{C}}_1,$$

ahol a $\tilde{\tilde{C}}_0$, $\tilde{\tilde{C}}_1$, $\tilde{\tilde{A}}$ számokat a következő egyenletek határozzák meg:

$$(3.12) \quad -\frac{H^2}{(CG)^2 + R^2} \tilde{\tilde{C}}_1^2 + 2\left(A - \frac{G^2CH}{(CG)^2 + R^2}\right) \tilde{\tilde{C}}_1 + G^2 - \frac{(G^2C)^2}{(CG)^2 + R^2} = 0,$$

$$(3.13) \quad \tilde{\tilde{A}} = A - \frac{G^2CH}{(CG)^2 + R^2} - \frac{\tilde{\tilde{C}}_1 H^2}{(CG)^2 + R^2}$$

$$(3.14) \quad \tilde{\tilde{C}}_0 = -\frac{1}{\tilde{\tilde{C}}_1}.$$

4. Megjegyzés

A 2.1. és 3.1. tételek ismeretében lehetőség adódik olyan program írására, amely az (1.1), (1.4), (1.5) rendszert modellezi a (2.58)-ban megadott átlagos költséget minimalizáló optimális $u^*(t)$ irányítás mellett egy és több dimenzióban. Ehhez az (1.1), (1.4), (1.5), (2.27), (2.69) egyenleteket kell egy megfelelő finomságú felosztáson diszkrétizálnunk. Az így nyert formulákban a (2.14), (2.15), illetve a (2.71), (2.72) *Riccati differenciálegyenlet* pozitív, szimmetrikus megoldásának diszkrét helyeken felvett értékeire van szükségünk. Autonóm esetben a *Riccati differenciálegyenlet* megoldását zárt formulából számolhatjuk ki. (Lásd [1] 82. old.) Az autonóm egy dimenziós feladatra készített program C-64-en körülbelül 2 perc alatt számolta ki az alábbi feladathoz tartozó optimális irányítást 0,1 finomságú felosztásban:

$$(4.1) \quad dx = (-0,5x - u) dt + dw$$

$$(4.2) \quad y = x + z$$

$$(4.3) \quad dz = -0,2z dt + dv$$

$$(4.4) \quad E \left(\int_0^2 x^2 + u^2 dt + [x(2)]^2 \right) \rightarrow \min$$

Végezetül szeretném megköszönni ARATÓ MÁTYÁS professzornak, hogy felhívta a figyelmemet a problémára, és a dolgozat megírását hasznos tanácsaival segítette.

IRODALOM

- [1] ARATÓ, M., *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients* (Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, 1982).
- [3] FLEMING, W. and RICHEL, R., *Deterministic and Stochastic Optimal Control* (Applications of Mathematics, Springer Verlag, 1975).
- [4] ARNOLD, L., *Sztochasztikus differenciálegyenletek* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984).
- [5] BALAKRISHNAN, A. V., *Applied Functional Analysis* (Springer, Berlin, 1981).
- [6] HAUSSMANN, U. G., *Optimal Control of Partially Observed Diffusions via the Separation Principle* (Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, 1982, No. 43, 302—311).

(Beérkezett: 1985. november 15.)

KISS ATTILA
ELTE SZÁMÍTÓKÖZPONT
1117 BUDAPEST, BOGDÁNFY ÚT 10/B.

THE APPLICATION OF THE SEPARATION PRINCIPLE FOR THE LINEAR CONTINUOUS SYSTEMS WITH COLOURED NOISE

A. KISS

This paper shows that the separation principle is applicable for the optimal control problem of linear continuous stochastic systems with not only white but also coloured noise. We shall give the explicit form of the optimal control in the scalar autonom case and finally we shall mention the programming of the problem.

A LOGARITMIKUSAN KONKÁV ELOSZLÁSOK ÉS AZ EXTREMÁLIS ELOSZLÁSOK KAPCSOLATÁRÓL

C. FODOR JÁNOS

Budapest

Dolgozatunkban független, azonos logkonkáv eloszlású valószínűségi változók maximumára vonatkozó határeloszlás tételket igazolunk. Belátjuk, hogy a megfelelő sűrűségfüggvények is konvergálnak a kettős exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényéhez. Megmutatjuk, hogy az L_p -ben vett konvergencia is teljesül a sűrűségfüggvényekre.

1. Bevezetés

Tekintsük a független, azonos eloszlású X_1, X_2, X_3, \dots valószínűségi változókat, közös eloszlásfüggvényüket jelölje $F(x)$. Legyen továbbá

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Ekkor $H_n(x) = P(Z_n < x) = F^n(x)$.

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$\omega(F) = \sup \{x; F(x) < 1\}.$$

Azt mondjuk, hogy az F eloszlásfüggvény a nem degenerált H eloszlásfüggvény vonzási tartományához tartozik, ha minden n természetes számra léteznek olyan a_n és $b_n > 0$ konstansok, hogy fennáll a következő reláció:

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(a_n + b_n x) = H(x)$$

$H(x)$ minden folytonossági pontjában. Ha (1.1) teljesül, akkor ezt a következő módon jelöljük: $F \in D(H)$.

Arra a kérdésre, hogy mi lehet az (1.1)-beli $H(x)$ határeloszlás, az 1920-as években abból az esetből kiindulva keresték a választ, amikor $F(x)$ a normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelenti. FISHER és TIPPETT [3]-ban belátta, hogy ebben az esetben a határeloszláshoz való konvergencia lassú. Azonban a [3] dolgozat fő eredménye az, hogy szerepel benne az a három eloszlástípus, amelyek vonzási tartományai nem üresek. Arra vonatkozóan, hogy egy $F(x)$ eloszlásfüggvény melyik lehetséges $H(x)$ -hez vonzódik az (1.1) értelemben, GNEDENKO [6]-ban adott szükséges és elegendő feltételeket. Más jellegű feltételeket közölt DE HAAN [1]-ben.

Dolgozatunkban bebizonyítjuk, hogy ha $1 - F(x)$ logkonkáv függvény, akkor létezik az (1.1) határeloszlás. Ha $\omega(F) = +\infty$, akkor ez a határeloszlás a kettős exponenciális eloszlás.

Ha $\omega(F) < +\infty$ és az $F(x)$ -ből származtatott $F^*(x) = F \left[\omega(F) - \frac{1}{x} \right]$ ($x > 0$) eloszlásfüggvényre teljesül, hogy $1 - F^*(x)$ logkonkáv, akkor szintén a kettős exponenciális eloszlás adódik határeloszlásként.

Amikor $F(x)$ abszolút folytonos és $\omega(F) = +\infty$, az $f(x)$ sűrűségfüggvény $h_{3,0}(x)$ -hez való konvergenciáját is belátjuk. (Itt $f(x) = F'(x)$, $h_{3,0}(x) = H'_{3,0}(x)$).

Ha még az is teljesül, hogy $f(x)$ logkonkáv, akkor $f(x)$ L_p -ben is konvergál $h_{3,0}(x)$ -hez.

Most tekintsük át röviden a felhasználandó ismert eredményeket.

2. Alapvető eredmények az extrémális eloszlások és a logkonkáv eloszlások elméletéből

Az első tétel a már említett három lehetséges határeloszlás típusát sorolja fel.

2.1. TÉTEL ([6]). Csak három nem degenerált $H(x)$ eloszlásfüggvény típus létezik, amelyek kielégítik (1.1)-et. Ezek a következők:

$$(2.1) \quad H_{1,a}(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-a}) & , \text{ ha } x > 0 \\ 0 & , \text{ ha } x \leq 0 \end{cases}$$

$$(2.2) \quad H_{2,a}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \geq 0 \\ \exp(-(-x)^a) & , \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

$$(2.3) \quad H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}) \quad , \quad \text{ ha } -\infty < x < +\infty,$$

ahol a pozitív valós szám.

GNEDENKO e három típus jelölésére rendre a

$$\Phi_a(x), \quad \Psi_a(x), \quad \Lambda(x)$$

szimbólumokat használta ($\alpha = a$). Ezeket az eloszlásokat nevezzük extrémális eloszlásoknak.

2.2. TÉTEL ([1]). Egy $F(x)$ eloszlásfüggvény akkor és csak akkor tartozik a kettős exponenciális eloszlás vonzási tartományához, ha teljesül a következő reláció:

$$(2.4) \quad \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{[1 - F(x)] \cdot \int_x^{\omega(F)} \int_t^{\omega(F)} [1 - F(y)] dy dt}{\left\{ \int_x^{\omega(F)} [1 - F(y)] dy \right\}^2} = 1.$$

2.3. TÉTEL ([1]). Legyen F olyan eloszlásfüggvény, melyre $\omega(F) < +\infty$. Az (1.1) reláció akkor és csak akkor teljesül, ha a (2.4)-beli limesz értékét c -vel jelölve $1/2 < c \leq 1$.

Ha $c < 1$, akkor $F \in D(H_{2,a})$, $a = 1/(1-c) - 2$.

Ha $c = 1$, akkor $F \in D(H_{3,0})$.

2.4. TÉTEL ([6]). Tegyük fel, hogy F olyan eloszlásfüggvény, hogy $\omega(F) < +\infty$.

Ekkor $F \in D(H_{2,a})$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $F^* \in D(H_{1,a})$, ahol $F^*(x) = F\left[\omega(F) - \frac{1}{x}\right]$, $x > 0$.

A logkonkáv mérték fogalmát PRÉKOPA A. vezette be [7]-ben.

Az R^m Borel-mérhető részhalmazain értelmezett P mérték logkonkáv, ha R^m tetszőleges A, B konvex részhalmazaira és minden $0 < \lambda < 1$ számra teljesül, hogy

$$P(\lambda A + (1-\lambda)B) \cong [P(A)]^\lambda [P(B)]^{1-\lambda}.$$

Az R^m -en értelmezett nem negatív $h(x)$ függvényt logkonkávnak mondjuk, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in R^m$ és minden $0 < \lambda < 1$ esetén

$$h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \cong [h(x_1)]^\lambda [h(x_2)]^{1-\lambda}.$$

2.5. TÉTEL ([7]). Ha az R^m tér mérhető részhalmazain értelmezett P valószínűségi mértéket logkonkáv sűrűségfüggvény származtatja, akkor P logkonkáv mérték.

2.6. TÉTEL ([7]). Ha P logkonkáv valószínűségi mérték, akkor $F(x) = P(\{t; t < x\})$ és $1 - F(x)$ logkonkáv függvények.

2.7. TÉTEL ([8]). Ha $f(x)$ és $g(y)$ logkonkáv sűrűségfüggvények ($x, y \in R^m$), akkor

$$h(x) = \int_{R^m} f(x-y) \cdot g(y) dy$$

logkonkáv függvény R^m -en.

A logkonkáv mérték, illetve függvény értelmezése egy konvex halmazon a fenti egyenlőtlenségeknek megfelelően történhet.

3. Gyenge konvergencia

Legyen $F(x)$ olyan eloszlásfüggvény, amelyre teljesül, hogy $1 - F(x)$ logkonkáv függvény. Azonnal látható, hogy ekkor

$$(3.1) \quad \int_x^{\omega(F)} [1 - F(y)] dy$$

$\omega(F) = +\infty$ és $x \geq 0$ esetén véges. Ha $\omega(F) < +\infty$, akkor (3.1) minden valós x esetén véges.

Definiáljunk négy függvényt a következő módon:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} b(x) &= \int_x^{\omega(F)} [1 - F(y)] dy \\ a(x) &= \int_x^{\omega(F)} b(y) dy \\ R(x) &= \frac{b(x)}{1 - F(x)} \\ S(x) &= \frac{a(x)}{b(x)}. \end{aligned}$$

Belátható, hogy ha $1-F(x)$ logkonkáv, akkor $a(x)$ és $b(x)$ is logkonkáv, továbbá $R(x)$ és $S(x)$ monoton csökkenő függvények.

3.1. TÉTEL Ha $1-F(x)$ logkonkáv függvény és $\omega(F)=+\infty$, akkor

$$(3.3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{R(x)} = 1.$$

Bizonyítás. Mivel $b(x)$ folytonos függvény, ezért majdnem mindenütt létezik $S'(x)$ és

$$S'(x) = -1 + \frac{S(x)}{R(x)}.$$

$S(x)$ monoton csökken és nem negatív, ezért létezik

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = s,$$

$0 \leq s < +\infty$.

Ebből következik, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} S'(x) = 0$, ami éppen azt jelenti, hogy (3.3) teljesül.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha teljesülnek az előző tétel feltevései, akkor $F \in D(H_{3,0})$.

Bizonyítás. Csupán azt kell megjegyezni, hogy (3.3) pontosan azt jelenti, mint (2.4).

Mint ismeretes, a leggyakrabban használt eloszlások legtöbbje logkonkáv, így e tétel széles körben alkalmazható. Például ha $f(x)$ a normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli, akkor $F \in D(H_{3,0})$. Más eszközökkel jóval körülményesebb belátni ezt a tényt.

Fogalmazzunk meg most egy konvolúcióra vonatkozó eredményt. Ez azért is érdekes, mert az irodalomban elég kevés tétel található a konvolúciókról ebben a témakörben.

3.2. TÉTEL. Jelölje az X_1, \dots, X_m független, abszolút folytonos valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit rendre $F_1(x), \dots, F_m(x)$. Tegyük fel, hogy a megfelelő $f_i(x)$ sűrűségfüggvények logkonkávok. Legyen valamilyen $1 \leq j \leq m$ -re $\omega(F_j) = +\infty$.

Jelölje $\sum_{i=1}^m X_i$ eloszlásfüggvényét $G_m(x)$. Ekkor $G_m \in D(H_{3,0})$.

Bizonyítás. A 2.7. tétel alkalmazható tetszőleges számú (véges sok) sűrűségfüggvényre is. Így $\sum_{i=1}^m X_i$ sűrűségfüggvénye logkonkáv. Ekkor viszont a 2.5. és 2.6. tételek értelmében $1-G_m(x)$ is logkonkáv. Mivel van olyan j index, hogy $\omega(F_j) = +\infty$, így $\omega(G_m) = +\infty$. Így G_m -re vonatkozóan teljesülnek a 3.1. következmény feltételei, tehát $G_m \in D(H_{3,0})$.

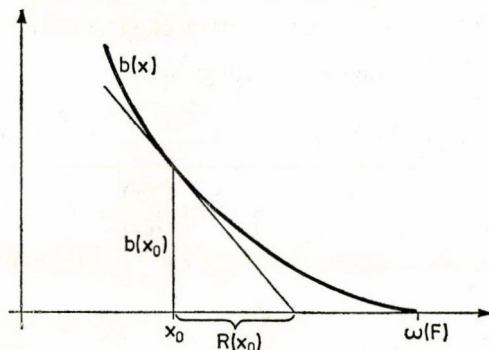
Térjünk most rá az $\omega(F) < \infty$ eset vizsgálatára. Könnyen látható, hogy $b(x)$ konvex, monoton csökkenő függvény és nyilván $\lim_{x \uparrow \omega(F)} b(x) = 0$.

3.1. LEMMA. Ha $\omega(F) < \infty$, $1-F(x)$ logkonkáv és van olyan $x_1 < \omega(F)$, hogy

$x > x_1$ esetén $1 - F(x)$ nem konstans, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{2} < \frac{S(x)}{R(x)} \leq 1 \quad (x > x_1).$$

Bizonyítás. Legyen $x_0 > x_1$. Tekintsük az 1. ábrát.



1. ábra

$a(x_0)$ értéke alulról becsülhető a $b(x)$ -hez tartozó x_0 -beli érintő, az x tengely és az $x = x_0$ egyenesek által meghatározott derékszögű háromszög területével. Egyszerű számításokból adódik, hogy e háromszögnek az x tengelyen lévő befogója $R(x_0)$ -lal egyenlő. Így tehát

$$\frac{1}{2} \cdot b(x_0) \cdot R(x_0) < a(x_0),$$

vagyis

$$\frac{1}{2} < \frac{S(x_0)}{R(x_0)},$$

ha $x_0 > x_1$.

Másrészt mivel $a(x)$ logkonkáv, ezért $S(x)$ monoton csökken, vagyis $S'(x) = -1 + S(x)/R(x) \leq 0$, amiből nyerjük a felső becslést.

Megjegyezzük, hogy amennyiben $1 - F(x) > 0$ konstans $\omega(F)$ egy környezetében, akkor ebben a környezetben $\frac{S(x)}{R(x)} = \frac{1}{2}$, így a 2.3. tétel szerint nem létezik az (1.1) értelemben vett határeloszlás.

Most három állítást igazolunk, amelyek segítségével be fogjuk látni, hogy amennyiben $1 - F(x)$ logkonkáv és van olyan x_1 , hogy $x > x_1$ esetén $1 - F(x)$ nem konstans, akkor létezik $\lim_{x \uparrow \omega(F)} S(x)/R(x)$.

3.2. LEMMA. Ha $A(x)$ és $B(x)$ monoton növekvő konvex függvények, akkor $A(x) \cdot B(x)$ is konvex.

Bizonyítás. Mivel $A(x)$ és $B(x)$ is konvex, ezért az alábbi egyenlőtlenség áll fenn:

$$A(z) \cdot B(z) \leq \lambda^2 A(x) \cdot B(x) + \lambda(1 - \lambda)[A(x) \cdot B(y) + A(y) \cdot B(x)] + (1 - \lambda)^2 A(y) \cdot B(y),$$

ahol $z = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

A feltételezések szerint $A(x)$ és $B(x)$ monoton növekvő függvények, így

$$0 \leq [A(x) - A(y)] \cdot [B(x) - B(y)].$$

Ebből következik, hogy a fenti egyenlőtlenség jobb oldala kisebb vagy egyenlő, mint $\lambda \cdot A(x) \cdot B(x) + [1 - \lambda] A(y) \cdot B(y)$. Ezzel az állítást beláttuk.

3.3. LEMMA. Ha $C(x)$ konvex, nem negatív függvény, $D(x)$ pedig konkáv pozitív függvény, akkor $\frac{C(x)}{D(x)}$ kvázikonvex függvény.

Bizonyítás. Legyen $0 \leq \lambda \leq 1$ és $z = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y$. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{D(z)} &\leq \frac{\lambda \cdot C(x) + (1 - \lambda) C(y)}{\lambda \cdot D(x) + (1 - \lambda) D(y)} = \frac{\lambda \cdot D(x) \frac{C(x)}{D(x)} + (1 - \lambda) D(y) \cdot \frac{C(y)}{D(y)}}{\lambda \cdot D(x) + (1 - \lambda) D(y)} = \\ &= \frac{\lambda \cdot D(x)}{\lambda \cdot D(x) + (1 - \lambda) D(y)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} + \frac{(1 - \lambda) D(y)}{\lambda \cdot D(x) + (1 - \lambda) D(y)} \frac{C(y)}{D(y)}. \end{aligned}$$

Itt $\frac{C(x)}{D(x)}$ és $\frac{C(y)}{D(y)}$ együtthatói nem negatívak és összegük egy, tehát valóban fennáll, hogy

$$\frac{C(z)}{D(z)} \leq \max \left\{ \frac{C(x)}{D(x)}, \frac{C(y)}{D(y)} \right\}.$$

3.4. LEMMA. Ha $1 - F(x)$ logkonkáv függvény és $\omega(F) < +\infty$, akkor

$$(3.4) \quad \frac{\log \frac{1}{a(x)}}{-(x - \omega(F) - 1) \cdot \log \frac{1}{b(x)}}$$

kvázikonvex függvény.

Bizonyítás. Ha $1 - F(x)$ logkonkáv függvény, akkor $a(x)$ és $b(x)$ is logkonkáv, így $\log \frac{1}{a(x)}$ és $\log \frac{1}{b(x)}$ konvex, továbbá mindkettő monoton növekvő függvény.

$x - \omega(F) - 1$ konvex, monoton növekvő, így a 3.2. lemma szerint

$$(x - \omega(F) - 1) \cdot \log \frac{1}{b(x)}$$

konvex függvény, továbbá negatív is, ezért $-(x - \omega(F) - 1) \cdot \log \frac{1}{b(x)}$ konkáv és pozitív. Ekkor viszont a 3.3. lemma értelmében (3.4) kvázikonvex.

Most már minden a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy belássuk a fent említett limesz létezését.

3.3. TÉTEL. Ha $1-F(x)$ logkonkáv függvény és $\omega(F) < \infty$, akkor létezik az alábbi határérték:

$$(3.5) \quad \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{S(x)}{R(x)}.$$

Bizonyítás. A mondott feltételek teljesülése esetén $\lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{1}{a(x)} = \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{1}{b(x)} = +\infty$. A *L'Hospital szabályt* alkalmazva kapjuk a következő relációt:

$$\lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{\log \frac{1}{b(x)}}{\log \frac{1}{a(x)}} = \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{S(x)}{R(x)},$$

így elég belátni a bal oldalon álló határérték létezését. Ehhez tekintsük a (3.4) alatti függvény limeszt:

$$(3.6) \quad \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{\log \frac{1}{b(x)}}{(\omega(F) - x + 1) \cdot \log \frac{1}{a(x)}} = \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{\log \frac{1}{b(x)}}{\log \frac{1}{a(x)}}.$$

Viszont (3.6) bal oldalán álló limesz létezik, mivel a (3.4)-beli függvény kvázikonvex, így ekkor van olyan $x_1 < \omega(F)$, hogy $x > x_1$ esetén a függvény monoton növekvő vagy monoton csökkenő. Ezzel az állítást beláttuk.

3.4. TÉTEL. Ha $1-F(x)$ logkonkáv, $\omega(F) < \infty$ és létezik olyan x_1 , hogy $x > x_1$ esetén $1-F(x)$ nem konstans, akkor létezik az (1.1) határeloszlás.

Bizonyítás. A 3.1. lemma és a 3.3. tétel szerint

$$\frac{1}{2} < \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{S(x)}{R(x)} \leq 1,$$

így teljesülnek a 2.3. tétel feltételei.

Tekintsük példaként a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlást. Látható, hogy $1-F(x)$ kielégíti a 3.4. tétel feltételeit, továbbá egyszerű számítások után adódik, hogy $\frac{S(x)}{R(x)} = \frac{2}{3}$, így $F \in D(H_{2,1})$. A következőkben azt szeretnénk biztosítani, hogy $\omega(F) < +\infty$ esetén is $F \in D(H_{3,0})$ teljesüljön.

Legyen $F^*(x) = F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right)$, ha $x > 0$. Nyilvánvaló, hogy $F^*(x)$ is eloszlásfüggvény és $\omega(F^*) = +\infty$.

3.5. LEMMA. Ha $1-F^*(x)$ logkonkáv függvény, akkor $1-F(x)$ is logkonkáv.

Bizonyítás. Egyszerűen adódik abból, hogy $1-F^*(x)$ monoton csökkenő logkonkáv függvény és $(\omega(F)-x)^{-1} x < \omega(F)$ esetén konvex függvény.

Könnyen látható, hogy ha $1-F^*(x)$ logkonkáv, akkor van olyan $x_1 < \omega(F)$, hogy $x > x_1$ esetén $1-F(x)$ nem konstans.

Most már megfogalmazhatjuk a 3.1. tétel megfelelőjét az $\omega(F) < +\infty$ esetre.

3.5. TÉTEL. Legyen $F(x)$ olyan eloszlásfüggvény, hogy $\omega(F) < +\infty$ és a fent definiált $F^*(x)$ -re vonatkozóan teljesül, hogy $1 - F^*(x)$ logkonkáv függvény. Ekkor

$$(3.7) \quad \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{S(x)}{R(x)} = 1.$$

Bizonyítás. Ha ez a határérték 1-nél kisebb lenne, mondjuk c , akkor a 2.3. tétel értelmében $F \in D(H_{2,a})$ állna fenn az ott definiált a -val. Ekkor viszont a 2.4. tétel szerint $F^* \in D(H_{1,a})$ teljesülne, ami ellentmondást jelentene a 3.1. következménnyel. Így tehát teljesül a kívánt határérték reláció.

3.2. KÖVETKEZMÉNY. Ha teljesülnek a 3.5. tétel feltevései, akkor $F \in D(H_{3,0})$.

Bizonyítás. A 3.5. és 2.4. tételekből közvetlenül adódik az állítás.

A 3.5. tétel feltételeit kielégítő eloszlás például a következő:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{1-x}\right) \quad (0 \leq x < 1).$$

Ekkor $\omega(F) = 1$ és

$$F^*(x) = 1 - \exp(-(x-1)).$$

4. A sűrűségfüggvény konvergenciája

Tegyük fel, hogy $F(x)$ abszolút folytonos eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvénye legyen $f(x)$. Tegyük fel továbbá, hogy van olyan x_1 , hogy $x > x_1$ esetén $f(x) \neq 0$. Legyen

$$u(x) = \frac{1 - F(x)}{f(x)} \quad (x > x_1).$$

4.1. TÉTEL. Ha $F(x)$ -re vonatkozóan teljesülnek az előző feltételek és $1 - F(x)$ logkonkáv függvény, továbbá $\omega(F) = +\infty$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{u(x)} = 1.$$

Bizonyítás. Pontosan úgy történik, mint a 3.1. tétel esetében.

4.1. KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy teljesülnek az előző tétel feltételei. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h_{3,0}(x)$$

x -ben egyenletesen, ahol $h_n(x) = [F^n(a_n + b_n x)]'$, $h_{3,0}(x) = H'_{3,0}(x)$, a_n és b_n pedig (1.1)-nek megfelelő normalizáló konstansok.

Bizonyítás. A [2] dolgozat 2. tételére hivatkozunk. Azt kell bebizonyítani, hogy

$$(4.1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) \cdot \int_x^\infty [-\log F(y)] dy}{\{\log F(x)\}^2} = 1.$$

Mivel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log F(x)}{1 - F(x)} = 1,$$

ezért (4.1) akkor és csak akkor áll fenn, ha teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{u(x)} = 1.$$

De a 4.1. tétel éppen ezt mondja ki az általunk tett feltevések teljesülése esetén.

Az eddigieken kívül tegyük még fel azt is, hogy $f(x)$ logkonkáv függvény. Könnyen látható, hogy ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^p dx < \infty \quad (0 < p < \infty).$$

4.2. TÉTEL. Ha teljesülnek a fenti feltételek, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h_n(x) - h_{3,0}(x)|^p dx = 0 \quad (0 < p < \infty).$$

Bizonyítás. Ismét azt kell belátnunk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{u(x)} = 1$. Éppen ezt mondja a 4.1. tétel.

IRODALOM

- [1] DE HAAN, L., "A form of regular variation and its application to the domain of attraction of the double exponential distribution", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **17** (1971) 241—258.
- [2] DE HAAN, L. and RESNICK, S. I., "Local limit theorems for sample extremes", *The Annals of Probability* **10** (1982) 396—413.
- [3] FISHER, R. A. and TIPPETT, L. H. C., "Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **24** (1928) 180—190.
- [4] C. FODOR, J., *Extremális eloszlások és alkalmazásuk a matematikai programozásban*. Egyetemi doktori értekezés, 1983.
- [5] GALAMBOS, J., *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics* (John Wiley and Sons, New York—Chichester—Brisbane—Toronto, 1978).
- [6] GNEDENKO, B. V., "Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire", *Ann. Math.* **44** (1943) 423—453.
- [7] PRÉKOPA, A., "Logarithmic concave measures with application to stochastic programming" *Acta Sci. Math.* **32** (1971) 301—316.
- [8] PRÉKOPA, A., "On logarithmic concave measures and functions", *Acta Sci. Math.* **34** (1973) 335—343.

(Beérkezett: 1984. május 29.)

(Átdolgozva beérkezett: 1986. június 17.)

C. FODOR JÁNOS
ELTE SZÁMÍTÓKÖZPONT OPERÁCIÓKUTATÁSI OSZTÁLY
1117 BUDAPEST, BOGDÁNFY U. 10/B.

ON THE CONNECTION BETWEEN LOGARITHMIC CONCAVE DISTRIBUTIONS
AND EXTREME-VALUE DISTRIBUTIONS

J. C. FODOR

In this paper we prove limit theorems for maxima of independent, identically distributed random variables, when their distributions are logarithmic concave. Also it is shown, that the density of the normalized maximum converges to the double exponential density, and this is true in L_p too.

RÚDSZERKEZETEK MÉRETEZÉSE TÖBBCÉLFÜGGVÉNYES MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSSAL

BERNAU HEINZ

LÓGÓ JÁNOS

VÁSÁRHELYINÉ SZABÓ ANNA

Budapest

A többcélfüggvényes matematikai programozás alap gondolata a műszaki feladatok megoldási módjához igen közel áll. E két terület összekapcsolásának lehetőségét vizsgáljuk.

A rúdszerkezetek méretezését képlékeny határállapotban végezzük. Olyan minimális súlyú szerkezet geometriai méreteit határozzuk meg, amely nyíróerővel minimálisan terhelt.

Áttekintést adunk a feladathoz használt többcélfüggvényes matematikai programozási eljárásokról, így a súlyozott célfüggvények módszeréről, a *Guddat-féle skalarizációról*.

Végül beszámolunk a fenti eljárásokat tartalmazó interaktív programrendszer használatának tapasztalatairól.

1. Bevezetés

A többcélfüggvényes programozás a matematikai programozás egyre nagyobb szerepet játszó újabb irányzata. Kialakulását elsősorban a gyakorlati igények befolyásolták. Műszaki és közgazdasági alkalmazások esetén egy célfüggvénnyel gyakran nem lehet kifejezni az összes figyelembe veendő célt. Ennek két fő oka van:

- A szokásos matematikai-programozási feladat alkalmazásánál a rendelkezésre álló összefüggések közül egyet ki kell emelnünk, mely a feladat célfüggvénye lesz, ennek optimális értékét keressük. Sok esetben nem dönthető el, hogy melyik ez az összefüggés, és nem, vagy nehezen adhatók meg a feltételként szereplő, de tulajdonképpen célt kifejező összefüggésekre a korlátok.
- Gyakran előfordul, hogy nehezen összeegyeztethető, a feladat természetéből következően egymásba át nem számítható mennyiségekre külön-külön kell megkívánni, hogy lehetőleg szélső értéket vegyenek fel.

A továbbiakban a szerkezettervezés területén alkalmazzuk a többcélfüggvényes matematikai programozást. A szerkezettervezés szerteágazó témakörei közül a geometriai adatok meghatározásával foglalkozunk. A tervezendő szerkezet meg kell feleljen a szerkesztési előírásoknak, a szilárdsági és alakváltozási követelményeknek, ugyanakkor több szempont szerint optimális méretű szerkezetet szeretnénk tervezni, például: minimális legyen a súly, maximális teherbírású a szerkezet, egyes igénybevételek minimálisak legyenek stb.

A 2. pontban a rúdszerkezetek geometriai tervezési feladatát, a 3. pontban a megoldáshoz használt matematikai apparátust ismertetjük, a 4. pontban numerikus tapasztalatainkról számolunk be.

2. Rúdszerkezetek geometriai tervezése

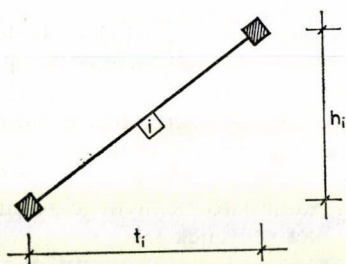
A rúdszerkezetekről feltételezzük:

- kis elmozdulások elmélete érvényes,
- rudanként állandó tömör, derékszögű négyszög keresztmetszetűek, egyenes tengelyűek
- anyaguk homogén, izotróp, lineárisan rugalmas, ideálisan képlékeny,
- a terhek csomópontokon hatnak, értékük konstans,
- tömegerők nem működnek,
- a szerkezetet síkbelinek tételezzük fel.

Feladatunk statikailag határozatlan, hajlított rúdszerkezetek rugalmas-képlékeny elmélet szerinti méretezése adott teherelrendezés esetén. A szerkezet belső-erő eloszlását erőmódszerrel határozzuk meg. A tartó képlékenységtan szerinti tervezése bármelyik statikailag lehetséges igénybevételeloszlás alapján elvégezhető. A statikailag határozott tartók igénybevételeinek eloszlását az egyensúlyi feltételek egyértelműen meghatározzák, így ezek a tartók ily módon nem tervezhetők. A statikailag határozatlan tartók esetében az egyensúlyi feltételek teljesítése mellett, statikailag fölös mennyiségek tetszőlegesen felvehetők. Így végtelen sok statikailag lehetséges igénybevétel-eloszlás képzelhető el. Ezek közül bármelyik alkalmas arra, hogy segítségével elvégezhetjük a tartó képlékenységtan elvein alapuló optimális tervezését [6].

Ismeretlen mennyiségek a statikai határozatlanságból adódó fölös kapcsolati erők (S_i), az egyes keresztmetszeti méretek (X_i), valamint a geometriai alakot meghatározó tervezési paraméterek (h_i).

Vegyük ki egy rudat a szerkezetből:



1. ábra

ahol

t_i és h_i = az i -edik rúd geometriai elhelyezkedését leíró méretek, t_i adott, h_i ismeretlen, (t_i a h_i függvénye).

A rúdvégek egyensúlyi egyenletei a statikailag fölös kapcsolati erők függvényében felírhatók:

$$(2.1) \quad \mathbf{G}_i^*(h_i) \cdot \mathbf{s}_i(S_i) + \mathbf{q} = 0$$

ahol:

\mathbf{G}^* — a geometriai mátrix transzponáltja, mely a h_i lineáris függvénye

\mathbf{s} — a belső igénybevételek vektora, mely az S_i fölös kapcsolati erők lineáris függvénye

\mathbf{q} — a csomóponti terhek vektora.

A linearizált képlékenységi feltétel szerint:

$$(2.2) \quad \mathbf{N}_i^* \cdot \mathbf{s}_i(S_i) - \mathbf{k}_i(X_i) \leq 0$$

ahol:

\mathbf{N}_i^* — a képlékenységi mátrix, az i -edik rúd bal és jobb végén a folyási felületet meghatározó síkok normálvektorait tartalmazza

\mathbf{s}_i — az i -edik rúd belső erői a fölös kapcsolati erők függvényében az i -edik rúd esetén

$\mathbf{k}_i(X_i)$ — a teherbírási vektor; a keresztmetszeti méretek szorzatával arányos

(2.1)-et és (2.2)-t összeadva:

$$(2.3) \quad (\mathbf{G}^*(h_i) + \mathbf{N}^*) \cdot \mathbf{s}(S_i) + \mathbf{q} - \mathbf{k}(X_i) \leq 0$$

vagyis:

$$(2.4) \quad \mathbf{A}(h_i) \cdot \mathbf{s}(S_i) + \mathbf{q} \leq \mathbf{k}(X_i)$$

alakú egyenlőtlenséghez jutunk. (2.4) szerint a belső igénybevételek és a külső terhek eredője sehol sem haladhatja meg a teherbírási vektorral kifejezett határigénybevételeket.

A (2.4) összefüggések határozzák meg a számításra vonatkozó korlátozó feltételek egy részét. A további korlátozó feltételeket a magassági méretek, illetve a keresztmetszetre vonatkozó szerkesztési elvek adják.

Célunk egy olyan szerkezeti alak, valamint keresztmetszeti méretek kialakítása, ami az előzőekben ismertett korlátozó feltételek kielégítése mellett lehetőleg minimális súlyú szerkezetet határoz meg és ugyanakkor az egyes rudakon fellépő nyíróerők abszolút értékben a lehető legkisebbek.

Tehát a célfüggvények:

$$(2.5) \quad C1: \sum_{i=1}^n q_i l_i^*(h_i) F_i(X_i) \rightarrow \min!$$

$$C2: \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^2(h_i, S_i) \rightarrow \min!$$

ahol:

l_i^* — a szerkezet i -edik rúdjának hossza, mely lineárisan függ a h_i -től

F_i — az i -edik rúd keresztmetszete, vagyis az ismeretlen keresztmetszeti méretek szorzata

\mathbf{T}_i — az i -edik rúdon fellépő nyíróerő, mely a h_i nemlineáris, az S_i -knek lineáris függvénye

q_i — i -edik rúd fajsúlya.

Így a következő feladatot kell megoldanunk:

$$(2.6a) \quad A(h) \cdot s(x) + q - k(x) \leq 0$$

$$(2.6b) \quad c_1 \leq h_i \leq c_2$$

$$(2.6c) \quad a \leq d_3$$

$$(2.6d) \quad b \leq d_4$$

$$(2.6e) \quad \sum_{i=1}^n \varrho_i l_i^*(h_i) F_i(x) = \min!$$

$$(2.6f) \quad \sum_{i=1}^n T_i^2(h_i, S_i) = \min!$$

ahol:

c_i = az előre megadott pozitív konstansok,

a_i, b_i = az i rúd keresztmetszeti méretei.

A (2.6b), (2.6c), (2.6d) egyenlőtlenségek lineárisak, vagyis az általuk határolt tartomány konvex. A (2.6a) összefüggés másodfokú konvex függvény, így a lehetséges megoldások tartománya konvex.

A C_1 célfüggvény az ismeretlenek másodfokú konvex függvénye, így erre a célfüggvényre nézve a feladatnak egyértelmű megoldása van. A C_2 célfüggvényben az ismeretlenek hányadosa is szerepel, így nem konvex, ezért csak lokális szélsőértéket lehet megkeresni. Az alkalmazott matematikai eljárás nem követeli meg a célfüggvény konvexitását, de nem szabad elfelejteni, hogy a C_2 esetén ez nem feltétlenül a globális szélsőérték.

3. Interaktív vektor optimalizálási eljárás

Ebben a pontban először érzékeltetni szeretnénk a különbséget a hagyományos és a többcélfüggvényes matematika programozási feladat között. Az utóbbi esetben a megoldás sokszor nem egyértelmű, az egyes elfogadható megoldások közül a felhasználó kell hogy kiválassza a számára legmegfelelőbbet. Elsősorban ez indokolta, hogy olyan interaktív rendszert kellett kidolgozni, melyben a felhasználónak lehetősége van részint a különböző eljárások közötti választásra, részint az egyes részeredmények értékelésére, valamint az iterációs folyamat befolyásolására is.

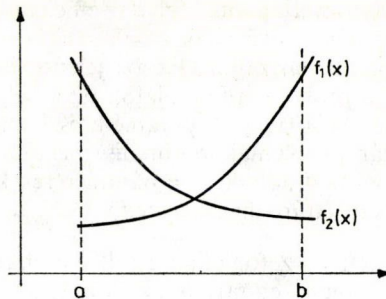
3.1. *Efficiens pontok*

Legyen adva k darab $f_1(x) \dots f_k(x)$ célfüggvény és a korlátozó feltételekkel meghatározott megengedett pontok halmaza X . Keresni kell egy olyan megengedett pontot, mely az $f_1 \dots f_k$ célfüggvényekre nézve „optimális”:

$$(3.1) \quad \text{„min.” } \{f_1(x), \dots, f_k(x) | g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l\}$$

A klasszikus feladatokkal ellentétben a többcélfüggvényes eljárások esetén az „optimális” fogalmát külön értelmeznünk kell, ezért használtuk írásánál az idézőjelet. Egy célfüggvény esetén a minimum a megengedett halmazban a célfüggvény kisebb értékét jelenti. Már két célfüggvény esetén a minimum nem értelmezhető ilyen módon.

Például a 2. ábrán az $[a, b]$ intervallumban a megengedett pontok halmaza. Az $f_1(x)$ célfüggvény monoton növekvő az $[a, b]$ intervallumban, így minimumát az a pontban veszi fel, míg az $f_2(x)$ célfüggvény monoton csökkenő, minimuma a b pontban van. Nyilvánvaló, hogy a két célfüggvény együttes minimalizálása nem lehetséges. A feladat megoldásaként valamely közbenső pontot kell elfogadni. Ha a fenti példában a két célfüggvényt azonos arányban akarjuk figyelembe venni, akkor az intervallum valamelyik közbenső pontját választhatjuk megoldásnak, mivel ott mind a két célfüggvény értéke aránylag kicsi.



2. ábra

Általában a (3.1) feladat megoldásán az úgynevezett *Pareto-optimális* vagy *efficiens* pontok halmazát értjük. Vagyis a megoldás legtöbbször nemcsak egy pontból áll, hanem bizonyos tulajdonságú pontok együttese.

Definíció.

a) Az x^* pont f efficiens, ha

$$\forall_{x \in X} f(x) \leq f(x^*) \Rightarrow f(x) = f(x^*).$$

b) Az x^* pont gyenge f efficiens, ha

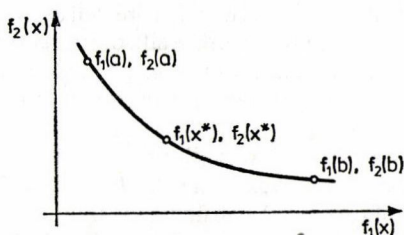
$$\forall_{x \in X} f(x) \leq f(x^*) \Rightarrow f_{i_0}(x) = f_{i_0}(x^*)$$

legalább egy i_0 index esetén.

Két célfüggvény esetén a definíció geometriailag is interpretálható. Az előbbi példa esetén egy $f_1(x)$, $f_2(x)$ koordináta-rendszerben ábrázoltuk az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó függvényértékeket.

Legyen x^* az $[a, b]$ intervallum egy tetszőleges pontja. Látható, hogy nincs az $[a, b]$ intervallumnak olyan \bar{x} pontja, ahol

$$f_1(\bar{x}) \leq f_1(x^*)$$



3. ábra

és

$$f_2(\bar{x}) \leq f_2(x^*)$$

egyidejűleg teljesülne, vagyis az x^* pont a feladat efficiens pontja.

Az efficiens pontok meghatározásának egyik szokásos módja az, hogy a vektor optimalizálási problémát skalarizáljuk. Ez azt jelenti, hogy skalár optimalizálási feladatokkal helyettesítjük a problémát [3], [5], [8]. Ez a helyettesítés általában alkalmasan választott paraméterektől függ. A paraméteres formában történő helyettesítés célja az, hogy a skalár problémák optimális megoldásai általában f efficiens vagy gyengén f efficiens pontokat adnak, és a paraméterek különböző értékei mellett különböző efficiens pontokat határozhatunk meg.

A továbbiakban röviden összefoglaljuk azokat a skalár-optimalizációs eljárásokat, amelyeket a programrendszer tartalmaz és a feladatunk megoldásánál használtunk. Az egyes eljárásokra vonatkozó tételek és lemmák közül csak azokat említjük meg, melyek a feladatunk szempontjából érdekesek. Bizonyításaik a megfelelő irodalmi hivatkozások szerint megtalálhatók.

3.2. Súlyozott célfüggvények

Ebben az esetben a skalár probléma célfüggvénye a következő:

$$(3.1) \quad \varphi(x, \lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x)$$

ahol: $\lambda_i \geq 0$, $i=1, \dots, k$ a skalarizáció paramétere.

A skalár optimalizációs probléma ezzel a célfüggvénnyel:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \min. \quad & \varphi(x, \lambda) \\ & x \in R^n \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned}$$

Ha \bar{x} megoldása a (3.2) feladatnak, akkor

- a) x gyenge efficiens pontja a vektroptimalizációs problémának,
- b) ha (3.2)-ben $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k$, akkor \bar{x} efficiens pontja a vektor optimalizációs problémának [3], [5].

Az interaktív használat szempontjából meg kell jegyeznünk a következőket:

- egy általános (nemkonvex) vektor optimalizációs probléma esetén az összes f efficiens pontot nem lehet meghatározni különböző λ választásokkal,
- lehet, hogy a (3.2) feladatnak nincs megoldása, de az eredeti vektor optimalizációs problémának van [2],
- rosszul skálázott feladatok esetén nehézségeket okozhat olyan vektorok választása, amelyeknél a vektor optimalizálási feladatra különböző megoldások adódnak.

3.3. Guddat skalarizáció [3]

Ebben a skalarizációban a célfüggvényekhez egy szintvektort kell megadni és a skalár problémával csak olyan f efficiens pontokat lehet meghatározni, ahol a célfüggvények értékei kisebbek, vagy egyenlők a megadott szinteknél. A vektor optimalizációs probléma korlátozó feltételeit kiegészítjük a célfüggvényekre adott korlátokkal:

$$f_i(x) \leq y_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

A skalár probléma célfüggvénye (3.1)-gyel megegyezik, így a következő feladat írható fel:

$$\begin{aligned} & \min. \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) \\ & x \in R^n \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & f_i(x) \leq y_i, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Ezzel a skalarizációval az összes f efficiens pontot meg lehet határozni különböző y_i szintek és λ -k választásával [3].

Ennek a skalarizációnak két előnye van:

- tetszőleges y vektor és $\lambda > 0$ esetén a (3.3) feladat megoldása a vektroptimalizációs problémának is efficiens pontja,
- az y vektor megfelelő választásával az f efficiens pontok típusa befolyásolható.

Hátránya az eljárásnak, hogy az y vektor rossz választása esetén a skalár problémának nem lesz lehetséges megoldása [3].

Az alkalmazások szempontjából a következő skalarizációs eljárások kedvezőbbnek bizonyultak:

3.4. Skalarizáció paraméteres szintekkel

Lineáris vektor optimalizációs problémák esetén BROSOWSKI [2] egy olyan skalarizációt ajánlott, mely a következő skalár problémára vezet:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \min_{t \in R} t \\ & g(\mathbf{x}) \leq 0, \quad h(\mathbf{x}) = 0 \\ & f_i(\mathbf{x}) - t \leq y_i, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

ahol:

t = skalár,
 $\mathbf{y} \in R^k$ = tetszőlegesen választott vektor.

Ezt a skalár problémát a következőképp interpretálhatjuk: Az $f_i(\mathbf{x})$ célfüggvények esetén $y_i \neq t$, $i = 1, \dots, k$ szinteket vesszük figyelembe. A t -t minimalizálva (3.4)-ben olyan lehetséges pontot keresünk, amely ezeken a szinteken minimális.

[2]-ben bebizonyították, hogy ha $\bar{\mathbf{x}}$ gyenge efficiens pontja a vektor optimalizációs problémának, akkor létezik egy olyan $\bar{\mathbf{y}}$ vektor és \bar{t} érték, amelynél a $(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}})$ optimális megoldást jelent a (3.4)-re $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$ esetén.

A (3.4) skalár optimalizációs feladat általánosítása a következő feladat:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & \min_{t \in R} t \\ & g(\mathbf{x}) \leq 0 \quad h(\mathbf{x}) = 0 \\ & f_i(\mathbf{x}) \leq y_i + t \cdot z_i, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

ahol:

$\mathbf{y} \in R^k$ és $\mathbf{z} \in R^k$, $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ tetszőlegesen választott vektor.

A (3.5) feladatra a következő lemmákat bizonyították [1]:

- ha $(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}})$ a (3.5) megoldása, akkor $\bar{\mathbf{x}}$ gyenge efficiens pontja a vektoroptimalizációs feladatnak,
- ha a vektor optimalizációs problémának van megoldása, akkor tetszőlegesen választott \mathbf{y} és $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ esetén a (3.5) feladat célfüggvénye alulról korlátos,
- ha a (3.5) feladat célfüggvénye alulról nem korlátos, akkor a vektoroptimalizációs problémának nincs efficiens pontja.

A (3.5) feladatot a következő változtatással használtuk. A program automatikusan generálja az \mathbf{y} és \mathbf{z} vektorokat. A futás során az eddig meghatározott lehetséges pontok közül a program minden célfüggvényhez kiválaszt olyan lehetséges pontot, amelyben a célfüggvény értéke minimális a többi lehetséges ponthoz képest. Legyenek ezek a pontok S_1, \dots, S_k .

Az \mathbf{y} és \mathbf{z} vektorok választása ekkor a következőképp történik:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & y_i = f_i(S_i) \quad i = 1, \dots, k \\ & z_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f_i(S_i) - y_j, \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

Az automatikus generálásnak két előnye van:

- a skalarizáció nagyon könnyen használható,
- a fenti \mathbf{y} és \mathbf{z} vektorok függetlenek az $f_i(\mathbf{x})$, $i=1, \dots, k$ célfüggvények skalarizálásától.

3.5. Alkalmazott nemlineáris programozási algoritmusok

A fenti skálár problémák megoldására a következő nemlineáris programozási eljárás használható:

- a *Powell-féle VMCWD-algoritmus* [9].

A programban a kvadratikus részfeladatokat a *Beale-módszer* módosított változatával oldottuk meg. Akár numerikus akár analitikus gradiensek használhatók.

- Sztochasztikus keresési algoritmus.

Ebben a módszerben a vektor optimalizálási feladat \mathbf{x}_j , $j=1, \dots, n$, változóira α_j alsó és β_j felső korlátokat kell megadni. A véletlen pontokat a program a következő képlet szerint generálja

$$\mathbf{x}_j = \alpha_j + \gamma_j(\beta_j - \alpha_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

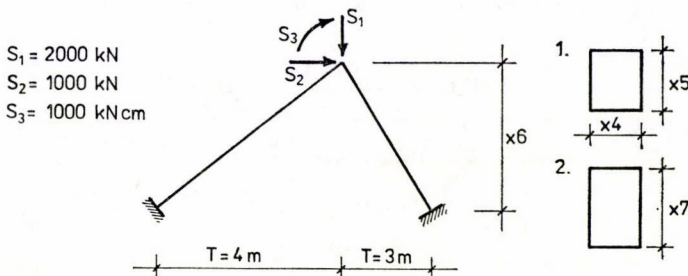
ahol $\gamma_j \in [0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású számok.

Ha a felhasználó számára a generált pontsorozat nem érdekes, akkor a skálár feladatok minimalizálását megszakíthatja.

A röviden vázolt eljárásokat az MTA SZTAKI-ban készült MULTI interaktív programcsomag tartalmazza, IBM 3031 típusú számítógépen. A programcsomag CMS terminálrendszerben használható.

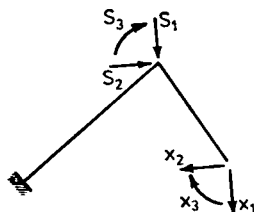
4. Numerikus példa

A 4. ábrán látható síkbeli tartószerkezet méretezését végeztük el a fent említett eljárással.



4. ábra

Az erőmódszeres megoldáshoz a következő törzstartót vettük fel:



5. ábra

Ismeretlenek:

a főlös kapcsolati erők: X_1, X_2, X_3

a szerkezet magassága: X_6

az egyes keresztmetszeti méretek: X_4, X_5, X_7 .

Szilárdsági korlátok:

$$-(T_1 + T_2) \cdot X_1 - X(3) - (S_1 \cdot T_1 + S_2 \cdot X_6 + S_3) + \sigma_H^+ \cdot \frac{X_4 \cdot X_5^2}{6} \cong 0$$

$$-T_2 \cdot X_1 - X_6 \cdot X_2 - X_3 - S_3 + \sigma_H^+ \cdot \frac{X_4 \cdot X_5^2}{6} \cong 0$$

$$-T_2 \cdot X_1 - X_6 \cdot X_2 - X_3 + \sigma_H^+ \cdot \frac{X_4 \cdot X_7^2}{6} \cong 0$$

$$-X_3 + \sigma_H^+ \cdot \frac{X_4 \cdot X_7^2}{6} \cong 0$$

$$(T_1 + T_2)X_1 + X_3X(S_1 \cdot T_1 + X_5S_2 \cdot 6 + S_3) - \sigma_H^- \cdot \frac{X_4 \cdot X_5^2}{6} \cong 0$$

$$T_2 \cdot X_1 + X_6 \cdot X_2 + X_3 + S_3 - \sigma_H^- \cdot \frac{X_4 \cdot X_5^2}{6} \cong 0$$

$$T_2 \cdot X_1 + X_6 \cdot X_2 + X_3 - \sigma_H^- \cdot \frac{X_4 \cdot X_7^2}{6} \cong 0$$

$$X_3 - \sigma_H^- \cdot \frac{X_4 \cdot X_7^2}{6} \cong 0.$$

Méretkorlátok:

$$X_6 - 0,5 \cong 0$$

$$X_4 - 0,3 \cong 0$$

$$X_5 - 0,45 \cong 0$$

$$X_7 - 0,45 \cong 0$$

Célfüggvények:

$$X4 \cdot X5 \cdot \sqrt{T1^2 + X6^2} + X4 \cdot X7 \cdot \sqrt{T^2 + X6}$$

$$\frac{(X1 \cdot T2 + X2 \cdot X6)^2}{X6^2 + T2^2} + \frac{((X1 \cdot S1)T1 + (S2 - X2)X6)^2}{X6^2 + T1^2}.$$

A célfüggvényeket (2.5) szerint írtuk fel. A feladatot megoldottuk a súlyozott célfüggvények módszerével és a paraméteres szintekkel történő skalarizáció módosított változatával. A nemlineáris programozási feladatokhoz a *Powell-módszer*t használtuk.

A matematikai programozás iterációs lépéseinek kiindulópontját egy geometriai-lag lehetséges alakhoz tartozó rugalmas megoldás adta.

Azaz: $X1 = -3713,4$ kN, $X2 = 1011,3$ kN, $X3 = 2697,5$ kNm,

$h = 3,0$ m, $1 \cdot \text{km} \cdot 0,5 \times 0,80$ m, $2 \cdot \text{km} \cdot 0,5 \times 0,80$ m.

A célfüggvények értékei:

$C1 = 3,697 \text{ m}^3$ (a tartó térfogata)

$C2 = 0,5548 \cdot 10^7 \text{ kM} \left(\sum_{i=1}^2 T_i^2 \right).$

A célfüggvények súlyozásával a következő eredményeket kaptuk:

1. TÁBLÁZAT

célfüggvény-súlyok		célfüggvény-értékek	
λ_1	λ_2	$C_1 (\text{m}^3)$	$C_1 (\text{kN})^2$
1.00	0.00	1,554	$0.9254 \cdot 10^7$
0.75	0.25	1,947	$0.3409 \cdot 10^5$
0.5	0.5	2,734	$0.1464 \cdot 10^6$
0.25	0.75	4,003	$0.3839 \cdot 10^5$
0.00	1.00	38,37	$0.1684 \cdot 10^5$

2. TÁBLÁZAT

C súlyok		Tervezési ismeretlenek						
1	2	$X1 (\text{kN})$	$X2 (\text{kN})$	$X3 (\text{kN})$	$X4 (\text{m})$	$X5$	$X7$	$X6 (\text{m})$
kimozdulási pont		-3713,4	1011,3	2697,5	0,50	0,80	0,80	3,00
1.00	0.00	-2856,3	-1001,8	487,3	0,30	0,45	1,10	0,50
0.75	0.25	-1618,8	1939,6	1367,3	0,30	1,16	0,45	1,50
0.50	0.50	-1439,8	1177,2	1834,5	0,30	1,37	0,52	3,03
0.25	0.75	-2534,5	705,3	1593,9	0,30	1,14	0,49	7,28
0.00	1.00	-3554,5	643,25	2697,2	1,06	1,25	1,19	14,22

A paraméteres szintekkel történő skalarizációs eljárás esetén a feladat megoldása:

$$\begin{aligned} C1 &= 1,749 \text{ m}^3 & C2 &= 0,8595 \cdot 10^6 \text{ kN}^2 \\ X1 &= -1617,6 \text{ kN} & X2 &= 4066,6 \text{ kN} \\ X3 &= 1402,1 \text{ kN} & X4 &= 0,30 \text{ m} \\ X5 &= 1,10 \text{ m} & X7 &= 0,45 \text{ m} & X6 &= 0,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Jelen feladatban a fenti eredmények a $\lambda_1=0,75$, $\lambda_2=0,25$ súlyok esetén kapott megoldáshoz állnak közel, de természetesen ebből más feladatokra nézve következtetés nem vonható le.

A célfüggvények súlyozásával a tervezőnek lehetősége nyílik az egyes célok preferálására, illetve több alternatív lehetőség közüli választásra.

A 2. táblázatban az első három ismeretlen a fölös kapcsolati erőket mutatja. Ezen értékek a képlékenységi feltételeket kielégítő megoldások és egy-egy folyási mechanizmus következményei.

A további ismeretlenek a tartó alakjának változását mutatják.

Abban az esetben, ha csak az a cél, hogy a szerkezetet minimális súlyra tervezzük, nyilvánvaló, hogy a 4. ábrán vázolt szerkezetünk súlya akkor csökken, ha „ h ” $\rightarrow 0$, azaz a vízszintes felé tart. A másik véglet pedig egy olyan tartóalak felvételét igényli, ami lehetővé teszi a nyíróigénybevétel csökkenését, s a tartót a külső terhelésnek megfelelően magasítani akarja. A keresztmetszeti méretek pedig a törési határállapot által megszabott méretekig csökkenthetők.

5. Összefoglalás

A többcélfüggvényes programozás alkalmazása a gazdasági élet egyes területein jól bevált eszköz a számítások elvégzésére, de műszaki feladatok megoldására használata még nem terjedt el. A fent ismertetett eljárás viszont alkalmas arra, hogy akár egy komplex tervezési tevékenység része legyen, akár mint önálló számítási eljárás segítse a tervezőt.

A súlyozott célfüggvényes eljárás talán több információt nyújt a tervezőnek döntéséhez, de ezek az eredmények függenek az egyes célfüggvények skálázásától. A paraméteres szintekkel történő skalarizációs eljárás módosított változata viszont független a skálázástól, így realisabb képet ad a feladatról. Véleményünk szerint a két eljárás eredményeinek együtt kezelése a célravezető. A programrendszer interaktivitása lehetőséget nyújt arra, hogy a matematikailag lehetséges megoldások közül a tervező még a program futása közben válasszon, vagy az általa remélt megoldáshoz közel eső pontot meghatározzon és értékeljen.

IRODALOM

- [1] BERNAU, H., "Interactive methods for vector optimization", in the Proceedings of the Conference „Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik“, Oberwolfach, 1985.
- [2] BROSIOWSKI, B. and CONCI, A., "On vector optimization and parametric programming", *Segundas Jornadas Latino Americanas de Mat. Aplic.* 2 (1983) 483—495.

- [3] GUDDAT, J., GUERRA, F., TAMMER, K. and WENDLER, K., *Multiobjective and Stochastic Optimization Based on Parametric Optimization* (Akademic-Verlag, Berlin, 1985).
- [4] ISERMANN, H., „Strukturierung von Entscheidungsprozessen bei mehrfacher Zielsetzung“, *Op. Res. Spektr.* (1979) 3—26.
- [5] JAHN, J., „Scalarization in vector optimization“, *Mathematical Programming* 29 (1984) 203—218.
- [6] KALISZKY, S., *Képlékenységtan. Elmélet és mérnöki alkalmazások* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975).
- [7] LARIDON, P., „ Σ -solutions in vector optimization problems“, *JOTA* 43 (1984) 265—276.
- [8] OSYCZKA, A., *Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN Programs* (Ellis Horward Lim. Publ., Chichester, 1984).
- [9] POWELL, J. M. D., „VMCWD: A FORTRAN subroutine for unconstrained optimization“, Report DAMTP NA4, University of Cambridge, 1982.
- [10] SATTLER, H. J., „Ersatzprobleme für Vektroptimierungsaufgaben und ihre Anwendungen in den Strukturmechanik“, *Fortschrittber. d. VDI-Zeitschr. Reihe 1*. 88 (1982).

(Beérkezett: 1986. július 9.)

BERNAU HEINZ
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U. 18—22.

LÓGÓ JÁNOS
BME MECHANIKA TANSZÉK
1111 BUDAPEST, MŰEGYETEM RKP. 3.

VÁSÁRHELYINÉ SZABÓ ANNA
BME MATEMATIKA TANSZÉK CSOPORT
1111 BUDAPEST, STÓCZEK U. H ÉP. V. E.

ANALYSIS OF BEAM STRUCTURES BY MULTICRITERION OPTIMIZATION

H. BERNAU, J. LÓGÓ, A. VÁSÁRHELYI

The basic idea of multicriterion optimization is very close to the process of structural design. In this paper it is presented the connection between this different professional domain. The structures are designed according to the plastic collapse load analysis. The problem is to find the geometrical measurements of the structure which have minimal weight and minimal shear forces. Different methods of function scalarization are used (weighting objectives method, *Guddat's method* and scalarization with parametrical levels). The problem is solved by an interactive program system which contains the above methods.

A RAS MODELL ÉS ÉRZÉKENYSÉGI VIZSGÁLATA

ÉGERTNÉ MOLNÁR ÉVA

Miskolc

A dolgozat ismerteti a közlekedés tervezésben gyakran alkalmazott RAS modellt. Elvégzi a modell érzékenységi vizsgálatát, amely az $\{\{a_{ij}\hat{a}_{ij}\}, \{o_i + \tau\delta_i\}, \{d_j + \tau\hat{d}_j\}\}$ paraméterű perturbált feladatnál zérushoz közeli τ esetén az I divergencia értékének meghatározását jelenti. Megvizsgálja a RAS modellhez tartozó geometriai programozási feladat célfüggvényének optimális értékét a geometriai programozási feladatra vonatkozó *Mills-formula* segítségével. A kapott eredmény felhasználásával összefüggést ad meg az $I(\tau)$ τ szerinti deriváltjára.

1. Bevezetés

A közlekedési struktúrák és az ágazati kapcsolatok vizsgálatánál gyakran előforduló feladat az input-output táblák előrebecslése. Input-output táblán olyan táblázatot értünk, amelynek elemei adott kibocsátó- és befogadó helyek között áramló mennyiségek számértékeit tartalmazzák. Az előrebecslés feladata megbecsülni az áramló mennyiség megoszlását a jelenlegi állapot ismeretében egy jövőbeli időpontra.

Attól függően, hogy a jövőre nézve milyen adatok ismertek, a becslésre kétféle típusú modell használható: növekedési tényezős és gravitációs, melyeket [1] részletesen ismertet. A dolgozat csak a növekedési tényezős modellek közé tartozó RAS modellel foglalkozik.

Minden feladatnál érdekes probléma: hogyan változik, mennyire érzékeny a megoldás a feladat paramétereinek kis megváltozására. A dolgozat a RAS modell ismertetésén kívül a modellen érzékenységi vizsgálatot is végez, felhasználva [2] azon felismerését, hogy a vizsgált modell ekvivalens egy geometriai programozási feladattal.

A továbbiakban a mátrixokat és a vektorokat kövéren szedett nagy- és kisbetűk jelölik.

2. A RAS modell

Adottak az I_1, I_2, \dots, I_m kibocsátóhelyek, és a J_1, J_2, \dots, J_n befogadóhelyek. Jelölje az $a_{ij} \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) szám az I_i helyről a J_j helyre jelenleg áramló mennyiséget. Az a_{ij} értékeket foglaljuk össze az $A = \{a_{ij}\}$ input-output (továbbiakban az angol *origin* (kiindulás) és *destination* (célállomás) szavaknak megfelelően $O-D$) táblázatba. A $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ mennyiség az I_i ($i=1, 2, \dots, m$) hely teljes

A fentiek alapján a RAS modell matematikailag a következőképpen adható meg:

Adott $A = \{a_{ij}\}$, és az (1) összefüggést kielégítő $\mathbf{o} = \{o_i\}$, $\mathbf{d} = \{d_j\}$ esetén határozzuk meg az $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) értékeket úgy, hogy a

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = o_i & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j & (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

feltételek mellett a

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{K} \log \frac{\frac{x_{ij}}{K}}{\frac{a_{ij}}{A}}$$

értéke minimális legyen.

3. A RAS modell mint geometriai programozási feladat

Definíció.

1. A (2), (3) által leírt matematikai modell *konzisztens*, ha létezik olyan $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ megoldása, hogy $x_{ij} \geq 0$, ha $a_{ij} > 0$ és $x_{ij} = 0$, ha $a_{ij} = 0$.
2. A (2), (3) által leírt matematikai modell *Slater konzisztens*, ha létezik olyan $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ megoldása, hogy $x_{ij} > 0$, ha $a_{ij} > 0$ és $x_{ij} = 0$, ha $a_{ij} = 0$.

1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy a (2), (3) által leírt modell *Slater konzisztens*. Ekkor $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ akkor és csak akkor optimális megoldása a feladatnak, ha előállítható

$$(4) \quad x_{ij} = \frac{K}{A} r_i a_{ij} s_j \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

alakban, ahol $r_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $s_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Bizonyítás. (4)-ből látható, hogyha létezik a feladatnak ilyen szorzat alakban előállítható megoldása, akkor $a_{ij} = 0$ esetén szükségképpen $x_{ij} = 0$ kell legyen. A további vizsgálatainkat ezért csak az x_{ij} ($(i, j) \in Q$) elemekre végezzük, ahol $Q = \{(i, j) | a_{ij} > 0\}$.

A (2), (3) összefüggésekkel adott feladat egy geometriai programozási primál feladat. A (3) célfüggvény a következő alakúra hozható:

$$\frac{1}{K} \left[\log \frac{\prod_{(i,j) \in Q} x_{ij}^{x_{ij}}}{\left(\sum_{(i,j) \in Q} x_{ij} \right)^{\left(\sum_{(i,j) \in Q} x_{ij} \right)}} + \sum_{(i,j) \in Q} x_{ij} \log \frac{A}{a_{ij}} \right].$$

E függvény minimuma ott van, ahol

$$(5) \quad \log \frac{\prod_{(i,j) \in Q} x_{ij}^{x_{ij}}}{\left(\sum_{(i,j) \in Q} x_{ij} \right)^{\left(\sum_{(i,j) \in Q} x_{ij} \right)}} + \sum_{(i,j) \in Q} x_{ij} \log \frac{A}{a_{ij}}$$

minimális.

A geometriai programozási *primál feladat*: határozzuk meg, az x_{ij} $(i,j) \in Q$ értékeket úgy, hogy (2) teljesülése mellett (5) minimális legyen.

Írjuk fel a fenti geometriai programozási primál feladat duál párját. Jelölje a duál változókat u_i ($i=1, 2, \dots, m$) és v_j ($j=1, 2, \dots, n$).

A geometriai programozási *duál feladat*: határozzuk meg u_i ($i=1, 2, \dots, m$), v_j ($j=1, 2, \dots, n$) értékeket úgy, hogy a

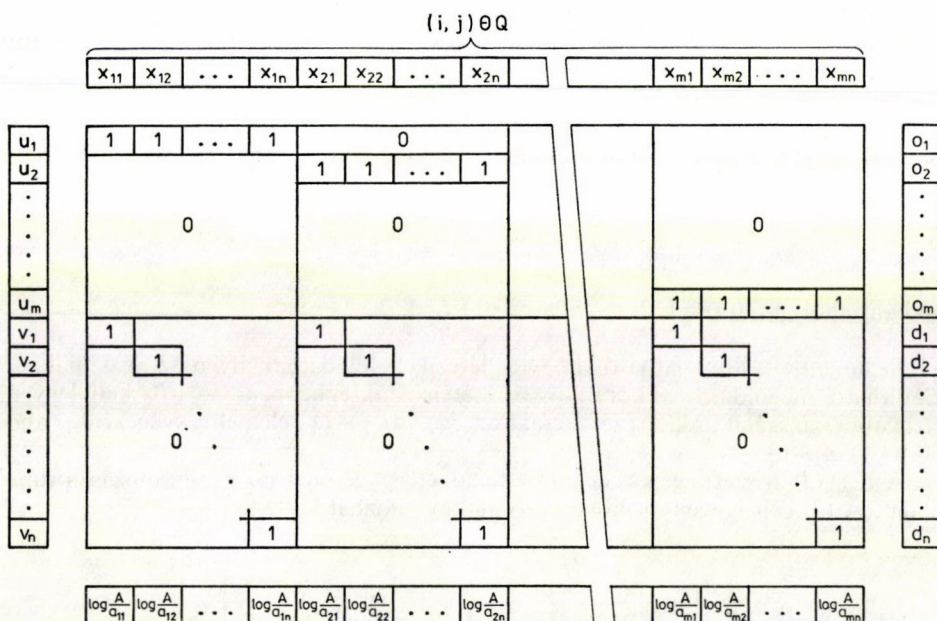
$$(6) \quad \sum_{(i,j) \in Q} \exp \left(u_i + v_j - \log \frac{A}{a_{ij}} \right) \leq 1$$

feltétel teljesülése mellett a

$$(7) \quad \sum_{j=1}^n d_j v_j + \sum_{i=1}^m o_i u_i$$

célfüggvény érték maximális legyen.

A fenti geometriai programozási feladat együttthatóit a 2. ábra tartalmazza.



2. ábra

A (2), (5) összefüggésekkel megfogalmazott geometriai programozási primál feladat az 1. tétel értelmében *Slater reguláris*. A (6), (7) által adott duál feladat is *Slater reguláris*, mert u_i ($i=1, 2, \dots, m$) és v_j ($j=1, 2, \dots, n$) értékét tetszőleges, igen nagy számra választva m, n véges volta miatt biztosan fennáll a

$$\sum_{(i,j) \in Q} \exp \left(u_i + v_j - \log \frac{A}{a_{ij}} \right) < 1$$

egyenlőtlenség.

A primál és duál feladat *Slater regularitása* miatt létezik optimális megoldás pár. Az optimális x_{ij} ($(i,j) \in Q$) értékek a geometriai programozás dualitási tételének következménye szerint kielégítik az

$$(8) \quad \exp \left(u_i + v_j - \log \frac{A}{a_{ij}} \right) \sum_{(i,j) \in Q} x_{ij} = x_{ij}$$

összefüggést minden x_{ij} esetén.

Vezessük be az

$$(9) \quad \begin{cases} r_i = \exp(u_i) & (i = 1, 2, \dots, m), \\ s_j = \exp(v_j) & (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

jelölést, melyeket felhasználva (8)-ból a bizonyítani kívánt összefüggés adódik:

$$x_{ij} = \frac{K}{A} r_i a_{ij} s_j \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Az optimális x_{ij} értékek ismeretében az alábbi formában adható meg a minimális $I(\mathbf{X} \parallel \mathbf{A})$:

$$\min I(\mathbf{X} \parallel \mathbf{A}) = \frac{1}{A} \left(\sum_{j=1}^n s_j \sum_{i=1}^m a_{ij} r_i \log r_i + \sum_{i=1}^m r_i \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j \log s_j \right).$$

A (4) állítás a következőképpen írható: Ha az r_i számokból alkotott diagonál mátrixot \mathbf{R} , az s_j számokból képzett \mathbf{S} jelöli, továbbá $\bar{\mathbf{A}} = \{a_{ij}K/A\}$, akkor a (4) összefüggés

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{S}$$

alakú. Ez a felírás inspirálja a RAS elnevezést.

4. A RAS modell megoldási algoritmus

Tegyük fel, hogy a (2), (3) összefüggésekkel megadott RAS modell konzisztens. Vezessük be az

$$\bar{a}_{ij} = \frac{K}{A} a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

jelölést.

Ekkor a feladat megoldását adó $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ értékek meghatározása a

$$(10) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = o_i & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j & (j = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

$$(11) \quad x_{ij} = r_i \bar{a}_{ij} s_j \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszer megoldására vezethető vissza. (11)-et (10)-be helyettesítve adódik az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{o_i}{\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} s_j} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ s_j &= \frac{d_j}{\sum_{i=1}^m r_i \bar{a}_{ij}} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

melynek megoldása iterációval előállítható.

Az iteráció kezdő lépése az $r_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) megadása. Szokásos például az $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{o}$ választása. Az iteráció k -adik lépése:

$$\begin{aligned} s_j^{(k)} &= \frac{d_j}{\sum_{i=1}^m r_i \bar{a}_{ij}^{(k-1)}} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ r_i^{(k)} &= \frac{o_i}{\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} s_j^{(k)}} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ x_{ij}^{(k)} &= r_i^{(k)} \bar{a}_{ij} s_j^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

A feladat megoldására a fenti iterációs eljárást már a 30-as években alkalmazták. Amennyiben a (10) feltételi rendszer konzisztens, akkor az iteráció $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ -ben konvergens és egyértelmű, amit [3] az I -divergencia geometriai tulajdonságának felhasználásával bizonyít.

Az optimális r_i, s_j értékek csak egy pozitív c konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározottak, mivel ha r_i ($i = 1, 2, \dots, m$) és s_j ($j = 1, 2, \dots, n$) megoldása a feladatnak, akkor $\bar{r}_i = r_i c$ ($i = 1, 2, \dots, m$) és $\bar{s}_j = s_j / c$ ($j = 1, 2, \dots, n$) is nyilván megoldás. Ebből a (9) összefüggést figyelembe véve az következik, hogy a duál feladatot sem egyetlen $\mathbf{u} = \{u_i\}$, $\mathbf{v} = \{v_j\}$ vektorpár optimalizálja.

Ha a fenti iterációt úgy tekintjük, mint egy matematikai programozási feladatpár megoldó módszerét, akkor a duál típusú módszerek közé sorolhatjuk. A számítástechnikai tapasztalatok azt mutatják ugyanis, hogy az iteráció minden lépésében nem csak a (8) egyensúlyi egyenletek teljesülnek, hanem a duál feladat (6) feltételi egyenlete is. A duál célfüggvény értéke lépésről lépésre növekedve veszi fel maximumát. Az iterált $\mathbf{X}^{(l)} = \{x_{ij}^{(l)}\}$ ($l = 1, 2, \dots, k, \dots$) értékek a (10) primál feltételi

egyenletek közül vagy csak a sorösszegekre, vagy csak az oszlopösszegekre vonatkozó feltételeket elégítik ki, attól függően, hogy az iterációt $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{o}$, vagy $\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{d}$ kezdőértékről indítottuk.

A RAS modell konzisztens, ha a következő *König-feladat* megoldható:

Rendelkezzenek az I_1, I_2, \dots, I_m személyek rendre $o_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) mennyiségű pénzzel, amelyet a számukra megbízható bankban akarnak elhelyezni. Legyen a J_1, J_2, \dots, J_n bankok befogadóképessége $d_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Az I_i személy akkor tartja megbízhatónak a J_j bankot, ha $a_{ij} > 0$. A *König-feladat* kvalifikációs mátrixának (i, j) eleme ezek szerint $a_{ij} > 0$ esetében legyen 1, $a_{ij} = 0$ esetén pedig 0.

5. A RAS modell érzékenységi vizsgálata

Legyen adott az $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathbf{o} = \{o_i\}$, $\mathbf{d} = \{d_j\}$ értékekkel meghatározott RAS modell, amelyet a továbbiakban $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}] = [\{a_{ij}\}, \{o_i\}, \{d_j\}]$ paraméterű feladatnak nevezzük. Tegyük fel, hogy létezik az adott feladatnak optimális megoldása. Jelölje ω a primál és a duál célfüggvények közös optimális értékét, I pedig az $I(\mathbf{X} \parallel \mathbf{A})$ optimális értékét. Legyenek $\hat{\mathbf{A}} = \{\hat{a}_{ij}\}$, $\hat{\mathbf{o}} = \{\hat{o}_i\}$, $\hat{\mathbf{d}} = \{\hat{d}_j\}$ ismertek, az \mathbf{A} , \mathbf{o} , \mathbf{d} mátrix, illetve vektorokkal azonos méretűek.

Az érzékenységi vizsgálat feladata: határozzuk meg az

$$[\{a_{ij} \cdot \hat{a}_{ij}^\tau\}, \{o_i + \tau \hat{o}_i\}, \{d_j + \tau \hat{d}_j\}]$$

paraméterű — úgynevezett perturbált — feladat esetén $I(\tau)$ értékét zérushoz közeli τ esetén.

A továbbiakban először az $\omega(\tau)$ vizsgálatát végezzük el a geometriai programozási feladatra vonatkozó, [2]-ben felállított *Mills-formula* segítségével, majd a kapott eredmény felhasználásával határozzuk meg az $I(\tau)$ τ szerinti deriváltját.

Idézzük fel a fent említett *Mills-formulát*:

Az adott $[\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ együtthatójú és adott partíciójú geometriai programozási feladat legyen olyan, amelyre teljesülnek a *Tucker-féle regularitási feltételek*. Ekkor tetszőleges, de fix $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}]$ perturbációs együtthatók esetén van olyan $[0, \tau_0)$ intervallum, hogy az $[\mathbf{A} + \tau \hat{\mathbf{A}}, \mathbf{b} + \tau \hat{\mathbf{b}}, \mathbf{c} + \tau \hat{\mathbf{c}}]$ együtthatójú feladat konzisztens, és a perturbált primál feladatnak és duáljának is van optimális megoldása minden $\tau \in [0, \tau_0)$ esetén. Amennyiben $\omega(\tau)$ -val jelöljük a célfüggvény τ -hoz tartozó optimális értékét, akkor

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = \max_{\mathbf{y} \in D} \min_{\mathbf{x} \in P} (\mathbf{x} \hat{\mathbf{c}} + \mathbf{y} \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{y} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x}),$$

ahol P és D az optimális primál, illetve duál megoldások halmaza.

5.1. A módosított RAS modell (MRAS)

A *Mills-formula* használhatóságának érdekében konstruáljunk egy olyan modellt, amely

- ekvivalens az $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}]$ RAS modellel,
- olyan geometriai programozási feladatra vezethető vissza, amelynél mind a primál, mind a duál feladatnak egyetlen optimális megoldása van.

A fentiek érdekében változtassuk meg a (2), (3) összefüggésekkel adott modell (2) feltéti egyenletrendszerét. A kapott új modellt nevezzük *módosított RAS* (a továbbiakban MRAS) modellnek, amelyet matematikailag a következőképpen adhatunk meg:

Határozzuk meg adott $A = \{a_{ij}\}$, és (1) feltételt kielégítő $o = \{o_i\}$, $d = \{d_j\}$ esetén az $\bar{x}_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) értékeket úgy, hogy

$$(12) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = o_i & (i = 2, 3, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = d_j & (j = 2, 3, \dots, n), \end{cases}$$

$$(13) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = K$$

feltételek mellett a

$$(14) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_{ij}}{K} \log \frac{\frac{\bar{x}_{ij}}{K}}{\frac{a_{ij}}{A}}$$

értéke minimális legyen.

Egyszerűen igazolható, hogy az MRAS modell ekvivalens a RAS modellel, azaz $MRAS \Leftrightarrow RAS$. Mivel a (3) és (14) célfüggvények azonosak, ezért csak a feltéti egyenletek ekvivalenciáját kell megmutatni.

Az, hogy $(2) \Rightarrow (12)$, (13) nyilvánvaló, hiszen (12) egyenleteket (2) tartalmazza, (13) pedig (2) első m darab, vagy az utolsó n darab egyenletét összeadva adódik.

(12), $(13) \Rightarrow (2)$ igazolásához azt kell belátnunk, hogy (12), (13) érvényessége esetén a

$$(15) \quad \sum_{j=1}^n \bar{x}_{1j} = o_1,$$

$$(16) \quad \sum_{i=1}^m \bar{x}_{i1} = d_1,$$

összefüggések is fennállnak. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz legyen

$$(17) \quad \sum_{j=1}^n \bar{x}_{1j} = \bar{o}_1 \neq o_1.$$

Adjuk hozzá (15) egyenletet (12) első $m-1$ egyenletéhez. Ekkor

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \bar{o}_1 + \sum_{i=2}^m o_i = K$$

adódik, amelyet átrendezve, és figyelembe véve (1)-et a következő összefüggést kapjuk:

$$\bar{o}_1 = K - \sum_{i=2}^m o_i = o_1.$$

Ez viszont ellentmond (17)-nek, tehát (15) érvényes. Hasonlóan igazolható (16) fennállása is.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy az MRAS modell a b) feltételnek is eleget tesz. Vizsgálatainkat most is csak az \bar{x}_{ij} ($i, j \in Q$) elemekre végezzük, ahol $Q = \{(i, j) | a_{ij} > 0\}$.

Az MRAS modell a következő geometriai programozási primál feladatra vezethető vissza: határozzuk meg az \bar{x}_{ij} ($i, j \in Q$) értékeket úgy, hogy (12), (13) teljesülése mellett az

$$\frac{1}{K} \left[\log \frac{\prod_{(i,j) \in Q} \bar{x}_{ij}}{\left(\sum_{(i,j) \in Q} \bar{x}_{ij} \right)^{\sum_{(i,j) \in Q} \bar{x}_{ij}}} + \sum_{(i,j) \in Q} \bar{x}_{ij} \log \frac{A}{a_{ij}} \right]$$

minimális legyen.

Ha \bar{u}_i ($i=2, 3, \dots, m$), \bar{v}_j ($j=2, 3, \dots, n$), és α jelöli a duál változókat, akkor a fenti geometriai programozási primál feladat duál párja: határozzuk meg az \bar{u}_i , \bar{v}_j , α értékeket úgy, hogy

$$\begin{aligned} & \left(\alpha + \log \frac{a_{11}}{A} \right) + \sum_{i=2}^m \left(\bar{u}_i + \alpha + \log \frac{a_{i1}}{A} \right) + \sum_{j=2}^n \left(\bar{v}_j + \alpha + \log \frac{a_{1j}}{A} \right) + \\ & + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^m \left(\bar{u}_i + \bar{v}_j + \alpha + \log \frac{a_{ij}}{A} \right) \leq 1, \end{aligned}$$

— ahol a szummázás $(i, j) \in Q$ értékekre történik — feltétel teljesülése mellett a

$$\sum_{i=2}^m \bar{u}_i o_i + \sum_{j=2}^n \bar{v}_j d_j + \alpha K$$

értéke maximális legyen.

A fenti feladatpár változóit és együtthatóit a 3. ábra tartalmazza.

Feltetelezve a primál feladat Slater regularitását, létezik a feladatnak optimális megoldása. Az optimális primál és duál változókra fennállnak a következő egyenletes egyenletek:

$$(18) \quad \begin{cases} \exp \left(\alpha + \log \frac{a_{11}}{A} \right) K = \bar{x}_{11}, \\ \exp \left(\bar{u}_i + \alpha + \log \frac{a_{i1}}{A} \right) K = \bar{x}_{i1} & (i = 2, 3, \dots, m), \\ \exp \left(\bar{v}_j + \alpha + \log \frac{a_{1j}}{A} \right) K = \bar{x}_{1j} & (j = 2, 3, \dots, n), \\ \exp \left(\bar{u}_i + \bar{v}_j + \alpha + \log \frac{a_{ij}}{A} \right) K = \bar{x}_{ij} & (i = 2, 3, \dots, m; \\ & j = 2, 3, \dots, n). \end{cases} \quad (i, j) \in Q$$

Vezessük be az

$$(19) \quad \begin{aligned} \bar{r}_i &= \exp(\bar{u}_i) & (i = 2, 3, \dots, m), \\ \bar{s}_j &= \exp(\bar{v}_j) & (j = 2, 3, \dots, n), \end{aligned}$$

Figyelembe véve $\bar{r}_1 = \bar{s}_1 = 1$ összefüggést, \bar{u}_i , \bar{v}_j , α értékekre is egyetlen megoldás adódik.

Legyen adott \hat{A} , \hat{o} , \hat{d} úgy, hogy

$$(21) \quad \hat{K} = \sum_{i=1}^m \hat{o}_i = \sum_{j=1}^n \hat{d}_j$$

teljesüljön.

Az $[\{a_{ij} \cdot \hat{a}_{ij}^{\tau}\}, \{o_i + \tau \hat{o}_i\}, \{d_j + \tau \hat{d}_j\}]$ paraméterű MRAS feladathoz tartozó geometriai programozási feladat célfüggvényének optimális értékét jelölje $\bar{\omega}(\tau)$.

Alkalmazzuk a feladatra a *Mills-formulát*.

Linearizálás után

$$\log \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot \hat{a}_{ij}^{\tau}}{a_{ij} \cdot \hat{a}_{ij}^{\tau}} \approx \log \frac{A}{a_{ij}} + \tau \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \log \hat{a}_{ij} - A \log \hat{a}_{ij}}{A}$$

adódik, amit felhasználva a következő összefüggést kapjuk:

$$(22) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\bar{\omega}(\tau) - \bar{\omega}(0)}{\tau} = K \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{\bar{x}_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \sum_{i=2}^m \bar{u}_i \hat{o}_i + \sum_{j=2}^n \bar{v}_j \hat{d}_j + \alpha \hat{K}.$$

5.2. A RAS modell optimális $I(\mathbf{X} \parallel \mathbf{A})$ értékének változása

A (22) összefüggés ismeretében először a RAS modell célfüggvényének optimális, ω -val jelölt értékének változására adunk formulát.

LEMMA. Legyen x_{ij} $(i, j) \in Q$ az $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}]$ paraméterű RAS modellhez tartozó geometriai programozási primál feladat optimális megoldása, u_i $(i=1, 2, \dots, m)$, v_j $(j=1, 2, \dots, n)$ pedig a duál feladat optimális megoldása. Ha $\omega(\tau)$ jelöli az $[\{a_{ij} \hat{a}_{ij}^{\tau}\}, \{o_i + \tau \hat{o}_i\}, \{d_j + \tau \hat{d}_j\}]$ perturbált feladat célfüggvényének optimális értékét, akkor

$$(23) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = K \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{x_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \sum_{i=1}^m u_i \hat{o}_i + \sum_{j=1}^n v_j \hat{d}_j.$$

Bizonyítás. Mivel az $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}]$ paraméterű RAS modell ekvivalens az 5.1-ben megkonstruált MRAS modellel, ezért a két modell optimális megoldásaira fennáll, hogy

$$(24) \quad x_{ij} = \bar{x}_{ij} \quad (i, j) \in Q,$$

melyből (4), (20) összefüggéseket figyelembe véve

$$\frac{K}{A} r_i a_{ij} s_j = \frac{K}{A} \bar{r}_i a_{ij} \bar{s}_j \exp(\alpha) \quad (i, j) \in Q$$

adódik. A RAS modellt optimalizáló r_i $(i=1, 2, \dots, m)$, s_j $(j=1, 2, \dots, n)$ értékek közül válasszuk azokat, amelyekre

$$r_i = \bar{r}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$s_j = \bar{s}_j \exp(\alpha) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

amiből (9), (19) alapján

$$(25) \quad \begin{cases} u_i = \bar{u}_i & (i = 1, 2, \dots, m), \\ v_j = \bar{v}_j + \alpha & (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

következik. Mivel $\bar{u}_i = \bar{v}_j = 0$, ezért (25)-ből látható, hogy $u_i = 0$ és $v_j = \alpha$. Alakítsuk át (22) jobb oldalát az előbbiekre és a (24), (25) összefüggések felhasználásával:

$$\begin{aligned} & K \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{\bar{x}_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \sum_{i=2}^m \bar{u}_i \hat{o}_i + \sum_{j=2}^n \bar{v}_j \hat{d}_j + \alpha \hat{K} = \\ & = K \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{x_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \sum_{i=2}^m u_i \hat{o}_i + \sum_{j=2}^n (v_j - \alpha) \hat{d}_j + \alpha \hat{K} = \\ & = K \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{x_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \sum_{i=2}^m u_i \hat{o}_i + \sum_{j=2}^n v_j \hat{d}_j + \alpha \hat{d}_1 = \\ & = K \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{x_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \sum_{i=1}^m u_i \hat{o}_i + \sum_{j=1}^n v_j \hat{d}_j. \end{aligned}$$

Tehát (22)-ből az $\omega(\tau)$ τ szerinti deriváltjára a bizonyítani kívánt összefüggés adódik.

Az, hogy (23) nemcsak a (25) szerinti speciálisan választott r_i, s_j duál változókra érvényes, hanem bármely, a RAS modellt optimalizáló r_i^*, s_j^* esetén is, az alábbiak szerint igazolható:

Az r_i, s_j értékek ismeretében r_i^*, s_j^* az $r_i^* = r_i/k, s_j^* = s_j/k, k > 0$ állandó választással szintén optimális megoldás lesz, mint ahogy az (4)-ből látható. A (9) összefüggés alapján

$$\sum_{i=1}^m u_i \hat{o}_i + \sum_{j=1}^n v_j \hat{d}_j = \sum_{i=1}^m \hat{o}_i \log r_i + \sum_{j=1}^n \hat{d}_j \log s_j,$$

amelyből r_i^*, s_j^* esetén (21) felhasználásával

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \hat{o}_i \log (r_i/k) + \sum_{j=1}^n \hat{d}_j \log (s_j/k) = \\ & = \sum_{i=1}^m \hat{o}_i \log r_i - \sum_{i=1}^m \hat{o}_i \log k + \sum_{j=1}^n \hat{d}_j \log s_j + \sum_{j=1}^n \hat{d}_j \log k = \sum_{i=1}^m u_i \hat{o}_i + \sum_{j=1}^n v_j \hat{d}_j. \end{aligned}$$

Ezután adjuk meg, hogyan változik a RAS modell optimális $I = I(\mathbf{X}|\mathbf{A})$ értéke, ha a feladat $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}]$ paraméterei kicsit megváltoznak.

2. TÉTEL. Legyen x_{ij} $(i, j) \in Q$ az $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}]$ paraméterű RAS modellhez tartozó geometriai programozási primál feladat optimális megoldása, r_i ($i = 1, 2, \dots, m$), s_j ($j = 1, 2, \dots, n$) pedig a duál feladat optimális megoldása. Ha $I(\tau)$ jelöli az

$[\{a_{ij}\hat{a}_{ij}^i\}, \{o_i + \tau\hat{o}_i\}, \{d_j + \tau\hat{d}_j\}]$ perturbált feladat optimális $I(\mathbf{X}||\mathbf{A})$ értékét, akkor

$$(26) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{I(\tau) - I(0)}{\tau} = \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{x_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \\ + \frac{\hat{K}}{K} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\hat{o}_i}{\hat{K}} - \frac{o_i}{K} \right) \log r_i + \frac{\hat{K}}{K} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\hat{d}_j}{\hat{K}} - \frac{d_j}{K} \right) \log s_j.$$

Bizonyítás. Az $[A, o, d]$ paraméterű RAS modellnél az optimális I és ω értékek között (3), (15) alapján a következő összefüggés áll fenn:

$$I = \frac{\omega}{K},$$

melynek felhasználásával felírjuk az $I(\tau)$ függvény τ szerinti deriváltját:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{I(\tau) - I(0)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{\omega(\tau)}{K + \tau\hat{K}} - \frac{\omega(0)}{K}}{\tau} = \\ = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{K + \tau\hat{K}} \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\hat{K}}{K(K + \tau\hat{K})} \omega(0).$$

Elvégezve a kijelölt határátmeneteket, és figyelembe véve (23), (19) összefüggéseket adódik, hogy

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{I(\tau) - I(0)}{\tau} = \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{x_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \frac{1}{K} \log \prod_{i=1}^m r_i^{\hat{o}_i} + \\ + \frac{1}{K} \log \prod_{j=1}^n s_j^{\hat{d}_j} - \frac{\hat{K}}{K^2} \omega(0).$$

Felhasználva, hogy

$$\omega(0) = \sum_{i=1}^m u_i o_i + \sum_{j=1}^n v_j d_j = \log \prod_{i=1}^m r_i^{o_i} + \log \prod_{j=1}^n s_j^{d_j}$$

érvényes $\tau=0$ -nál az optimális ω -ra, valamint elvégezve a lehetséges összevonásokat, a következő összefüggést kapjuk:

$$(27) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{I(\tau) - I(0)}{\tau} = \sum_{(i,j) \in Q} \left(\frac{a_{ij}}{A} - \frac{x_{ij}}{K} \right) \log \hat{a}_{ij} + \\ + \sum_{i=1}^m \frac{\hat{o}_i K - o_i \hat{K}}{K^2} \log r_i + \sum_{j=1}^n \frac{\hat{d}_j K - d_j \hat{K}}{K^2} \log s_j.$$

(27)-ből egyszerű kiemeléssel adódik a bizonyítani kívánt (26) képlet.

5.3. A RAS modell optimális $I(\mathbf{X}|\mathbf{A})$ értékének változása néhány speciális esetben

A gyakorlati feladatoknál előfordul az az eset is, amikor egy RAS modell vizsgálatát úgy kell ismételtelen elvégezni, hogy az $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}]$ paraméterek nem mindegyike változik, hanem csak valamelyik paraméter egy komponense. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy ezekben a speciális esetekben hogyan változik meg az $I(\mathbf{X}|\mathbf{A})$ optimális értéke. Az eredményül kapott iránymenti deriváltak jelölésére a $(\delta I)(\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}; p)$ szimbólumot használjuk, ahol p az a megváltozott paraméter komponens, amelyik meghatározza a deriválás „irányát”.

1. eset. Tegyük fel, hogy az $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}]$ paraméterű modellhez tartozó $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{o}}, \hat{\mathbf{d}}$ értékekre fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\hat{a}_{kl} &\neq 1, \\ \hat{a}_{ij} &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m, i \neq k; j = 1, 2, \dots, n, j \neq l), \\ \hat{o}_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \hat{d}_j &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).\end{aligned}$$

Ha a fentieknek megfelelően az \mathbf{A} minta mátrixnak csak egyetlen a_{kl} eleme változik $a_{kl} \cdot \hat{a}_{kl}$ irányban, akkor (27)-ből közvetlenül adódik a

$$(\delta I)(\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}; a_{kl}) = \left(\frac{a_{kl}}{A} - \frac{x_{kl}}{K} \right) \log \hat{a}_{kl} = \frac{a_{kl}}{A} (1 - r_k s_l) \log \hat{a}_{kl}$$

összefüggés.

Az \mathbf{o}, \mathbf{d} paraméterek esetében nem fordulhat elő az, hogy csak egyetlen o_k , illetve d_l érték változzon meg, hiszen ekkor a perturbált feladatra az (1) összefüggés nem teljesülne. Szükségképpen tehát egy o_k vagy d_l változása esetén valamilyen módon a $\{d_j\}$, illetve $\{o_i\}$ értékeknek is változnia kell.

2. eset. Tegyük fel, hogy az $[\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}]$ paraméterű RAS modellhez tartozó $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{o}}$ értékek olyanok, hogy

$$\begin{aligned}\hat{a}_{ij} &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n), \\ \hat{o}_k &\neq 0, \\ \hat{o}_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, i \neq k).\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy az (1) összefüggés az $[\{a_{ij}\hat{a}_{ij}^r\}, \{o_i + \tau\hat{o}_i\}, \{d_j + \tau\hat{d}_j\}]$ perturbált feladatra is teljesüljön, fenn kell állnia az alábbi egyenletnek:

$$(28) \quad \sum_{i=1}^m \hat{o}_i = \hat{o}_k = \sum_{j=1}^n \hat{d}_j.$$

Tételezzük fel, hogy az I_k hely megnövekedett kibocsátása a J_j ($j = 1, 2, \dots, n$) befogadó helyek között az eddigi befogadások arányában oszlik meg:

$$(29) \quad \hat{d}_j = \lambda d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

(29)-et (28)-ba helyettesítve $\lambda = \hat{o}_k/K$ adódik, melynek felhasználásával az

$$d_j = \frac{d_j}{K} \hat{o}_k \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

összefüggést kapjuk. Ezek alapján, ha a perturbált RAS feladat olyan, hogy egyetlen o_k $o_k + \tau \hat{o}_k$ -ra, és d_j ($j=1, 2, \dots, n$) $d_j + \tau \hat{d}_j$ -re változik, akkor (27)-ből a

$$(\delta I)(A, o, d; o_k) = \frac{\hat{o}_k}{K} \left(\log r_k - \sum_{i=1}^m \frac{o_i}{K} \log r_i \right)$$

összefüggés adódik.

3. eset. Legyenek az $[A, o, d]$ paraméterű RAS feladathoz tartozó \hat{A} , \hat{d} értékek az alábbiak:

$$\hat{a}_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\hat{d}_i \neq 0,$$

$$\hat{d}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n, j \neq l).$$

Tételezzük fel továbbá, hogy a J_l befogadóhely megnövekedett befogadása az I_i ($i=1, 2, \dots, m$) kibocsátóhelyek megnövekedett, és az eddigi kibocsátási aránynak megfelelő kibocsátásából adódik. A 2. esethez hasonlóan elvégezve a számolást

$$\hat{o}_i = \frac{o_i}{K} \hat{d}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

adódik. A fentiek alapján, ha a perturbált RAS feladat olyan, hogy egyetlen d_l változik $d_l + \tau \hat{d}_l$ -re és valamennyi o_i $o_i + \tau \frac{o_i}{K} \hat{d}_l$ -re, akkor (27)-ből

$$(\delta I)(A, o, d; d_l) = \frac{\hat{d}_l}{K} \left[\log s_l - \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{K} \log s_j \right]$$

következik.

4. eset. Végül vizsgáljuk meg az $[A, o, d]$ paraméterű RAS feladatot abban az esetben, ha az \hat{A} , o , \hat{d} értékek olyanok, hogy

$$\hat{a}_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\hat{o}_k \neq 0,$$

$$\hat{o}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, i \neq k),$$

$$\hat{d}_i \neq 0,$$

$$\hat{d}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n, j \neq l).$$

(1) teljesülése miatt ekkor $\hat{o}_k = \hat{d}_l$ kell legyen. Egyetlen o_k és egyetlen d_l $o_k + \tau \hat{o}_k$ -ra és $d_l + \tau \hat{d}_l$ -re történő változása esetén az $I(\mathbf{X} \parallel \mathbf{A})$ megváltozása (27)-ből

$$(\delta I)(\mathbf{A}, \mathbf{o}, \mathbf{d}; o_k, d_l) = \\ = \frac{\hat{K}}{K} \log r_k s_l - \frac{\hat{o}_k}{\hat{K}} \sum_{i=1}^m \frac{o_i}{K} \log r_i - \frac{\hat{d}_l}{\hat{K}} \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{K} \log s_j.$$

IRODALOM

- [1] BAKÓ, A., Forgalom szétosztás és elosztás tervezési modelljeinek matematikai és számítástechnikai értékelése és fejlesztése, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1984.
- [2] KLAFSZKY, E., „Geometriai programozás és néhány alkalmazása”, *MTA SZTAKI Tanulmányok* 8/1973.
- [3] CSISZÁR, I., Információértékszámok és alkalmazásai, Akadémiai doktori értekezés, Budapest, 1976.

(Beérkezett: 1986. július 9.)

DR. ÉGERTNÉ MOLNÁR ÉVA
NME MATEMATIKAI INTÉZET SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK
3515 MISKOLC, EGYETEMVÁROS

THE MODEL RAS AND INVESTIGATION OF ITS SENSITIVITY

É. ÉGERT

In the paper a model RAS is described which many times is applied in the traffic design. There is given the sensitivity analysis of the model. This means the determination of the I -divergence for the perturbed problem with parameters $[\{a_{ij} \hat{a}_{ij}\}, \{o_i + \tau \hat{o}_i\}, \{d_j + \tau \hat{d}_j\}]$ where τ is near zero. The optimal value of the geometrical programming problem concerning to the model RAS is investigated by the aid of the *Mills formula*. There is given a formula for the derivative of the function $I(\tau)$.

IRÁNYÍTOTT MATROIDOK MEGENGEDETTSÉGI FELADATÁNAK EGY ÚJ MEGKÖZELÍTÉSE

KLAFSZKY EMIL
Miskolc

TERLAKY TAMÁS
Budapest

Dolgozatunk az irányított madroidokon adott megengedettségi probléma egy új, egységes megközelítését tartalmazza. A szokásos megközelítéstől eltérően (I. BLAND [1], TERLAKY [6]) most a kitüntetett $e \in E$ elem a megoldási algoritmus során felváltva bázis, illetve nem bázis elem.

Megmutatjuk, hogy algoritmusunk miként adja a hagyományos (BLAND [1], TERLAKY [6]) algoritmust.

1. Bevezetés

Az irányított matroidok definícióját, legfontosabb tulajdonságait illetően BLAND [1], FOLKMAN—LAWRENCE [4] és TERLAKY [6] cikkeire hivatkozunk. Cikkünkben a BLAND [1] és TERLAKY [6] által használt jelölérendszerrel dolgozunk. Döntő szerepet játszik tárgyalásunkban a BLAND [1] által bevezetett táblakonstrukció, valamint a báziscsere (pivot) transzformáció.

Az alábbiakban megfogalmazzuk a megengedettségi feladatot. Legyenek $M=(E, O)$ és $M^*=(E, O^*)$ duális irányított matroidok. Legyen $e_1 \in E$, ahol $E=\{e_1, \dots, e_n\}$ véges halmaz.

1.1. Definíció. Az $X=(X^+, X^-) \in O$ irányított ciklust *primál megengedettnak* nevezzük, ha $e_1 \in X^+$ és $X^-=\emptyset$.

Hasonlóan az $Y \in O^*$ irányított kociklust *duál megengedettnak* nevezzük, ha $e_1 \in Y^+$ és $Y^-=\emptyset$.

Jól ismert, hogy a ciklusok és kociklusok ortogonalitási tulajdonsága miatt fennáll az alábbi tétel BLAND [1], TERLAKY [6]:

1.1. TÉTEL. Tetszőleges duális irányított matroid pár esetén vagy létezik primál megengedett irányított ciklus, vagy létezik duál megengedett irányított kociklus, de mindkettő egyidejűleg nem létezik.

Mi most egy új bizonyítást adunk a fenti tételre. Bizonyításunk konstruktív, véges sok lépésben előállítunk egy primál, illetve duál megengedett ciklust.

2. Az algoritmus és végességének bizonyítása

Algoritmusunk a BLAND [2] által bevezetett minimális index szabály (véleményünk szerint) legegyszerűbb változata. Az algoritmus lineáris algebrai megfelelője és annak következményei KLAFSZKY—TERLAKY [5] cikkében találhatók.

Induljunk ki egy tetszőleges B bázisból és a hozzá tartozó $T(B)$ bázistáblából. Ismert, hogy a tábla minden sorának egy irányított kociklus, és minden oszlopának

egy irányított ciklus felel meg. A tábla τ_{ij} eleme azt fejezi ki, hogy az $e_i \in B$ bázis elemhez tartozó Y_i irányított kociklusban az e_j nem báziselem szerepel-e és ha igen, milyen előjellel. Világos, hogy feladatunkat megoldottuk, ha sikerült olyan bázist előállítani, mikor $e_1 \notin B$ és e_1 oszlopa nem tartalmaz pozitív együtthatót (ekkor $(-X_1)$ primál megengedett ciklus), illetve ha $e_1 \in B$ és e_1 sora csak nem-negatív együtthatót tartalmaz (ekkor Y_1 duál megengedett kociklus).

(P) *Pivotálási szabály*

0. Legyen adott egy B bázis és a megfelelő $T(B)$ tábla. Ha $e_1 \notin B$ folytassuk I-el, ha $e_1 \in B$ folytassuk II-vel.
- I. (a) Ha $e_1 \notin B$ és $\tau_{i1} \leq 0$ minden $e_i \in B$ esetén, akkor $(-X_1)$ primál megengedett ciklus. VÉGE.
- (b) Ha $e_1 \notin B$ és (a) nem áll fenn, legyen

$$r = \min \{i | \tau_{i1} > 0; e_i \in B\}.$$

Pivotáljunk, e_1 bekerül, e_r kikerül a bázisból. Folytassuk a II. lépéssel.

- II. (a) Ha $e_1 \in B$ és $\tau_{1j} \geq 0$ minden $e_j \notin B$ esetén, akkor Y_1 duál megengedett kociklus. VÉGE.
- (b) Ha $e_1 \in B$ és (a) nem áll fenn, legyen

$$s = \min \{j | \tau_{1j} < 0; e_j \notin B\}.$$

Pivotáljunk, e_1 kikerül, e_s bekerül a bázisba. Folytassuk az I. lépéssel.

Eljárásunk csak primál illetve duál megengedett ciklus megtalálásával érhet véget, így az 1.1. tétel bizonyításához csak azt kell belátnunk, hogy véges sok lépésben véget ér vagyis nem ciklizálhat. Az eljárás újdonsága az, hogy a kitüntetett e_1 elem felváltva a primál illetve duál bázisban van, eltérően a klasszikus módszertől, melyekben az e_1 kitüntetett elem helye rögzített. Tehát az alábbi állítást kell bizonyítanunk.

ÁLLÍTÁS. A P. pivotálási szabállyal adott algoritmus véges, azaz ciklizálás nem fordulhat elő.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy az eljárás ciklizál, azaz egy B bázisból kiindulva ismét a B bázisba jutunk. Legyen $E^c = \{e_i | e_i \text{ helyét cserél } e_1\text{-gyel a ciklus során}\}$. Legyen $q = \max \{i | e_i \in E^c\}$.

Vizsgáljuk azt a két helyzetet, amikor e_q bekerül a bázisba, és amikor e_q kikerül a bázisból. Az első tábla Y_1 sora és a második tábla X_1 oszlopa az alábbi tulajdonságú ekkor.

$$\begin{array}{ll} (1) & e_1 \notin Y_1^- \\ (2) & e_q \in Y_1^- \\ (3) & e_j \in Y_1^+ \quad \text{ha } j < q \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (1') & e_1 \notin X_1^+ \\ (2') & e_q \in X_1^+ \\ (3') & e_j \in X_1^- \quad \text{ha } j < q. \end{array}$$

Mivel X_1 és Y_1 előjeles ciklusoknak van közös eleme (e_1, e_q) így az ortogonalitási tulajdonság-teljesüléséhez szükséges, hogy pozitív és negatív részüik metszete se legyen üres. Mivel az e_1, e_q elemek és az e_j ha $j < q$ ellentétes előjelű részekben

vannak, így ezek nem lehetnek sem a pozitív sem a negatív részek metszetében. Az e_j elemek $j > q$ esetén vagy csak X_1 vagy csak Y_1 ciklusokban vannak, mivel ezek nincsenek E^c -ben, azaz a ciklus során vagy végig a bázisban, vagy végig azon kívül voltak. Így beláttuk, hogy $(X_1^+ \cap Y_1^+) \cup (X_1^- \cap Y_1^-) = \emptyset$, ami ellentmond a ciklusok és kociklusok ortogonalitásának. Az állítást ezzel beláttuk.

3. Kapcsolat a hagyományos algoritmussal

Tetszőleges irányított matroid, B bázis és $T(B)$ bázistábla esetén a táblában a pivot elem sora vagy változatlan marad, vagy mínusz eggyel szorozódik egy pivotálás során a pivot elem előjelétől függően. Ez az észrevétel nyilvánvaló, hiszen itt ugyanazon elemekhez tartozó irányított kociklusról van szó. A mínusz eggyel való szorzást az teszi szükségessé, hogy $+1$ legyen a báziselem együtthatója a saját oszlopában.

A BLAND [1] és TERLAKY [6] cikkében közölt algoritmusok röviden az alábbiak. Legyen e_1 nem eleme a bázisnak. Válasszuk ki a minimális pozitív együtthatójú elemet e_1 oszlopában (e_r), majd ennek sorában a minimális indexű negatív elemet (e_s), amellyel megkaptuk a pivot elemet (τ_{rs}).

A fenti észrevétel alapján nyilvánvaló, hogy algoritmusunk két lépésben jut ugyanahhoz a bázishoz; mint a hagyományos algoritmus. Ugyanis algoritmusunkkal először az (e_r, e_1) cserét, majd az (e_1, e_s) cserét hajtjuk végre, mivel az első pivotálás után a táblában e_1 sora megegyezik az eredeti e_r sorral. Hasonló a kapcsolat a duális algoritmussal is, amennyiben olyan bázisból indulunk ki, melyben e_1 bent van.

IRODALOM

- [1] BLAND, R. G., "A combinatorial abstraction of linear programming", *Journal of Combinatorial Theory (B)* 23 (1977) 33—57.
- [2] BLAND, R. G., "New finite pivoting rules for the simplex method", *Mathematics of Operations Research* 2 (1977) 103—107.
- [3] BLAND, R. G. and LAS VERGNAS, M., "Orientability of matroids", *Journal of Combinatorial Theory (B)* 24 (1978) 94—123.
- [4] FOLKMAN, J. and LAWRENCE, J., "Oriented matroids", *Journal of Combinatorial Theory (B)* 25 (1978) 199—236.
- [5] KLAFSZKY, E. és TERLAKY, T., „A pivot technika szerepe a lineáris algebra néhány alapvető tételének bizonyításában”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* (megjelenés alatt).
- [6] TERLAKY, T., „A véges criss-cross módszer irányított matroidokon”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 11 (1985) 385—398.
- [7] TERLAKY, T., „A criss-cross módszer lineáris programozási feladatok megoldására és végességének bizonyítása”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 10 (1984) 289—296.
- [8] TUTTE, W. T., "Lectures on matroids", *Journal of Research National Bureau Std. B* 69 (1965) 1—47.

(Beérkezett: 1986. március 14.)

KLAFSZKY EMIL
NME MATEMATIKAI INTÉZET
3515 MISKOLC, EGYETEMVÁROS

TERLAKY TAMÁS
ELTE TTK OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6—8.

A NEW APPROACH TO THE FEASIBILITY PROBLEM OF ORIENTED MATROIDS

E. KLAFSZKY, T. TERLAKY

This paper presents a new approach to the feasibility problem of oriented matroids. The distinguished element $e \in E$ is alternatively a basic and non basic element during the algorithm. This approach simplifies the pivoting rule.

The connection between this algorithm and the classical one (BLAND [1], TERLAKY [6]) is presented in the final part.

EGY ÚJ KVADRATIKUS PROGRAMOZÁSI ALGORITMUS

TERLAKY TAMÁS

Budapest

Cikkünkben a lineáris feltételes, konvex kvadratikus programozási feladatok megoldásaira közlünk egy új, véges algoritmust. Algoritmusunk a lineáris programozás megoldási módszerein alapszik [4, 5, 6], azonban a FRANK—WOLFE [3] módszerrel ellentétben nem igényli a bázis tábla méretének növelését.

Egy megengedett megoldásból indulva, ehhez viszonyítva komplementáris duál megoldást konstruálunk, majd fokozatosan javítva a kiinduló megoldást optimális megoldáshoz jutunk, amennyiben létezik.

1. Bevezetés

Cikkünkben a lineáris feltételes, konvex kvadratikus programozási feladatok megoldására adunk egy új, véges algoritmust. Algoritmusunk KLAUSZKY E. és TERLAKY T. [4] dolgozatában közölt algoritmusokkal lényegében megegyezően működik. Egy primál megengedett megoldásból indulva, ehhez komplementáris duál megoldást konstruálunk. Látni fogjuk, hogy ezzel egy részfeladat optimális megoldását is megadtuk. Ezután a primál megoldást úgy javítjuk, hogy a primál feladat célfüggvényértéke határozottan javul, majd a primál-duál megoldásokat ismét komplementárisra tesszük. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg optimális megoldást nem kapunk, vagy ki nem mutatjuk, hogy a primál feladat célfüggvénye nem korlátos.

Algoritmusunkat egy, az eredeti feltételi mátrixhoz tartozó bázis táblán hajtjuk végre. Ezen kívül csak egyenletrendszerek megoldhatóságának eldöntésére lesz szükségünk, amit egyszerű *Gauss eliminációval* is elvégezhetünk.

Így módszerünk, annak ellenére, hogy lineáris programozási technikákon alapul, nem igényli nagy méretű lineáris programozási feladatok megoldását, mint FRANK—WOLFE [3] módszere.

Most röviden összefoglaljuk a megoldandó kvadratikus programozási feladat alaptulajdonságait.

Kvadratikus programozási primál feladat:

$$\max \left(by - \frac{1}{2} yPy \right)$$

feltéve, hogy

$$(1.1) \quad yA \leq c.$$

Kvadratikus programozási duál feladat:

$$\min \left(\mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{y}\mathbf{P}\mathbf{y} \right)$$

feltéve, hogy

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in R^m$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in R^n$, \mathbf{A} tetszőleges m -szer n -es mátrix, valamint \mathbf{P} tetszőleges m -szer m -es pozitív szemidefinit mátrix.

Az (1.1) és (1.2) feladatok közötti dualitás tárgyalása TERLAKY [7] és VAN DE PANNE [8] dolgozatában található.

Jól ismert, hogy minden \mathbf{P} pozitív szemidefinit mátrix felbontható $\mathbf{P} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T$ alakban, ahol a \mathbf{D} mátrix teljes oszlop rangú, m -szer k -s mátrix ($\text{rang}(\mathbf{P}) = k$). Így a duál feladat az alábbi formában is megfogalmazható. Keresendő azon $\mathbf{x} \in R^k$ és $\mathbf{z} \in R^k$, melyre

$$\left\{ \mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^2 \right\} \text{ minimális}$$

feltéve, hogy

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{z} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Mint a [7, 8] dolgozatokban található, ha az $\mathbf{y} \in R^m$ primál megengedett és $\mathbf{x} \in R^n$ duál megengedett megoldások kielégítik az

$$(1.4) \quad (\mathbf{y}\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x} = 0$$

egyensúlyi (komplementaritási) feltételt, akkor optimálisak. Amennyiben a duál feladatot (1.3) alakban adtuk meg, akkor az (1.4) feltétel mellett az

$$(1.5) \quad \mathbf{z} = \mathbf{y}\mathbf{D}$$

feltételt is meg kell követelnünk ahhoz, hogy a megoldások optimalitását garantálni tudjuk.

Végül megjegyezzük, hogy ha egy $\mathbf{y} \in R^m$ primál megengedett megoldás adott, és találtunk egy $\bar{\mathbf{y}} \in R^m$ vektort, melyre

$$(1.6) \quad \bar{\mathbf{y}}\mathbf{P}\bar{\mathbf{y}} = 0; \quad \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{b} - \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}) > 0; \quad \bar{\mathbf{y}}\mathbf{A} \leq \mathbf{0},$$

akkor a primál feladat célfüggvénye nem korlátos. Ugyanis ekkor $\mathbf{y} + \vartheta \bar{\mathbf{y}}$ megengedett megoldás, és ϑ növekedtével a célfüggvény értéke is nő. Ekkor a duál feladatnak nem létezik megengedett megoldása, mivel tetszőleges duál megengedett megoldáshoz tartozó célfüggvényérték felülről korlátozná a primál feladat célfüggvényét.

A továbbiakban a vektorok koordinátáit a megfelelő görög betűkkel jelöljük, s így τ_{ij} jelöli a bázis tábla a_i -hez tartozó sorának j -edik elemét.

2. Komplementáris megoldások konstruálása

Tekintsük az (1.1) és (1.2) feladatokat. Ebben a részben arra adunk eljárást, hogyan lehet komplementáris megoldásokat konstruálni úgy, hogy közben nem romlik a primál feladat célfüggvényértéke.

Legyen adott egy $y_0 \in R^m$ primál megengedett vektor. Vegyünk egy maximális független vektorrendszert A oszlopaiból, és ezt egészítsük ki R^m bázisává egységvektorokkal. Legyen

$$b_0 = b - Py_0, \quad \zeta_0 = by_0 - \frac{1}{2} y_0 Py_0$$

$$J_0 = \{j | ya_j = \gamma_j, j = 1, \dots, n\}$$

$$J_- = \{j | ya_j < \gamma_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Így rendelkezésünkre áll az alábbi bázistábla.

	J_B			$B^{-1}b_0$		I	
$J_B n J_0$		1	0			0	
$J_B n J_-$		0	1		B^{-1}	0	$B^{-1}p$
I_B	0	0	0	0	x_1	1	LP
	J_0		J_-		I_B		
$ya - c$	0	...	0	-	...	ζ_0	y

1. ábra

2.1. Definíció. Egy B bázist az y_0 megengedett megoldáshoz viszonyítva *redukálnak* nevezünk, ha

$$\tau_{ij} = 0, \quad i \in J_B \cap J_-, \quad j \in J_0.$$

2.2. Definíció. Egy B bázist az y_0 megengedett megoldáshoz viszonyítva *komplementárisnak* nevezünk, ha

$$\xi_i = 0, \quad i \in (J_B \cap J_-) \cup I_B.$$

2.1. Redukálás

Egy bázistábla redukált alakra hozását könnyen elvégezhetjük. Amennyiben $\tau_{ij} \neq 0$ valamely $i \in J_B \cap J_-; j \in J_0$ esetén, akkor ezen a helyen pivotálva $J_B \cap J_-$ elemszáma csökken. Ezt a pivotálást ismételve, véges (legfeljebb $|J_B \cap J_-|$) lépésben redukálhatunk egy bázistáblát.

Megjegyezzük, hogy a redukálás során az y_0 megoldás nem változik, csak a bázis.

2.2. Komplementáris alakra hozás

Egy redukált táblát szeretnénk komplementáris alakra hozni, amennyiben van olyan $i \in (J_B \cap J_-) \cup I_B$, melyre $\xi_i \neq 0$. A komplementáris alakra hozást úgy szeretnénk elvégezni, hogy a B^{-1} mátrix $i \in (J_B \cap J_-) \cup I_B$ sorainak (L mátrix) lineáris kombinációjával módosítjuk az y megoldást, miközben ügyelünk arra, hogy a célfüggvény érték ne romoljon, és az új megoldás is primál megengedett maradjon. Tehát $y_0 + \bar{y}$ alakú megoldást keresünk, ahol $\bar{y} = uL$, ahol $u \in R^s$ $s = |(J_B \cap J_-) \cup I_B|$. Ahhoz, hogy $y_0 + \bar{y}$ és a B bázis komplementáris legyen, fenn kell állni a

$$0 = L(b - P(y_0 + \bar{y}))$$

egyenletnek, mely rendezés után az alábbi

$$LPL^T u = L(b - Py_0),$$

azaz bevezetve az $x_L = L(b - Py_0)$ és $P_L = LPL^T$ jelöléseket

$$(2.1) \quad P_L u = x_L.$$

Nyilván P_L pozitív szemidefinit $s \times s$ méretű mátrix.

A (2.1) egyenletet megoldhatjuk például *Gauss eliminációval*. Ennek eredményeként

- a) vagy kapunk $u \in R^s$ vektort, melyre (2.1) fennáll,
- b) vagy kapunk $v \in R^s$ vektort, melyre

$$vP_L = 0$$

$$(2.2) \quad vx_L \neq 0 \quad (\text{feltehető } vx_L > 0).$$

A két eset közül pontosan az egyik áll fenn.

Legyen $\bar{y} = uL$ az a) és $\bar{y} = vL$ a második esetben, és legyen $y = y_0 + \vartheta \bar{y}$. Számítsuk ki az új megoldáshoz tartozó célfüggvényértéket.

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \zeta &= by - \frac{1}{2} yPy = by_0 + \vartheta b\bar{y} - \frac{1}{2} y_0 Py_0 - \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{y}P\bar{y} - \\ &\quad - \vartheta y_0 P\bar{y} = \zeta_0 + \vartheta (b\bar{y} - y_0 P\bar{y}) - \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{y}P\bar{y}. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk külön az a) és b) esetet.

a) eset. Ekkor (2.1) szerint $P_L u = x_L$, amiből u -val való szorzással az $uLPL^T u = uL(b - Py_0)$ egyenletet nyerjük, azaz $\bar{y}P\bar{y} = \bar{y}b - \bar{y}Py_0$. Így ebben az esetben (2.3) ekvivalens az alábbival

$$\zeta = \zeta_0 + \left(\vartheta - \frac{1}{2} \vartheta^2 \right) \bar{y}P\bar{y}.$$

Azaz $\zeta \geq \zeta_0$, ha $\vartheta \leq 1$ és $\vartheta = 1$ -nél érjük el a maximális célfüggvény növekedést, ha $\bar{y}P\bar{y} > 0$.

Másrészt az új y megoldásnak megengedettnek kell lenni, azaz $yA = y_0A + \vartheta \bar{y}A \leq c$ -nek fenn kell állnia. Mivel a táblázat redukált, így a

$$(2.4) \quad \vartheta \equiv \vartheta_1 = \min \left\{ \frac{\gamma_j - y_0 a_j}{\bar{y} a_j} \mid j \in J_-, \bar{y} a_j > 0 \right\}$$

összefüggésnek kell fennállni. ($\vartheta_1 = +\infty$, ha $\bar{y} a_j \leq 0$ $j \in J_-$ esetén.)

Legyen $\vartheta = \min(\vartheta_1, 1)$.

Ha $\vartheta = 1$, akkor a feladatot sikerült komplementáris alakra hozni.

Ha $\vartheta = \vartheta_1 < 1$, akkor J_- elemszáma csökkent legalább eggyel, a célfüggvény érték nem romlott, az eljárást folytathatjuk a táblázat redukálásával, majd (2.1) egyenlet megoldásával.

b) eset. Ekkor (2.2) szerint $vP_L = 0$ és $v x_L > 0$, amelyekből kapjuk, hogy

$$vLPL^T v = 0, \quad vL(b - Py_0) > 0,$$

$$\bar{y}P\bar{y} = 0, \quad \bar{y}b - \bar{y}Py_0 > 0.$$

Így ebben az esetben (2.3) az alábbi alakot ölti:

$$\zeta = \zeta_0 + \vartheta(\bar{y}b - \bar{y}Py_0) > \zeta_0,$$

ha $\vartheta > 0$, azaz ϑ növekedtével a célfüggvény korlátlanul nő.

Az a) esethez hasonlóan az új megoldásnak megengedettnek kell lennie, így (2.4) összefüggés most is korlátozza ϑ értékét.

Legyen $\vartheta = \vartheta_1$.

Ha $\vartheta = +\infty$, akkor \bar{y} kielégíti az (1.6) feltételeket, így a primál feladat célfüggvénye nem korlátos felülről.

Ha $\vartheta < +\infty$, akkor J_- elemszáma csökkent legalább eggyel, a célfüggvény érték határozottan javult. Az eljárást folytathatjuk a táblázat redukálásával majd (2.1) egyenlet megoldásával.

Megjegyezzük, hogy mind az a), mind a b) esetben az y_0 megoldást módosítjuk, a B bázis változatlan marad. Újra kell számolnunk a b_0 megoldáoszlopot.

Így véges sok lépés után az alábbi redukált, komplementáris megoldáshoz és bázistáblához jutunk.

	J_B			$B^{-1}b_0$	I		
$J_B n J_0$			0		0	0	$B^{-1}P$
$J_B n J_-$	0	0	\vdots	0	B^{-1}	0	
I_B	0	0	0	0	\vdots	\vdots	
	J_0			J_-	I_B		
$yA - c$	0	...	0	-	...	-	ζ_0 y

2. ábra

A komplementáris megoldások „suboptimalitását” bizonyítja az alábbi lemma.

2.1. LEMMA. A fenti x_0 és y_0 komplementáris megoldások optimális megoldásai az alábbi (J_-, J_0) által definiált) részfeladatnak.

$$\begin{array}{ll} \max \left(yb - \frac{1}{2} yPy \right) & \min \left(cx + \frac{1}{2} yPy \right) \\ \text{feltéve, hogy } ya_j \leq \gamma_j, j \in J_- & \text{feltéve, hogy } Ax + Py = b \\ & ya_j = \gamma_j, j \in J_0 & \xi_i \geq 0 \quad j \in J_- . \end{array}$$

Bizonyítás. Az y_0 és x_0 megoldások nyilván megengedettek, valamint az $(yA - c)x = 0$ egyensúlyi feltételt is kielégítik, így optimálisak.

Megjegyezzük, hogy véges sok ilyen részfeladat létezik, mivel véges sok J_-, J_0 felosztása van az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaznak.

3. Az algoritmus fő lépése, az algoritmus végességének bizonyítása

Ebben a részben eljárást adunk annak kimutatására, hogy egy redukált, komplementáris táblához tartozó y megoldás optimális-e, illetve ha nem az, akkor hogyan javíthatjuk ezt az y megoldást. Bizonyítani fogjuk, hogy eljárásunk véges.

3.1. Lineáris részfeladat megoldása

Oldjuk meg a $\left\{ \sum_{j \in J_0} a_j \xi_j = b; \xi_j \geq 0, j \in J_0 \right\}$ részfeladatot a 2. táblázatból, azaz az ott adott x vektorból indulva. Ezt megoldhatjuk például a [4, 6] dolgozatokban közölt módon a criss-cross módszer speciális esetének alkalmazásával. Így a 2. táblázatban csak a J_0 -hoz tartozó oszlopok kerülnek be és távoznak a bázisból. Ez azt jelenti, hogy a $\{\xi_j | j \in J_B \cap J_0\}$ alkotja a megoldás oszlopát, és a $\overline{\hspace{1.5cm}}$ táblarész tartalmazza a pivot elemeket.

Hajtsuk a pivot transzformációkat az egész bázistáblán végre. Ezek a transzformációk megőrzik a redukált és komplementaritási tulajdonságokat, mivel a $(J_B \cap J_-) \cup I_B$ -hez tartozó sorok nem változnak a transzformációk során.

Véges sok lépés után az alábbi két eset valamelyikénél ér véget az eljárás.

a) $\xi_j \geq 0, j \in J_B \cap J_0$,

b) $\xi_r < 0$ valamely $r \in J_B \cap J_0$ esetén és $\tau_{rj} \geq 0$ minden $j \in J_0$ esetén.

Megjegyezzük, hogy ebben a lépésben az y megoldás nem változik, csak a bázis és így a hozzá tartozó bázistábla.

3.2. A célfüggvény javítása

Ha fent az a) esethez jutottunk, akkor $Ax = b - Py, x \geq 0, (yA - c)x = 0$, azaz x és y optimális megoldásai az (1.1) és (1.2) kvadratikus programozási feladatoknak.

Ha a b) esethez jutottunk, akkor legyen $y = y_0 + \theta \bar{y}$, ahol $\bar{y} = -y^{(r)}$ ($y^{(r)}$ jelöli a B^{-1} mátrix $r \in J_B \cap J_0$ indexhez tartozó sorát). Így a bázistábla és b) tulajdon-

ságok miatt:

$$(3.1) \quad \xi_r = -\bar{y}(\mathbf{b} - \mathbf{P}\mathbf{y}_0),$$

$$(3.2) \quad \bar{y}\mathbf{a}_j \leq 0, \quad j \in J_0.$$

Így (2.3) és (3.1) szerint

$$\zeta = \zeta_0 + \vartheta(-\xi_r) - \frac{1}{2} \vartheta^2 \bar{y}\mathbf{P}\bar{y}.$$

Mivel $(-\xi_r) > 0$, $\bar{y}\mathbf{P}\bar{y} \geq 0$, így ϑ szerinti differenciálással meghatározhatjuk a legnagyobb célfüggvénynövekedést biztosító ϑ értéket.

$$-\xi_r - \vartheta \bar{y}\mathbf{P}\bar{y} = 0,$$

amiből

$$\vartheta_2 = \begin{cases} \frac{-\xi_r}{\bar{y}\mathbf{P}\bar{y}}, & \text{ha } \bar{y}\mathbf{P}\bar{y} > 0 \\ +\infty, & \text{ha } \bar{y}\mathbf{P}\bar{y} = 0. \end{cases}$$

Másrészt az új \mathbf{y} megoldás megengedettségét is biztosítanunk kell, amit (3.2) miatt ebben az esetben is a (2.4) képletben adott ϑ_1 érték garantál.

Legyen $\vartheta = \min(\vartheta_1, \vartheta_2)$:

Ha $\vartheta = +\infty$, akkor a 2.2 fejezetben leírtak szerint a primál feladat célfüggvénye nem korlátos felülről.

Ha $\vartheta < +\infty$, akkor J_0 -ból legalább egy elem átkerült J_- -ba. ($\vartheta = \vartheta_1$ esetén J_- -ből is átkerül index J_0 -ba.) Mivel $\vartheta = \min(\vartheta_1, \vartheta_2) > 0$, $\xi_r < 0$, így a célfüggvény határozottan nőtt ebben a lépésben. Térjünk vissza a táblázat redukálásához.

Megjegyezzük, hogy ebben a lépésben a bázis nem változik, csak az \mathbf{y}_0 primál-megengedett megoldást, valamint a $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_0$ megoldás oszlopot kell újra számolnunk.

Algoritmusunkat az alábbiakban foglalhatjuk össze.

Algoritmus

0. *Lépés.* — Legyen \mathbf{y}_0 primál megengedett megoldás, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{P}\mathbf{y}_0$. Készítsük el a J_0, J_- indexhalmazokat, és legyen \mathbf{B} az 1. ábra szerint adott bázis. Készítsük el a kiinduló bázistáblát.
1. *Lépés.* — Redukáljuk a táblát.
2. *Lépés.* — Ha a tábla komplementáris, menjünk az 5. lépésre.
— Ha a tábla nem komplementáris, oldjuk meg a $\mathbf{P}_L \mathbf{u} = \mathbf{x}_L$ feladatot.
Ha van ilyen \mathbf{u} , menjünk a 3. lépésre.
Ha nincs ilyen \mathbf{u} , menjünk a 4. lépésre.
3. *Lépés.* — Javítsuk \mathbf{y}_0 -t \mathbf{u}_L segítségével.
Ha $\vartheta = 1$, a tábla komplementáris, menjünk az 1. lépésre.
Ha $\vartheta < 1$, akkor $|J_-|$ csökken, menjünk az 1. lépésre.
4. *Lépés.* — Javítsuk \mathbf{y}_0 -t \mathbf{v}_L segítségével.
Ha $\vartheta = +\infty$, nincs duál megengedett megoldás, VÉGE.
Ha $\vartheta < +\infty$, akkor $|J_-|$ csökken, menjünk az 1. lépésre.

5. *Lépés.* — Oldjuk meg a J_0 által definiált lineáris részfeladatot.
 6. *Lépés.* — Ha $\mathbf{x} \geq 0$, akkor optimális megoldásnál vagyunk, VÉGE.
 — Ha $\xi_r < 0$ valamely $r \in J_B \cap J_0$ esetén, akkor javítsuk \mathbf{y}_0 -t ($-\mathbf{y}^{(r)}$) segítségével.
 Ha $\vartheta = +\infty$, nincs duál megengedett megoldás, STOP.
 Ha $\vartheta < +\infty$, menjünk az 1. lépésre.
 Az alábbi tétel bizonyítja az algoritmus végeességét.

3.1. TÉTEL. A fenti algoritmus véges sok lépés után véget ér.

Bizonyítás. Az algoritmus egyes lépései végesek, így csak azt kell bizonyítanunk, hogy az egyes lépések végrehajtására véges sokszor kerülhet sor.

Az 5. és 6. lépés végrehajtására véges sokszor kerülhet sor, mivel redukált és komplementáris esetben lépünk az 5. lépésre, ekkor pedig a J_- , J_0 felosztás által definiált részfeladat optimális megoldásánál vagyunk. Mivel a célfüggvény értéke a 6. lépésben határozottan javul, és máshol sem romlik seholy, így egyetlen ilyen részfeladat sem térhet vissza. Nyilván véges sok ilyen részfeladat létezik.

Az 1., 2., 3., 4. lépések végrehajtására is véges sokszor kerülhet csak sor, mivel 3. és 4. lépésben $|J_-|$ csökken, amennyiben az 1. lépésre térünk vissza, továbbá fent bizonyítottuk, hogy a 6. lépésből véges sokszor térhetünk vissza az 1. lépésre. Így tételünket behbizonyítottuk.

4. Feladatmegoldás

Az algoritmus számítástechnikai hatékonyságának vizsgálata, hatékonyságának összehasonlítása más algoritmusokkal további vizsgálatokat igényel, ennek feldolgozása egy másik cikk tárgya lesz. Most csak egy mintafeladaton illusztráljuk algoritmusunkat.

Tekintsük az alábbi kvadrátikus programozási feladatot, ahol $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\max \left\{ \frac{3}{2} \eta_1 - \eta_2 - \frac{3}{2} \eta_3 - \frac{1}{2} \eta_1^2 - 2\eta_2^2 - 2\eta_2\eta_3 - 2\eta_3^2 \right\}$$

feltéve, hogy

$$\eta_1 \leq 0$$

$$\eta_2 \leq 0$$

$$\eta_1 + \eta_3 \leq 0$$

$$2\eta_1 + \eta_2 \leq 1$$

$$-\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 \leq 2$$

$$\eta_3 \leq 3.$$

Az (1.1) alakban szereplő vektorok és mátrixok az alábbiak.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$c = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3].$$

A feladat duálja az (1.2) képletben adottak szerint. ($x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)$):

$$\min \left\{ \xi_4 + 2\xi_5 + 3\xi_6 + \frac{1}{2} \eta_1^2 + 2\eta_2^2 + 2\eta_3 + 2\eta_3^2 \right\}$$

feltéve, hogy

$$\xi_1 + \xi_3 + 2\xi_4 - \xi_5 + \eta_1 + \quad = \frac{3}{2}$$

$$\xi_2 + \xi_4 + \xi_5 + \quad + 4\eta_2 + 2\eta_3 = -1$$

$$\xi_3 \quad - \xi_5 + \xi_6 + 2\eta_2 + 4\eta_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6 \geq 0.$$

Vegyük az $y=(0, 0, 0)$ megengedett vektort indulómegoldásként, és legyen $[a_1, a_2, a_6]=E$ az induló bázis. Így az alábbi kiinduló táblát kapjuk.

	$B^{-1}A$	$B^{-1}b_0$	B^{-1}	$B^{-1}P$
$J_B \cap J_0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
$J_B \cap J_-$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$-\frac{3}{2}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$yA - c \quad \begin{array}{c} y \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} y \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A tábla nem redukált, mivel $6 \in J_B \cap J_-$; $3 \in J_0$ és $\tau_{63}=1$. Redukáljuk a táblát a τ_{63} pivotelem választással.

$J_B \cap J_0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$-\frac{3}{2}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$			

Mivel $J_B \cap J_- = \emptyset$ így a tábla redukált és komplementáris. A lineáris részfeladat nem oldható meg, mivel

$\xi_2 = -1$, $\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23} \geq 0$, így $\bar{y} = (0, -1, 0)$, $\bar{y}P\bar{y} = 4$.
Ekkor $\vartheta_2 = \frac{-\xi_2}{\bar{y}P\bar{y}} = \frac{1}{4}$; $\vartheta_1 = +\infty$ azaz $\vartheta = \frac{1}{4}$. Az új tábla az alábbi:

$$\begin{array}{l} J_B \cap J_0 \\ J_B \cap J_- \\ J_B \cap J_0 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccc|c|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2,5 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right.$$

$$\left[0 \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad -\frac{5}{4} \quad -\frac{9}{4} \quad -3 \quad \left| \frac{1}{8} \right| 0 \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \right]$$

A tábla redukált és komplementáris. A lineáris részfeladat nem megoldható, mivel

$\xi_3 = -1$; $\tau_{31}, \tau_{33} \geq 0$, így $\bar{y} = (0, 0, -1)$, $\bar{y}P\bar{y} = 4$. Ekkor $\vartheta_2 = \frac{1}{4}$, $\vartheta_1 = \frac{9}{4}$ azaz $\vartheta = \frac{1}{4}$.

Az új tábla az alábbi:

$$\begin{array}{l} J_B \cap J_0 \\ J_B \cap J_- \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccc|c|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1,5 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right.$$

$$\left[0 \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{5}{4} \quad -2 \quad -\frac{13}{4} \quad \left| \frac{1}{4} \right| 0 \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4} \right]$$

A tábla redukált de nem komplementáris.

Ekkor $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x_L = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_L = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $u = (\mu_1, \mu_2)$. Oldjuk meg a $P_L u = x_L$ egyenletet.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 0,5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \\ 0 & 3 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \\ 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \end{array} \right]$$

Van megoldása a $P_L u = x_L$ egyenletrendszernek. A fenti táblából $u = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$.
 Ekkor $\bar{y} = uL = \left(0, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$, $\vartheta_2 = \min\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}, 8\right) = \frac{3}{2}$, $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta = \min\left(1, \frac{3}{2}\right) = 1$.
 Az új tábla az alábbi.

$$J_B \cap J_0 \left\{ \begin{array}{cccccc|c|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c|ccc} 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & -\frac{13}{12} & -\frac{7}{4} & -\frac{10}{3} & \frac{7}{24} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \end{array} \right]$$

A tábla redukált és komplementáris, továbbá $\xi_i \geq 0$, $i \in J_B$ esetén, így optimális megoldásnál vagyunk. Az optimális megoldások $y = \left(0, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{3}\right)$, $x = \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right)$ és $\frac{7}{24}$ az optimális célfüggvény érték.

IRODALOM

- [1] BEALE, E. M. L., "On quadratic programming", *Naval Research Logistics Quarterly* 6 (1959) 227—244.
- [2] BOOT, J. C. G., *Quadratic Programming* (North-Holland P. C., Amsterdam, 1964).
- [3] FRANK, M. and WOLFE, P., "An algorithm for quadratic programming", *Naval Research Logistics Quarterly* 3 (1956) 95—110.
- [4] KLAUSZKY, E. és TERLAKY, T., „Magyar módszer típusú algoritmusok lineáris programozási feladatok megoldására”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 12(1986) 1—14.
- [5] PRÉKOPA, A., *Lineáris Programozás I.* (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968).
- [6] TERLAKY, T., A vége eriss-cross módszer lineáris programozási feladatok megoldására és végességének bizonyítása. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 10(1987) 289—296.
- [7] TERLAKY, T., „Az I_p programozásról”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 6 (1980) 27—63.
- [8] VAN DE PANNE, C., *Methods for Linear and Quadratic Programming* (North-Holland P. C., Amsterdam, 1975).

(Beérkezett: 1986. április 16.)

TERLAKY TAMÁS
 ELTE TTK OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
 1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6—8.

A NEW ALGORITHM FOR QUADRATIC PROGRAMMING

T. TERLAKY

We present a new, finite algorithm for linearly constrained convex quadratic problems. Our algorithm is based on the solution procedures of linear programming [4, 5, 6], however this method does not require the enlargement of the basic tableau as the FRANK—WOLFE [3] method requires.

Starting from a feasible solution, we construct a complementary dual solution. Improving step by step the initial solution we reach an optimal solution if it exists.

Alkalmazott Matematikai Lapok 12 (1986)

NEMLINEÁRIS SOROZATOK LÁDAPAKOLÁSI FELADATOKNÁL

CSIRIK JÁNOS és GALAMBOS GÁBOR

Szeged

Olyan számelméleti sorozatokat mutatunk be, amelyeket különböző ládapakolási feladatok megoldásánál használtak fel. Az ismert eredmények mellett új alkalmazásokat is megadunk.

1. Bevezetés

A cikkben szereplő sorozatokat először H. E. SALZER [12] valós számok reciprok-előállításához használta, a következő módon: Adott $x \in (0, 1)$ -hez legyen a_1 a legkisebb pozitív egész, amelyre $x > \frac{1}{a_1}$. Definiáljuk $i > 1$ -re az $x_{i-1} = x - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{a_j}$ számokat, és legyen a_i az a legkisebb egész, amelyre $x_{i-1} > \frac{1}{a_i}$.

Az ily módon definiált sorozat x egyértelmű előállítását adja $\sum \frac{1}{a_i}$ alakban. Ezt a felbontást SALZER az x valós szám R -kifejtésének nevezte. Az a_i elemek képzése miatt világos, hogy minden R -kifejtésben

$$(1.1) \quad a_{i+1} > a_i^2 - a_i.$$

Könnyen belátható, hogy az (1.1)-nek eleget tevő sorozatok reciprokainak összegei — függetlenül attól, hogy ezek R -kifejtésből származnak vagy sem — konvergensek, ha $a_1 \geq 2$.

SALZER a sorozatokat főképpen algebrai egyenletek gyökeinek közelítő megkeresésére használta. Vizsgálatai során elsősorban az $a_1 = 2$, $a_{i+1} = a_i^2 - a_i + 1$, $i \geq 1$, rekurzív sorozatot alkalmazta, ezért ezt a sorozatot *Salzer-sorozatnak* nevezzük.

16 évvel később GOLOMB [8] különböző, rekurzív módon definiált nemlineáris sorozatok vizsgálatával foglalkozott. Az $r = 1, 2, 3, \dots$ egészekre definiálta a (b_n^r) sorozatokat a következőképpen:

$$(1.2a) \quad b_0^r = 1; \quad b_{n+1}^r = \sum_{i=0}^n b_i^r + r, \quad n \geq 0.$$

GOLOMB — bevezetve a $q = r/2$ jelölést — kimutatta, hogy az (1.2a) definícióval ekvivalensek a következő rekurziók:

$$(1.2b) \quad b_0^r = 1; \quad b_1^r = r + 1; \quad b_{n+1}^r = (b_n^r - q)^2 + 2q - q^2 \quad (n \geq 1),$$

illetve

$$(1.2c) \quad \begin{aligned} b_0^r &= 1; \quad b_1^r = r+1; \\ b_{n+1}^r &= (b_n^r - 1)(b_n^r - (r-1)) + 1 \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

A fenti módon definiált sorozatokról könnyű belátni, hogy a $(b_n^r - r)$ sorozat $(n \geq 1)$ minden tagja osztható az előzővel, és a $\{b_n^r\}$ sorozat tagjai relatív prímek. Cikkének befejező részében GOLOMB utalt arra, hogy a $\{b_n^r\}$ sorozatok széles körben alkalmazhatók számelméleti problémák megoldására. Nem nehéz észrevenni azt a tényt, hogy $r=1$ esetben a *Golomb-féle sorozat* elemei $n=1$ -től megegyeznek a *Salzer-sorozat* elemeivel.

Az 1. táblázatban a $\{b_n^r\}$ sorozatok első néhány értékét adjuk meg különböző r értékekre.

1. TÁBLÁZAT

$r=1$	1	2	3	7	43	1807	3263443
$r=2$	1	3	5	17	257	65537	4294967297
$r=3$	1	4	7	31	871	756031	571580604871
$r=4$	1	5	9	49	2209	4870849	23725150497409
$r=5$	1	6	11	71	4691	21982031	483209576974811

Érdekes módon a fenti sorozatok meghatározó szerepet játszottak különböző ládapakolási feladatok megoldásában. Ilyen feladatokkal modellezhető problémákkal találkozhatunk többek között a számítástudományban, a vezérléstechnikában, szabási feladatok megoldásánál, raktárak megtöltésénél, vagy polcrendszerek tervezésénél. Így a gyors és hatékony algoritmusok felkutatása és elemzése hasznos lehet a különböző alkalmazásoknál. Mivel a ládapakolási feladatok az ún. *NP*-nehéz feladatok közé tartoznak, ezért számos olyan polinominális idejű algoritmust elemeztek, amelyek közelítő megoldásokat szolgáltatnak. Az elemzések során a fenti sorozatok kulcsszerepet tölthettek be.

Ebben a dolgozatban először a sorozatok néhány korábbi alkalmazását mutatjuk be, majd egy új algoritmust ismertetünk, amelynek elemzéséhez a bemutatott sorozatok egy módosítását használjuk fel.

2. Alkalmazások

2.1. Egydimenziós ládapakolási algoritmusok

A klasszikus egydimenziós ládapakolási feladatnál egy $L=(p_1, \dots, p_n)$ lista elemeit akarjuk elrakni minimális számú ládában úgy, hogy a listaelemek $v(p_i)$ $(0 < v(p_i) \leq 1)$ méreteinek összege az egy ládába kerülő tárgyaknál nem lehet nagyobb 1-nél.

Az elmúlt évtizedben számos gyors algoritmust javasoltak a fenti probléma közelítő megoldásának előállítására. Ezek az algoritmusok általában nem szolgáltat-

nak optimális megoldást, de céljuk az, hogy a megoldás egyetlen L lista esetén se távolodjon el „túlságosan” az optimumtól. Az eltávolodás mértékét jól jellemezhetjük az ún. *aszimptotikus hatékonysági hányados* segítségével:

2.1. Definíció. Legyen L egy lista. Jelölje $OPT(L)$ az L lista elemeinek elpakolásához szükséges ládák minimális számát. Legyen A egy olyan algoritmus, amely az L lista elemeit valamilyen módon elpakolja, és jelölje $A(L)$ az A által felhasznált ládák számát. Legyen

$$R_A(k) = \sup \left\{ \frac{A(L)}{OPT(L)} \mid OPT(L) = k \right\}.$$

Ekkor az A algoritmushoz tartozó aszimptotikus hatékonysági hányadost az

$$R_A = \limsup_{k \rightarrow \infty} R_A(k)$$

értékkel definiáljuk.

Most legyen $r \geq 1$ egy természetes szám. Tekintsük azokat a listákat, amelyeknél a listaelemek méreteinek t maximumára $\frac{1}{r+1} < t \leq \frac{1}{r}$ teljesül.

Az ilyen listákat a dolgozatban L_r -rel jelöljük. Egy adott A algoritmusra és az L_r listákra a fentiekhez hasonlóan definiálható az aszimptotikus hatékonysági hányados. Ezt a továbbiakban $R_A\langle r \rangle$ -rel jelöljük, és parametrikus esetnek nevezzük. (Nyilván $R_A\langle r \rangle \leq R_A$ bármely A algoritmus esetén.)

Az egydimenziós ládapakolási feladat egy közelítő megoldásának előállítására alkalmas algoritmusok közül az egyik legegyszerűbb és legkorábban vizsgált az ún. *Next-Fit (NF) algoritmus*: Helyezzünk el a p_1, p_2, \dots elemekből (előlről kezdve egymás után) az első (B_1) ládában annyit, amennyi elfér. Tegyük fel, hogy a p_1, \dots, p_i elemek fértek el B_1 -ben, és $i < n$. Ekkor a p_{i+1}, \dots, p_n elemekből helyezzünk el sorban a B_2 ládában annyit, amennyi elfér benne, majd folytassuk ezt az eljárást mindaddig, amíg a lista összes elemét el nem pakoltuk. Könnyen belátható, hogy *NF* algoritmus futási ideje $O(n)$.

Jól ismert [9], hogy $R_{NF} = 2$.

Az *NF algoritmus* az éppen soron következő tárgyat csak a legutoljára megnyitott ládába kísérel meg elpakolni. Ha a kísérleteket „kiterjesztjük” minden olyan ládára, amelybe már pakoltunk elemet, jobb eredményt várhatunk. Valóban, az ún. *First-Fit (FF) algoritmus* (amely előlről kezdve minden már megnyitott ládába megpróbálja elhelyezni az aktuális tárgyat, és az első olyanba, amelyikbe befér, el is helyezi azt) aszimptotikus hatékonysági hányadosa: $R_{FF} = 17/10$ ([9]).

Az *FF algoritmus* futási ideje $O(n \log n)$.

A fenti algoritmusok *on-line* algoritmusok abban az értelemben, hogy egy időben mindig csak egy tárgy elpakolását kísérik meg anélkül, hogy a magasabb indexűek (később érkezők) méretéről és számáról bármit is tudnának. Abban az esetben, ha a pakolás megkezdése előtt rendezhetjük a lista elemeit, akkor azt várhatjuk, hogy jobb aszimptotikus hatékonysági hányadost kapunk. Egy ilyen algoritmust elemzett BAKER és COFFMAN [2]. Elgondolásuk lényege az volt, hogy először rendezték az elpakolandó lista elemeit monoton csökkenő sorrendbe, majd az így létrejött listára alkalmazták az *NF szabályt*. (Ez az algoritmus tehát nem *on-line*!). Algoritmusukat *Next-Fit Decreasing*-nek (*NFD*) nevezték. Könnyű látni, hogy az

NFD algoritmus futási ideje $O(n \log n)$. Az *NFD algoritmus* vizsgálatánál találkozhattunk először a *Salzer-típusú* sorozatokkal. Igaz ugyanis a következő:

2.1. TÉTEL (BAKER, COFFMAN, 1981).

$$R_{NFD}\langle r \rangle = \frac{r-1}{r} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{t_j(r)-1} = \gamma_r^*,$$

ahol $t_j(r)$ a *Golomb-féle sorozat* következő módosítása:

$$t_1(r) = r + 1, \quad t_j(r) = 1 + \prod_{i=1}^{j-1} t_i(r) \quad (j = 2, 3, \dots).$$

A $t_j(r)$ sorozatot a továbbiakban *Baker-féle sorozatnak* nevezzük.

Tételük bizonyítása jó példája a — ládapakolási algoritmusok vizsgálatánál gyakran használt — súlyfüggvényes technikának. E technika lényege az, hogy a p_i tárgyakhoz, méretüktől függően, egy $W(p_i)$ súlyt rendelünk, majd a listában szereplő elemek összsúlyára, $W(L) = \sum_{p_i \in L} W(p_i)$, két egyenlőtlenséget bizonyítunk:

$$(2.1a) \quad A(L) - K \leq W(L), \quad (K \text{ konstans})$$

$$(2.1b) \quad W(L) \leq \alpha \cdot OPT(L) \quad (\alpha \text{ konstans}).$$

Világos, hogy a két egyenlőtlenségből $R_A \leq \alpha$. Az egyenlőtlenség élessége ezek után úgy bizonyítandó, hogy megkonstruálunk egy olyan listasorozatot, amelyre az *A algoritmus* pontosan az optimális ládaszám α -szorosát használja el.

BAKER és COFFMAN az *NFD algoritmusra* a következő súlyfüggvényt alkalmazta: Tegyük fel, hogy L_r listákat vizsgálunk. Ekkor azokra a p_i elemekre, amelyekre $v(p_i) \in (1/(k+1), 1/k]$, legyen

$$(2.2) \quad W(p_i) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ha } k = t_j(r) - 1 \text{ valamely } j = 1, 2, \dots \text{-re} \\ \frac{k+1}{k} v(p_i), & \text{különben.} \end{cases}$$

Erre a súlyfüggvényre az alábbi lemmákat bizonyították:

2.1. LEMMA. Bármely L_r listára $W(L_r) \leq NFD(L_r) - 3$.

2.2. LEMMA. Bármely L_r listára

$$W(L_r) \leq \frac{r-1}{r} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{t_j(r)-1} OPT(L_r).$$

A nemlineáris sorozatok egy újabb, szép alkalmazásával találkozunk az ún. *Harmonikus-Fit (HF) algoritmus* elemzésekor. Ezt az algoritmust C. C. LEE és D. T. LEE [10] javasolták, lényege a következő:

Legyen $L = (p_1, \dots, p_n)$ egy lista, és legyen adott egy M pozitív egész szám. Osszuk a $(0, 1]$ intervallumot M részintervallumra: $I_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, $1 \leq k < M$ és

$I_M = \left(0, \frac{1}{M}\right]$. Egy olyan listaelemet, amelyre $v(p_i) \in I_k$, I_k -elemnek nevezzük. A felhasználandó ládákat is M osztályba soroljuk: egy I_k -láda csak I_k -elemeket fogadhat be. Az algoritmus először M üres ládát nyit meg (minden részintervallumhoz egyet). Ha a listában soron következő elem I_k -elem, akkor a *HF algoritmus* megpróbálja elhelyezni ezt az utoljára megnyitott I_k -ládában. Ha abban nem fér el, akkor nyit egy új ilyen típusú ládát és abban helyezi el az elemet (vagyis az egyes részintervallumokon belül *NF pakolást* végez).

A *Salzer-sorozat*ot felhasználva [10]-ben bebizonyították, hogy $R_{HF} = \gamma_1^* = 1,6901$, ha $M \geq 5$.

A *HF algoritmus* futási ideje $O(n)$, és ez az algoritmus *on-line*. Könnyű belátni, hogy itt az $O(n)$ futási időt azzal sikerült biztosítani, hogy egyidejűleg csak korlátos számú (M) ládát tartottunk nyitva.

C. C. LEE és D. T. LEE ugyanebben a dolgozatban a *HF algoritmusnak* egy második változatát is elemezték; ebben a módosításban az $(1/3, 1/2]$, ill. $(1/2, 1]$ intervallumokat további két-két részre bontották, és a két „kisebb” részintervallumba eső elemeket egy újabb lád sorozatban helyezték el. Az új algoritmus továbbra is *on-line*, és aszimptotikus hatékonysági hányadosa $1,636\dots$.

Ezek után kézenfekvő az a kérdés, hogy milyen alsó korlátot adhatunk az *on-line algoritmusokra*, ha egyéb kikötést nem teszünk?

Nemlineáris sorozatokat *on-line algoritmusok* alsó korlátjának becslésére először F. M. LIANG [11] alkalmazott. Ő olyan L^i részlistákat tekintett, amelyek n darab $\frac{1}{b_i^i} + \varepsilon$ nagyságú elemet tartalmaztak. (Itt b_i^i a *Salzer-sorozat* i -edik eleme.)

LIANG a következő tételt bizonyította be:

2.2. TÉTEL (LIANG, 1981). Bármely A *on-line algoritmusra*

$$R_A \cong \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^k \frac{j}{b_j^j - 1}}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{b_j^j - 1}} \approx 1,5363\dots$$

A *Baker-sorozat*ok felhasználásával hasonló tétel bizonyítható az L_r sorozatok esetére is (parametrikus alsó korlát):

2.3. TÉTEL (GALAMBOS, G., 1986). Bármely A *on-line algoritmusra*:

$$R_A \langle r \rangle \cong \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \sum_{j=2}^k \frac{j}{t_j(r) - 1}}{1 + \sum_{j=2}^k \frac{1}{t_j(r) - 1}}.$$

Megjegyzés. Mivel az $r=1$ esethez tartozó *Baker-sorozat* megegyezik a *Salzer-sorozattal*, ezért az utolsó tétel — speciális esetként — tartalmazza a *Liang-féle alsó korlátot* is.

(Néhány érték az *on-line* alsó korlátra: $R_A \langle 1 \rangle = 1,5363\dots$, $R_A \langle 2 \rangle = 1,365\dots$, $R_A \langle 3 \rangle = 1,274\dots$, $R_A \langle 4 \rangle = 1,219\dots$.)

Az ilyen jellegű tételek bizonyítása alapgondolatának megértéséhez tekintsük a következő egyszerű példát:

Legyen az L^1 lista olyan, hogy $\frac{1}{2} - \varepsilon$ nagyságú elemekből n darabot tartalmaz, az L^2 pedig $\frac{1}{2} + \varepsilon$ -ből tartalmazzon n -et. Ekkor világos, hogy $OPT(L^1) = n/2$ és $OPT(L^1 L^2) = n$, ahol $L^1 L^2$ -vel a két lista konkatenálásával keletkezett listát jelöljük. Legyen A egy tetszőleges algoritmus. Pakoljuk el L^1 elemeit A segítségével: tegyük fel, hogy A úgy pakolja el L^1 -et, hogy x darabot helyez el külön-külön ládában, a többieket pedig párosával. Ekkor $A(L^1) = \frac{n+x}{2}$, és így $A(L^1)/OPT(L^1) = \frac{n+x}{n}$. Amikor viszont $L^1 L^2$ -re alkalmazzuk az A algoritmust, akkor — éppen mert *on-line* — ezt az elrakást fogja folytatni: A legjobb esetben is csak annyit tehet, hogy L^2 elemei közül x darabot berak a „magányos” L^1 -beli elemek mellé, a maradék elemeket egyesével kell külön-külön ládába raknia. Így $A(L^1 L^2) \cong \frac{3n-x}{2}$. Ezért

$$(2.3) \quad R_A \cong \min \left(\max \left\{ \frac{A(L^1)}{OPT(L^1)}, \frac{A(L^1 L^2)}{OPT(L^1 L^2)} \right\} \right) = \frac{4}{3}.$$

2.2. Kétdimenziós pakolások

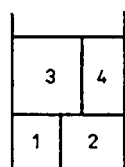
A bemutatott sorozatokat felhasználták magasabb dimenziójú ládapakolási feladatokra vonatkozó algoritmusok elemzésénél is. Tekintsük a következő problémát:

2.2. Definíció (csípkakolási feladat). Adott téglalapoknak egy listája és egyetlen egy olyan láda, amelynek a szélessége 1, a magassága végtelen. Csípkakoláson azt a feladatot értjük, amelyben a téglalapokat úgy kell ládába pakolni, hogy

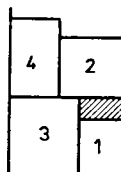
- I. azok nem fedhetik egymást,
- II. oldaluknak párhuzamosnak kell lenni a láda oldalaival,
- III. az elpakolásakor a téglalapok nem forgathatók.

A cél az, hogy a ládát a lehető legkisebb magasságig pakoljuk.

Ilyen jellegű feladatokkal találkozhatunk például a papíriparban, ahol — egy gyakorlatilag végtelen — szalagból kell kivágni kisebb téglalapokat hullámpapír dobozokhoz, vagy a számítástudományban, ahol a szélesség reprezentálja a memória-kapacitást, a magasság pedig az egyes jobok futási idejét.



optimális pakolás



lehetséges pakolás

1. ábra

A *Salzer-sorozat* elemeinek felhasználásával D. J. BROWN, B. S. BAKER és H. D. KATSEFF [3] a következő tételt bizonyította be:

2.4. TÉTEL (BROWN, BAKER, KATSEFF, 1982). Bármely *on-line* csípkolási algoritmusra $R_A > 1,536 \dots$

Megjegyzés. [6]-ból kiindulva nem nehéz belátni az egydimenziós esethez hasonló parametrikus alsó korlát egyezését is.

Számos olyan csípkolási algoritmus van, amely előírja azt, hogy a tárgyak valamelyik méretük szerint rendezettek legyenek. Az ilyen algoritmusok futási ideje legalább $O(n \log n)$. Ezek az algoritmusok nem *on-line algoritmusok*. Az *on-line algoritmusok* egy szellemes csoportját alkotják az ún. *polc-pakolási algoritmusok*: tekintsük a valós számok valamely $(1 =) m_1 > m_2 > \dots (> 0)$ végtelen sorozatát. Az aktuális tárgy — $p_i = (h(p_i), w(p_i))$ — elpakolása előtt vizsgáljuk meg, hogy melyik j -re teljesül $m_{j+1} < h(p_i) \leq m_j$, és p_i -t — az algoritmustól függő szabály szerint — (a csíkban kialakított) m_j magasságú polcon helyezük el.

Ilyen algoritmusok elemzésével foglalkozott [1]-ben B. S. BAKER és S. J. SCHWARTZ. Ők a *First-Fit Shelf (FFS)* és a *Next-Fit Shelf (NFS)* algoritmusokat vizsgálták. Ezeknél az algoritmusoknál az $\{m_i\}$ sorozatok kialakítása a következőképpen történt: mind az *FFS*, mind az *NFS* algoritmusokhoz hozzárendeltek egy $q < 1$ paramétert úgy, hogy az egyes polcok magassága q^k lehetett ($k = 0, 1, 2, \dots$). Az *NFS* algoritmus q paraméter esetén (NFS_q) a soron következő téglalapot (p_i) csak a legfelső — legutoljára megnyitott — olyan polcon kísérli meg elhelyezni (balra tolva), amelynek magasságára $q^{j+1} < h(p_i) \leq q^j$. Az *FFS* algoritmus hasonló, azzal a különbséggel, hogy a tárgyat abban a legalsó q^j magasságú polcon helyezük el, amelyikben még elfér. Mindkét algoritmus akkor jelöl ki új polcot, ha a már kijelölt polcokon az elhelyezési kísérlet sikertelen. Ezekre az algoritmusokra éles aszimptotikus hatékonysági hányadost nem számítottak ki, csupán alsó korlátot szolgáltatott rá. Egyik érdekes eredményük a következő:

2.5. TÉTEL (BAKER, SCHWARZ, 1983). Legyen $0 < q < 1$, és legyen L négyzeteknek egy tetszőleges listája. Ekkor

a) ha q nem gyöke $\frac{1}{3}$ -nak vagy $\frac{1}{6}$ -nak, akkor $R_{FFS_q} \geq 1,7$,

b) ha q gyöke $\frac{1}{3}$ -nak vagy $\frac{1}{6}$ -nak, akkor $R_{FFS_q} \geq 1,691 \dots$

Itt a tétel b) állításának bizonyításához használták a *Baker-sorozatot*.

Ezek után már nem meglepő, hogy a kétdimenziós ládapakolási feladat közelítő megoldására kialakított algoritmusok elemzésénél is alkalmazhatók a *Salzer-típusú sorozatok*. E probléma a következő:

2.3. *Definíció* (kétdimenziós pakolási feladat). Adva van téglalapoknak egy L sorozata, amelyeket el akarunk helyezni $H \times W$ -s ládákban. (A téglalapok $h(p)$ magasságára és $w(p)$ szélességére igaz, hogy $0 < h(p) \leq H$ és $0 < w(p) \leq W$.) Az elpakolásnak eleget kell tenni a csípkolásnál megadott I—II—III feltételeknek.

A cél az, hogy a lehető legkevesebb ládát használjuk fel az L lista elemeinek elpakolására.

Ez a probléma is *NP*-nehéz. Viszonylag kevesebb eredményt ismerünk a feladat közelítő megoldására: [4]-ben egy olyan algoritmust elemezték, amely az *FF*

és *FFD* egydimenziós algoritmusokon alapul. Ez az algoritmus — *Hybrid First-Fit (HFF)* — $O(n \log n)$ futási idejű és aszimptotikus viselkedésére a következő egyenlőtlenségeket bizonyították be:

$$(2.4) \quad \frac{182}{90} \leq R_{HFF} \leq \frac{17}{8}.$$

(Az algoritmus pontos leírását lásd [4]-ben.)

Az *NF algoritmus* mintájára megszerkesztettük az ún. *Hybrid Next-Fit (HNF) algoritmust* a probléma egy közelítő megoldására [5], [7]. Az algoritmus a következő:

1. Rendezzük az L lista elemeit magasság szerint csökkenő sorrendbe.
2. Vegyük az első elemet a listából, és tegyük bele az első ládába úgy, hogy egy blokkot jelöljünk ki a magasságával.

3. Vegyük a lista soron következő elemeit, és próbáljuk elhelyezni az utoljára megnyitott blokkban. Ha nem sikerül, akkor az adott ládán belül nyissunk egy új blokkot, ha ez lehetséges. Ha erre nincs hely, akkor nyissunk egy új ládát egy új első blokkal.

4. Nézzük meg, hogy van-e még elpakolatlan elemünk. Ha nincs több elem, akkor az algoritmus véget ér. Ellenkező esetben ugorjunk az algoritmus 3. pontjára.

Erre az algoritmusra a következő tételt bizonyítottuk be [7]:

2.6. TÉTEL (GALAMBOS, G., 1984). Ha az L listában levő téglalapok méretére $\frac{1}{s+1} < \max_{p \in L} h(p) \leq \frac{1}{s}$ és $\frac{1}{r+1} < \max_{p \in L} w(p) \leq \frac{1}{r}$ teljesül, akkor

$$R_{HNF}(r, s) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \gamma_s^*,$$

ahol

$$\alpha = \begin{cases} 2, & \text{ha } r = 1, \\ r & \text{különben.} \end{cases}$$

(Néhány érték: $R_{HNF}(1, 1) = 3,38$, $R_{HNF}(1, 2) = R_{HNF}(2, 2) = 2,86$, $R_{HNF}(3, 2) = 2,604$, $R_{HNF}(2, 3) = 2,2345$.)

A tétel bizonyítását a súlyfüggvényes technikával végeztük el. Egy olyan súlyfüggvényt használtunk, amelynek kialakítása a *Baker-sorozat*ok alapján történt.

3. Salzer-típusú sorozatok vektor-pakolási feladatoknál

Az előző fejezetben bemutatott „klasszikus” egydimenziós pakolási feladatnak csak egyik fajta kiterjesztése a téglalapok megtöltése. A továbbiakban egy másik lehetséges kiterjesztést ismertetünk, majd ennek megoldására egy olyan közelítő algoritmust mutatunk be, amelynek elemzésénél a *Baker-féle sorozatokat* használ-tuk fel.

A klasszikus egydimenziós pakolási feladatban a lista elemeinek súlya skaláris mennyiség. A vektorkitolási feladatban a súlyt vektornak tekintjük: $v(p) = (v_1(p), v_2(p), \dots, v_d(p))$. A ládakapacitások is d dimenziós vektorok. A cél az, hogy pakoljuk el a tárgyakat minimális számú ládába úgy, hogy az egy ládába kerülő

tárgyaknál az azonos indexű súlyok összege nem lépheti túl a ládakapacitás megfelelő indexű elemének értékét.

A fenti problémával modellezhető az egységnyi hosszúságú *task*okkal rendelkező multiprocesszoros vezérlés, de ilyen jellegű feladatokat kell megoldani olyan ládapakolási feladatok esetében is, amikor az adott ládák megtöltésére korlátozott idő áll rendelkezésre.

A továbbiakban a kétdimenziós vektorpakolási feladattal foglalkozunk, és az egyszerűbb tárgyalhatóság kedvéért feltételezzük, hogy a ládák mindkét irányú kapacitása egyenlő eggyel. Megjegyezzük, hogy a kétdimenziós vektorpakolási probléma eltér az előző fejezetben tárgyalt téglalap pakolási feladattól. Az utóbbi feladat téglalapok „hétköznapi” értelemben vett lefedését jelenti, míg a vektorpakolásnál a lista elemei úgy vannak elhelyezve a ládákban, hogy csak sarkaikkal érintkeznek. Egy szemléltető példát mutat a 2. ábra.



2. ábra

A következőkben egy $O(n \log n)$ időbonyolultságú algoritmust ismertetünk, és éles korlátot bizonyítunk az algoritmus aszimptotikus hatékonysági hányadosára.

A feladat közelítő megoldását a *HNF algoritmus* vektorpakolásra történő alkalmazásával keressük. Algoritmusunk a következő:

1. Rendezzük az L lista elemeit súlyaik második koordinátája szerint csökkenő sorrendbe.

2. Vegyük az első elemet a listából, és tegyük bele az első ládába.

3. Vegyük a lista soron következő elemét, és próbáljuk elhelyezni az utoljára nyitott ládába. Ha az aktuális tárgy elhelyezésével valamelyik koordinátára a ládában levő súlyok összege nagyobb, mint 1, akkor ezt telinek deklaráljuk és új ládát nyitunk. Az egyszer telinek deklarált ládába többet már nem pakolunk.

4. Nézzük meg, hogy van-e még elpakolatlan elemünk. Ha nincs több elem, akkor az algoritmus véget ér. Ellenkező esetben ugorjunk az algoritmus 3. pontjára.

Algoritmusunkat *HNFV*-vel jelöljük. Legyen $L_{r,s}$ egy olyan lista, amelyre

$$\frac{1}{r+1} < \max_{p_i \in L_{r,s}} v_1(p_i) \leq \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{s+1} < \max_{p_i \in L_{r,s}} v_2(p_i) \leq \frac{1}{s}.$$

Ha az egydimenziós esethez hasonlóan $R_{HNFV}(r, s)$ -sel jelöljük az ezen listához tartozó aszimptotikus hatékonysági hányadost, akkor érvényes a következő állítás:

$$3.1. \text{ TÉTEL. } R_{HNFV}(r, s) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \gamma_s^*.$$

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy megadható a listáknak egy olyan sorozata, amellyel a tételben szereplő aszimptotikus hányados tetszőleges pontossággal megközelíthető. Legyen k pozitív egész. Definíáljuk a δ_1 , δ_2 , δ_3 konstansokat a következőképpen:

$$0 < \delta_1 < \frac{1}{(s+k-1)(t_{k+1}(s)-1)},$$

$$0 < \delta_2 < \left[1 - \left(\frac{s-1}{s+1} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i(s)} + (s+k-1)\delta_1 \right) \right],$$

$$\delta_3 = \frac{\delta_2}{\alpha}.$$

Válasszunk egy olyan m egész számot, amelyre $0 < m \leq \frac{\alpha-1}{\delta_2}$, $k \leq m$ teljesül, továbbá $\frac{m\alpha}{\alpha-1}$ egész (elég kicsi δ_2 mellett ezen feltételek teljesíthetők). Végül legyenek ε_1 , ε_2 , ε_3 olyan valós számok, hogy

$$0 < (s+k-1)\varepsilon_3 < \alpha\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \min\left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{\alpha-1}{m\alpha}\right) < 1.$$

Megadott m , k , r , s értékekre jelöljük $L_{r,s}(m, k)$ -val a következő listát (az első koordinátát szélességnek, a másodikat magasságnak nevezzük): $r \geq 2$ -nél $m(s-1)$ darab A -elem, $\left(\varepsilon_3, \frac{1}{s+1} + \delta_1\right)$ koordinátákkal; m darab B_i -elem $\left(\varepsilon_3, \frac{1}{t_i(s)} + \delta_1\right)$ koordinátákkal ($i=1, \dots, k$); $m\alpha$ darab C -elem $\left(\frac{1}{\alpha} - \varepsilon_1, \delta_3\right)$ koordinátákkal és $\frac{m\alpha}{\alpha-1}$ D -elem $(\varepsilon_2, \delta_3)$ koordinátákkal. $r=1$ esetén válasszuk ugyanezen A és B_i elemeket, viszont vegyünk m darab C elemet $(1-\varepsilon_3, \delta_2)$, és m darab D elemet $(2\varepsilon_2, \delta_2)$ koordinátákkal.

3.1. LEMMA. $m \cdot \frac{s}{s+1} \leq \text{OPT}(L_{r,s}(m, k)) \leq m+1$.

Bizonyítás. Helyezzünk egy ládába $(s-1)$ A -elemet, egy-egy B_i -elemet ($i=1, 2, \dots, k$) és r darab C -elemet. Ez lehetséges, hiszen

— a magasságok összege:

$$\frac{s-1}{s+1} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i(s)} + (s+k-1)\delta_1 + \alpha\delta_3 < 1,$$

— a szélességek összege:

$$(s+k-1)\varepsilon_3 + 1 - \alpha\varepsilon_1 < 1.$$

Így az A -, B_i - és C -elemek elpakolhatók m ládában. Mivel a D -elemek elhelyezhetők egyetlen ládában, ezért a jobb oldali egyenlőtlenség igaz. A bal oldalt az összes elem magasságának összegezésével kapjuk meg.

3.2. LEMMA.

$$HNFV(L_{r,s}(m, k)) \cong m \left(1 + \sum_{i=2}^k \frac{1}{t_i(s)-1} \right) + \frac{m\alpha}{\alpha-1} - 2k.$$

Bizonyítás. Rendezzük az elemeket magasságuk szerint csökkenő sorrendben a következőképpen:

1. $m(s-1)$ darab A -elem.
2. m darab B_i elem ($i=1, 2, \dots, k$).
3. $(\alpha-1)$ darab C -elem, egy darab D -elem. Ez a részsorozat ismétlődjön $\frac{m\alpha}{\alpha-1}$ -szer. ($r=1$ -nél egy darab C -elem, egy darab D -elem ismétlődjön m -szer.)

Most használjuk a *HNFV algoritmust* az elemek elpakolásához: az $m(s-1)$ darab A -elemet és a B_1 -elemeket m ládába helyezi el az algoritmus. A B_i -elemek legalább $\frac{m}{t_i(s)-1} - 2$ ládát töltenek meg. Az utolsó részsorozatok pontosan $\frac{m\alpha}{\alpha-1}$ ládát használnak el.

Ekkor

$$\frac{HNFV(L_{r,s}(m, k))}{OPT(L_{r,s}(m, k))} \cong \frac{m \left(1 + \sum_{i=2}^k \frac{1}{t_i(s)-1} + \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)}{m+1} = \gamma_s^* + \frac{\alpha}{\alpha-1} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

A bizonyítás második felében azt látjuk be, hogy tetszőleges $L_{r,s}$ listára:

$$HNFV(L_{r,s}) \leq \left(\gamma_s^* + \frac{\alpha}{\alpha-1} \right) OPT(L_{r,s}) + 4.$$

Definiáljuk a $W(p)$ súlyfüggvényt minden $p \in L_{r,s}$ -re a következő módon.

Ha $\frac{1}{k_1+1} < v_1(p) \leq \frac{1}{k_1}$, $\frac{1}{k_2+1} < v_2(p) \leq \frac{1}{k_2}$, valamely k_1 és k_2 pozitív egészek-re, akkor legyen

$$W_1(p) = \frac{\alpha}{\alpha-1} v_1(p)$$

$$W_2(p) = \begin{cases} \frac{1}{k_2}, & \text{ha } k_2 = t_i(s)-1, \text{ valamely } i = 1, 2, \dots \text{-re,} \\ \frac{k_2+1}{k_2} v_2(p) & \text{különben,} \end{cases}$$

továbbá

$$W(p) = \max \{W_1(p), W_2(p)\}.$$

Legyen Q az $L_{r,s}$ lista egy tetszőleges részlistája. Ekkor a következő jelölést fogjuk használni:

$$W(Q) = \sum_{p \in Q} W(p).$$

3.3. LEMMA. Bármely $L_{r,s}$ listára

$$W(L_{r,s}) \geq HNFV(L_{r,s}) - 4.$$

Bizonyítás. Pakoljuk el az $L_{r,s}$ lista elemeit a *HNFV algoritmus*ssal. Vizsgáljuk először az $r \geq 2$ esetet. Osszuk a felhasznált ládákat két csoportba: egy ládát nevezünk $V(H)$ ládának, ha azért deklaráltuk telinek, mert a következő tárgy szélessége (magassága) miatt nem fért a ládába. Minden V láda legalább $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ szélességig

tele van, ezért a benne levő elemek összsúlya $\geq \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1} = 1$. Jelöljük a H ládákban levő elemek halmazát $L_{r,s}^H$ -val. Ekkor a 2.1. lemma miatt

$$W(L_{r,s}^H) \geq W_2(L_{r,s}^H) \geq HNFV(L_{r,s}^H) - 3,$$

ami a V ládák súlyára vonatkozó megjegyzésünk miatt (az utoljára nyitott, általában nem tele láda figyelembevételével) éppen a 3.3. lemma állítását jelenti.

Az $r=1$ esetben az előző gondolatmenetet kissé módosítanunk kell: most azt használjuk fel, hogy két egymást követő V ládában vagy az egymást követő VH ládapárookban az elemek súlyának összege ≥ 2 . Induljunk el az első V ládától, és hagyjuk el az összes egymást követő VV és VH párokat. A visszamaradt H ládákban levő elemekre újra alkalmazhatjuk a 2.1. lemmát.

3.4. LEMMA.

$$W(L_{r,s}) \leq \left(\gamma_s^* + \frac{\alpha}{\alpha-1} \right) OPT(L_{r,s}).$$

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy bármely ládában az elhelyezett tárgyak összsúlya nem lehet nagyobb, mint $\gamma_s^* + \alpha/(\alpha-1)$. Egy tetszőlegesen pakolt B ládában az elemeket osszuk két csoportra: $L_{r,s}^1$ -be tartozzanak azok az elemek, amelyekre $W_2(p) \geq W_1(p)$, $L_{r,s}^2$ -be pedig azok az elemek, amelyekre $W_1(p) > W_2(p)$.

A 2.2. lemma szerint $W(L_{r,s}^1) \leq \gamma_s^*$. Másrészt $W(L_{r,s}^2) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Így, ha $W(B)$ -vel jelöljük a B ládában levő tárgyak súlyának az összegét, akkor

$$W(B) = W(L_{r,s}^1) + W(L_{r,s}^2) \leq \gamma_s^* + \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Ezzel a 3.1. tétel bizonyítását befejeztük.

4. Összefoglalás

Dolgozatunkban áttekintettük azokat a ládapakolási feladatokat, amelyek közelítő megoldása során nemlineáris számelméleti sorozatok alkalmazhatók. Ismertettünk egy *Next-Fit típusú algoritmust* a kétdimenziós vektorpakolási feladatok közelítő megoldására. Ez az algoritmus jól alkalmazható abban az esetben, amikor az elpakolandó tárgyakat módunk van rendezni, de a „teli” ládák *on-line* módon távoznak a rendszerből. Algoritmusunk könnyen általánosítható magasabb dimenzióra is.

A dolgozatban bemutatott sorozatok valószínűleg alkalmazhatók magasabb dimenziójú ládapakolási feladatok általános vizsgálatára is. Egy másik lehetséges kutatási irány annak a vizsgálata, hogy hogyan alakul egy algoritmus aszimptotikus hatékonysági hányadosa, ha a tárgyak méretei alulról korlátozottak a ládapacitásokhoz viszonyítva.

IRODALOM

- [1] BAKER, B. S. and SCHWARTZ, J. S., "Shelf algorithms for two-dimensional packing problems", *SIAM Journal on Computation* **12** (1983) 508—525.
- [2] BAKER, B. S. and COFFMAN, JR., E. G., "A tight asymptotic bound for next-fit decreasing bin-packing", *SIAM Journal on Alg. Disc. Methods* **2** (1981) 147—152.
- [3] BROWN, D. J., BAKER, B. S. and KATSEFF, H. P., "Lower bounds for on-line two dimensional packing algorithms", *Acta Informatica* **18** (1982) 207—225.
- [4] CHUNG, F. R. K., GAREY, M. R. and JOHNSON, D. S., "On packing two-dimensional bins", *SIAM Journal on Alg. Disc. Methods* **3** (1982) 66—75.
- [5] GALAMBOS, G., TURÁN, GY. and CSIRIK, J., "Some results on bin packing", Presented at EURO VI. 1983, Vienna.
- [6] GALAMBOS, G., "Parametric lower bound for on-line bin-packing", *SIAM J. Alg, Disc, Methods* **7**(1986) 362—367.
- [7] GALAMBOS, G., "Hybrid next fit algorithm for the two-dimensional bin-packing problem".
- [8] GOLOMB, S. W., "On certain nonlinear recurring sequences", *American Mathematical Monthly* **70** (1963) 403—405.
- [9] JOHNSON, D. S., "Fast algorithms for bin-packing", *Journal of Computation and System Sciences* **8** (1974) 272—314.
- [10] LEE, C. C. and LEE, D. T., "A simple on-line packing algorithm", *Journal of the ACM* **32** (1985) 562—572.
- [11] LIANG, F. M., "A lower bound for on-line bin-packing", *Inf. Proc. Letters* **10** (1980) 76—79.
- [12] SALZER, H. E., "The approximation of numbers as sums of reciprocals", *American Mathematical Monthly* **54** (1947) 135—142.

(Beérkezett: 1985. december 27.)

CSIRIK JÁNOS
JATE SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI TANSZÉK
6720 SZEGED, ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

GALAMBOS GÁBOR
JATE KALMÁR LÁSZLÓ KIBERNETIKAI LABORATÓRIUM
6720 SZEGED, ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

NONLINEAR SEQUENCES FOR BIN-PACKING

J. CSIRIK and G. GALAMBOS

There are given some number theoretical sequences which were applied for the solution of bin-packing problems. New applications are also given.

OSZCILLÁLÓ REAKCIÓK ELŐÁLLÍTÁSA LINEARIZÁLTJUKBÓL

TÓTH JÁNOS és HÁRS VERA

Budapest

Megmutatjuk, hogy a *Lotka—Volterra-modell* egyértelmű a vele azonos linearizált kinetikai differenciálegyenlettel rendelkező legegyszerűbb modellek között. Azt is bebizonyítjuk, hogy a redukált explodátor a vele azonos linearizált kinetikai differenciálegyenlettel rendelkező legegyszerűbb modellek osztályán belül nem egyértelmű: négy olyan modell van, amelyeknek ugyanolyan a linearizált alakja.

1. Bevezetés

HANUSSE [5], TYSON és LIGHT [11], valamint PÓTA [7] vizsgálataiból kiderült, hogy a kétkomponensű bimolekuláris rendszerek között csak egy oszcillátor van: a *Lotka—Volterra-modell*. Felmerült a következő kérdés: igaz-e az is, hogy ez az egyetlen modell a legegyszerűbb olyan modellek között, amelyeknek ugyanaz a linearizáltjuk a saját egyensúlyi pontjuk körül? Ez a kérdés a fentitől nemcsak matematikai szempontból, hanem kémiai tartalmában is különbözik.

Matematikai szempontból: kissé más feltételek mellett bizonyítjuk, hogy a *Lotka—Volterra-modell* az egyetlen lehetséges kétkomponensű bimolekuláris oszcillátor. Megmutatjuk azt is, hogy FARKAS, NOSZTICZIUS, SAVAGE és SCHELLY [4] redukált explodátor modellje majdnem ugyanannyira egyedi a saját osztályán belül. A kémiai nézőpont még gyümölcsözőbb: vizsgálataink az *oszcilláló reakciók tervezésének* területéhez kapcsolódnak. Az e területen végzett kísérleti munkáról EPSTEIN [2] cikke nyújt jó áttekintést, míg SCHNAKENBERG [8], ESCHER [3] és CSÁSZÁR és munkatársai [1] cikkei az elméleti tevékenységbe engednek bepillantást. Itteni eredményeink úgy is megkaphatók, mint egy vegyes-egészértékű programozási feladat megoldásai [10]. Ez a megfogalmazás lehetővé teszi egy sokat ígérő módszer konstrukcióját, amelynek segítségével előre megadott típusú irregularitással rendelkező kémiai modellek tervezhetők, például több egyensúlyi ponttal rendelkezők vagy lokálisan vezérelhetők, stb.

Ha a (k, n) képlet több részből áll, akkor részeire a (k, na) , (k, nb) stb. jellel hivatkozunk.

2. A Lotka—Volterra-modell egyértelműsége

Pontosan megfogalmazva kérdésünk a következő. Tekintsük a *Lotka—Volterra-modell*

$$(2.1) \quad \dot{x} = x - xy, \quad \dot{y} = xy - y$$

linearizált alakját:

$$(2.2) \quad \dot{\xi} = -\eta, \quad \dot{\eta} = \xi.$$

Melyik a legegyszerűbb kétváltozós kinetikai differenciálegyenlet, amelyiknek az egyensúlyi pontja körüli linearizáltja (2.2)?

Kinetikai alatt azt értjük, hogy a differenciálegyenletet a negatív kereszthatást [9] nem tartalmazó polinomiális egyenletek között keressük. A negatív kereszthatás jelenléte szemléletesen olyan tag jelenlétét jelenti a differenciálegyenlet jobb oldalán, amelyik egy komponens fogyását fejezi ki egy olyan reakcióban, amelyikben az adott komponens nem vesz részt. A (2.2) egyenlet példát mutat nemkinetikai (polinomiális, hiszen lineáris) egyenletre: a $-\eta$ tag ξ fogyását fejezi ki egy olyan folyamatban, amelyben ξ nem vesz részt. Formálisan megfogalmazva arról van szó, hogy ha $K, M \in \mathbb{N}$ rögzített természetes szám és bevezetjük a következő jelöléseket:

$$|i| := \sum_{m=1}^M i_m, \quad \text{ha } i \in N_0^M;$$

$$x^i := \prod_{m=1}^M x_m^{i_m}, \quad \text{ha } x \in \mathbb{R}^M;$$

akkor az

$$\dot{x}_m = \sum_{\substack{i \in N_0^M \\ |i| \leq K}} a_i^m x^i \quad (m = 1, \dots, M; a_i^m \in \mathbb{R} \text{ rögzített valós számok})$$

egyenletben nincs negatív kereszthatás, ha $a_i^m < 0$ esetén $i_m > 0$.

Abból a célból, hogy definiáljuk a *legegyszerűbbet*, először is megjegyezzük, hogy lineáris kinetikai differenciálegyenletnek (2.2) nem lehet a linearizáltja, mivel egy olyan lineáris rendszer origó körüli linearizáltja, amelynek az origó egyensúlyi helyzete, önmaga, (2.2) pedig nemkinetikai.

Keressük tehát a linearizálandó rendszert a másodfokúak között, azaz az

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \\ \dot{y} &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \end{aligned}$$

alakúak között és tegyük fel, hogy a rendszer kinetikai. Ez azt jelenti, hogy

$$(2.4) \quad c, e, f, A, D, F \equiv 0.$$

Tegyük fel, hogy nincs a valódi elemi reakciók között harmadrendű (abban az értelemben, hogy a rend meghatározásánál a visszafelé menő reakciókat is figyelembe vesszük). Ebből következik, hogy

$$(2.5) \quad a, C \equiv 0,$$

és hogy b és B közül legfeljebb az egyik pozitív. Az ezen egyenlőtlenségekhez vezető részletes fizikai érvelés megtalálható [5] 1247. oldalán, vagy [11] II. szakaszában. Végül (2.3) legyen a lehető legegyszerűbb egyenlet abban az értelemben, hogy (2.3) jobb oldalán az együtthatók közül a lehető legkevesebb különbözik nullától. (Az Olvasó ellenőrizheti, hogy a problémának olyan kinetikai megoldása, amelyik-

ben csak egy nullától különböző együttható van, nem létezik. Másrészt két nemnulla együttható már elegendő lesz.)

A „legegyszerűbb egyenlet” fogalmának ilyen módon való definiálása kémiai szempontból lényegében azt jelenti, hogy az ilyen egyenlethez tartozik a lehető legkevesebb elemi reakciót tartalmazó összetett kémiai reakció.

Jelölje (\bar{x}, \bar{y}) (2.3)-nak azt az egyensúlyi pontját, amely körüli linearizáltjának azonosnak kell lennie a Lotka—Volterra-modell $(1, 1)$ körüli linearizáltjával. A fenti követelmények ekkor a következőképpen fejezhető ki. Az a tény, hogy (\bar{x}, \bar{y}) egyensúlyi pont, azt jelenti, hogy

$$(2.6) \quad a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0,$$

$$(2.7) \quad A\bar{x}^2 + B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + D\bar{x} + E\bar{y} + F = 0.$$

A (2.3) egyenlet (\bar{x}, \bar{y}) körüli linearizáltjának (2.2)-nek kell lennie, azaz

$$(2.8) \quad 2a\bar{x} + b\bar{y} + d = 0, \quad b\bar{x} + 2c\bar{y} + e = -1,$$

$$(2.9) \quad 2A\bar{x} + B\bar{y} + D = 1, \quad B\bar{x} + 2C\bar{y} + E = 0.$$

Összpontosítsuk figyelmünket először (2.3) első egyenletének együtthatóira. A (2.6), (2.8a, b) rendszer azon megoldásait kell meghatároznunk, amelyeknek legfeljebb két komponense különbözik nullától. Világos, hogy (2.8b) miatt b , c és e közül legalább az egyiknek negatívnak kell lennie. Másrészt (2.4) következtében sem c , sem e nem lehet negatív. Így kell, hogy b legyen nullánál kisebb. Ekkor viszont (2.8a) miatt a és d közül legalább az egyik pozitív. De (2.5) miatt a nem lehet pozitív. Most megmutatjuk, hogy elegendő feltételezni, hogy csak b és d különbözik nullától, mégpedig $b < 0$ és $d > 0$. Feltéve, hogy az összes többi együttható nulla, a (2.6) és a (2.8a, b) rendszer erre egyszerűsödik:

$$(2.10) \quad b\bar{x}\bar{y} + d\bar{x} = 0, \quad b\bar{y} + d = 0, \quad b\bar{x} = -1.$$

Ennek a lineáris egyenletrendszernek pontosan egyetlen megoldása van a b és d ismeretlenekre nézve:

$$(2.11) \quad b = -1/\bar{x}, \quad d = \bar{y}/\bar{x}.$$

Ebben az esetben (2.3a) alakja:

$$\dot{x} = x/\bar{x} \cdot (\bar{y} - y).$$

Térjünk most át (2.3) második egyenletének együtthatóira. A (2.7), (2.9a, b) rendszer azon megoldásait kell meghatároznunk, amelyeknek lehető legkevesebb komponense különbözik nullától. Nyilvánvaló, hogy (2.9a) miatt A , B és D közül legalább az egyik pozitív. Két eset fordulhat elő: az elsőben A , B és D közül legalább az egyik negatív, de (2.4) miatt ez csak B lehet. A másodikban A , B és D közül egyik sem negatív. Ebben az esetben (2.7) következtében C , E és F közül legalább az egyik negatív, de (2.4) miatt ez csak C vagy E lehet. Így a nullától különböző együtthatók vagy az alábbiak

$$(2.12) \quad A > 0, \quad B < 0,$$

$$(2.13) \quad D > 0, \quad B < 0,$$

vagy pedig a következők

$$(2.14) \quad A > 0, \quad C < 0,$$

$$(2.15) \quad A > 0, \quad E < 0,$$

$$(2.16) \quad B > 0, \quad C < 0,$$

$$(2.17) \quad B > 0, \quad E < 0,$$

$$(2.18) \quad D > 0, \quad C < 0,$$

$$(2.19) \quad D > 0, \quad E < 0.$$

A (2.9b) egyenlet miatt vagy $B=C=E=0$ vagy pedig B , C és E közül legalább kettő különbözik nullától. Csak a (2.16) és (2.17) feltételek képviselnek olyan eseteket, amelyeket ez az érvelés nem zár ki. A (2.16) feltétel mellett a (2.7), (2.9) rendszer ellentmondásos, tehát kizárólag a (2.17) feltétel mellett létezik megoldás, és ekkor

$$(2.20) \quad B = 1/\bar{y}, \quad E = -\bar{x}/\bar{y}.$$

Ekkor a (2.3b) egyenlet alakja:

$$(2.21) \quad \dot{y} = y/\bar{y} \cdot (x - \bar{x}).$$

3. A kétdimenziós explodátor egyértelműségéről

Most az

$$(3.1) \quad \dot{x} = x(1 - y^2), \quad \dot{y} = \tilde{C}y(xy - 1) \quad (\tilde{C} > 0)$$

kétdimenziós explodátor [4]

$$(3.2) \quad \dot{\xi} = -2\eta, \quad \dot{\eta} = \tilde{C}\xi + \tilde{C}\eta \quad (\tilde{C} > 0)$$

linearizált alakját tekintjük. Nyilvánvaló, hogy lineáris kinetikai differenciálegyenletből nem juthatunk (3.2)-hez, mivel (3.2) nem kinetikai.

Az Olvasó a 2. szakaszban alkalmazotthoz hasonló érvelés segítségével megmutathatja, hogy (2.3) alakú rendszerből — feltéve, hogy mindkét egyenletben legfeljebb két nullától különböző együttható van — nem juthatunk a (3.2) egyenlethez linearizálás útján. Hasonlóképpen az is belátható, hogy a (2.7), (2.9) rendszernek olyan megoldása sincs, amelyikben *három* együttható különböznék nullától.

Így keressük a linearizálandó rendszert a harmadfokú rendszerek, azaz a következő alakúak között:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j, \\ \dot{y} &= Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J \end{aligned}$$

és tegyük fel, hogy a rendszer kinetikai. Ez a 2. szakaszban ismertetett módon (vö. [5], [11]) maga után vonja, hogy

$$(3.4) \quad d, g, i, j \equiv 0, \quad A, E, H, J \equiv 0.$$

Tegyük föl, hogy a valódi elemi reakciók között nincs negyedrendű. Ebből következik, hogy

$$(3.5) \quad a \leq 0, \quad D \leq 0,$$

és hogy b és B (továbbá c és C) közül legfeljebb az egyik pozitív. Végül legyen (3.3) a lehető legegyszerűbb egyenlet abban az értelemben, hogy a jobb oldalon a lehető legkevesebb együttható különbözik nullától.

Ha (3.3) azon *pozitív* egyensúlyi pontját, amely körül a linearizáltja (3.2), (\bar{x}, \bar{y}) jelöli, akkor a fenti követelmények így fejezhetők ki: Az a tény, hogy (\bar{x}, \bar{y}) egyensúlyi pont, azt jelenti, hogy

$$(3.6) \quad a\bar{x}^3 + b\bar{x}^2\bar{y} + c\bar{x}\bar{y}^2 + d\bar{y}^3 + e\bar{x}^2 + f\bar{x}\bar{y} + g\bar{y}^2 + h\bar{x} + i\bar{y} + j = 0,$$

$$(3.7) \quad A\bar{x}^3 + B\bar{x}^2\bar{y} + C\bar{x}\bar{y}^2 + D\bar{y}^3 + E\bar{x}^2 + F\bar{x}\bar{y} + G\bar{y}^2 + H\bar{x} + I\bar{y} + J = 0.$$

A (3.3) egyenlet (\bar{x}, \bar{y}) körüli linearizáltja (3.2), tehát

$$(3.8) \quad 3a\bar{x}^2 + 2b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + 2e\bar{x} + f\bar{y} + h = 0,$$

$$(3.9) \quad b\bar{x}^2 + 2c\bar{x}\bar{y} + 3d\bar{y}^2 + f\bar{x} + 2g\bar{y} + i = -2,$$

$$(3.10) \quad 3A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + 2E\bar{x} + F\bar{y} + H = \tilde{C},$$

$$(3.11) \quad B\bar{x}^2 + 2C\bar{x}\bar{y} + 3D\bar{y}^2 + F\bar{x} + 2G\bar{y} + I = \tilde{C}.$$

Összpontosítsuk először figyelmünket (3.3) első egyenletének együtthatóira. A (3.6), (3.8), (3.9) rendszer azon megoldásait kell meghatároznunk, amelyeknek legfeljebb két komponense különbözik a nullától. Nyilvánvaló, hogy (3.4a) és (3.9) miatt b , c és f közül legalább az egyik negatív. Két eset fordulhat elő: az elsőben b , c és f között van pozitív szám. A másodikban b , c és f közül egyik sem pozitív. Ebben az esetben (3.8) miatt a , e és h közül legalább az egyik pozitív, de ez csak e vagy h lehet (3.5a) miatt. Így a nemnulla együtthatók halmaza vagy

$$(3.12) \quad b < 0, \quad c > 0,$$

$$(3.13) \quad b < 0, \quad f > 0,$$

$$(3.14) \quad c < 0, \quad b > 0,$$

$$(3.15) \quad c < 0, \quad f > 0,$$

$$(3.16) \quad f < 0, \quad b > 0,$$

$$(3.17) \quad f < 0, \quad c > 0,$$

vagy

$$(3.18) \quad b < 0, \quad e > 0,$$

$$(3.19) \quad b < 0, \quad h > 0,$$

$$(3.20) \quad c < 0, \quad e > 0,$$

$$(3.21) \quad c < 0, \quad h > 0,$$

$$(3.22) \quad f < 0, \quad e > 0,$$

$$(3.23) \quad f < 0, \quad h > 0.$$

A (3.6), (3.8), (3.9) rendszer a (3.12), (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), (3.19), (3.20) és (3.22) feltétel mellett ellentmondásos, a megengedhető esetek tehát (3.15), (3.18), (3.21) és (3.23), amelyekre

$$(3.15') \quad c = -2/\bar{x}\bar{y}, \quad f = 2/\bar{x},$$

$$(3.18') \quad b = -2/\bar{x}^2, \quad e = 2\bar{y}/x^2,$$

$$(3.21') \quad c = -1/\bar{x}\bar{y}, \quad h = \bar{y}/\bar{x},$$

$$(3.23') \quad f = -2/\bar{x}, \quad h = 2\bar{y}/\bar{x}.$$

Ezekben az esetekben (3.3) alakja:

$$(3.15'') \quad \dot{x} = 2xy/\bar{x}\bar{y}(\bar{y} - y)$$

$$(3.18'') \quad \dot{x} = 2x^2/\bar{x}^2(\bar{y} - y)$$

$$(3.21'') \quad \dot{x} = x/\bar{x}\bar{y}(\bar{y}^2 - y^2)$$

$$(3.23'') \quad \dot{x} = 2x/\bar{x}(\bar{y} - y).$$

Térjünk rá most (3.3) második egyenletének az együtthatóira. A (3.7), (3.10), (3.11) rendszer azon megoldásait kell meghatároznunk, amelyeknek legfeljebb két komponense különbözik nullától.

Nyilvánvaló, hogy A, B, C, E, F és H közül legalább egy pozitív (3.10) miatt. Két eset fordulhat elő: az elsőben legalább egyikük negatív, de ez (3.5b) miatt csak B, C vagy F lehet. A másodikban egyikük sem negatív. Ebben az esetben (3.7) és (3.4b) miatt D, G és I közül legalább az egyik negatív.

Hasonlóan B, C, D, F, G és I közül legalább az egyik pozitív (3.11) miatt. Másrészt (3.5b) miatt D nem lehet pozitív. Két eset fordulhat elő: az elsőben B, C, F, G és I közül legalább az egyik negatív, a másodikban egyikük sem negatív. Ebben az esetben (3.7) és (3.4b) miatt D negatív.

Az előző két bekezdésben leírtak alapján a következő 15 lehetőség marad a nemnulla együttható párokra:

$$(3.24) \quad B > 0, \quad C < 0,$$

$$(3.25) \quad B > 0, \quad F < 0,$$

$$(3.26) \quad B > 0, \quad D < 0,$$

$$(3.27) \quad B > 0, \quad G < 0,$$

$$(3.28) \quad B > 0, \quad I < 0,$$

$$(3.29) \quad C > 0, \quad B < 0,$$

$$(3.30) \quad C > 0, \quad F < 0,$$

$$(3.31) \quad C > 0, \quad D < 0,$$

$$(3.32) \quad C > 0, \quad G < 0,$$

$$(3.33) \quad C > 0, \quad I < 0,$$

$$(3.34) \quad F > 0, \quad B < 0,$$

$$(3.35) \quad F > 0, \quad C < 0,$$

$$(3.36) \quad F > 0, \quad D < 0,$$

$$(3.37) \quad F > 0, \quad G < 0,$$

$$(3.38) \quad F > 0, \quad I < 0.$$

A (3.25), (3.28), (3.31), (3.32) (3.34), (3.35) és (3.38) feltételek mellett a (3.7), (3.10), (3.11) rendszer egyszerűen ellentmondásos. A (3.24), (3.26), (3.27), (3.29), (3.30), (3.36) és (3.37) feltételek mellett a rendszer csak akkor lenne megoldható, ha még olyasfajta feltételek is teljesülnének, mint $\bar{x}/\bar{y} = -1$, $\bar{x}/2\bar{y} = -1$ stb. De ezek a feltételek nem teljesülhetnek, mert \bar{x} és \bar{y} is pozitív.

Egyetlen olyan feltétel van — (3.33) — amely mellett a (3.7), (3.10), (3.11) rendszernek van megoldása, ekkor

$$(3.33') \quad C = \tilde{C}/\bar{x}^2, \quad I = -\tilde{C}$$

akkor és csak akkor, ha még az $\bar{x} = \bar{y}$ pótlólagos feltétel is teljesül. Ebben az esetben (3.3b) alakja

$$(3.33'') \quad \dot{y} = \tilde{C}/\bar{x}^2 \cdot xy^2 - \tilde{C}y = \tilde{C}y(xy/\bar{x}^2 - 1).$$

Összefoglalva: négy olyan kinetikai differenciálegyenlet van, amelyik teljesíti a fenti követelményeket, nevezetesen (3.15''), (3.33''); (3.18''), (3.33''); (3.21''), (3.33'') és (3.23''), (3.33'').

A (3.5) utáni érvelés ezek közül egyiket sem zárja ki. (Az analóg érvelést a Lotka—Volterra modell esetében sem használtuk ki.)

Az általánosság csorbitása nélkül (skálatranszformációval) elérhető, hogy $\bar{x} = \bar{y} = 1$ legyen. Ekkor a kapott modellek

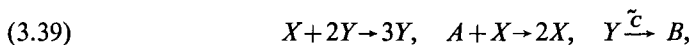
$$(3.15''') \quad \dot{x} = 2xy(1-y), \quad \dot{y} = \tilde{C}y(xy-1),$$

$$(3.18''') \quad \dot{x} = 2x^2(1-y), \quad \dot{y} = \tilde{C}y(xy-1),$$

$$(3.21''') \quad \dot{x} = x(1-y^2), \quad \dot{y} = \tilde{C}y(xy-1),$$

$$(3.23''') \quad \dot{x} = 2x(1-y), \quad \dot{y} = \tilde{C}y(xy-1).$$

A (3.21''') egyenletet indukáló egy lehetséges reakció éppen



a kétdimenziós, vagy redukált explodátor. Megjegyzendő, hogy az összes többi egyenlethez bonyolultabb indukáló reakció tartozik, ugyanis (3.18''')-höz és (3.23''')-höz legalább négy elemi reakciót tartalmazó összetett kémiai reakcióra van szükség, míg (3.15''')-höz kell egy $X + Y \rightarrow 2X + Y$ alakú elemi reakció is, amely X termelődéséért felelős.

4. Összefoglalás

Megmutattuk, hogy a *Lotka—Volterra modell* egyértelmű a vele azonos linearizált alakkal rendelkező legegyszerűbb modellek között. Azt is bebizonyítottuk, hogy három olyan modell van, amelyeknek a linearizált alakja megegyezik a két-dimenziós explodátorával — magán a két-dimenziós explodátoron kívül. Tanulságos lenne ezeket a modelleket is megvizsgálni a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete segítségével, amint ez az eredeti [6] és a két-dimenziós [4] explodátorral is megtörtént.

A továbbiak szempontjából érdekes lehet, hogy viszonylag könnyen meg lehetett fogalmazni a vegyes-egészértékű programozás nyelvén is a fenti feladatokat [10].

Köszönetnyilvánítás. A szerzők köszönettel tartoznak FARKAS HENRIKNEK és NOSZTICZIUS ZOLTÁNNAK segítőkész megjegyzéseikért és HOFFER JÁNOSNAK azokért a számításaiért, amelyekkel segített egy hibát fölfedezni a kézirat egy korábbi változatában. J. J. TYSONNAK a megjegyzéseit szintén igyekeztünk figyelembe venni.

IRODALOM

- [1] CSÁSZÁR, A., ÉRDI, P., JICSINSZKY, L., TÓTH, J. and TURÁNYI, T., "Several exact results on deterministic exotic kinetics", *Z. Phys. Chemie, Leipzig* **264** (1983) 449—463.
- [2] EPSTEIN, I. R., "Oscillations and chaos in chemical systems", *Physica* **7D** (1983) 47—56.
- [3] ESCHER, C., "Bifurcation and coexistence of several limit cycles in models of open two-variable quadratic mass-action systems", *Chem. Phys.* **63** (1981) 337—343.
- [4] FARKAS, H., NOSZTICZIUS, Z., *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* **81** (1985) 1487—1505.
- [5] HANUSSE, P., "De l'existence d'un cycle limite dans l'évolution des systèmes chimique ouverts", *C. R. Acad. Sc. Paris* **274** (1972) 1245—1247.
- [6] KERTÉSZ, V., "Global mathematical analysis of the explodator", *Nonlinear Anal.: Theory Methods and Applications* **8** (1984) 941.
- [7] PÓTA, GY., "Two-component bimolecular systems cannot have limit cycles: a complete proof", *J. Chem. Phys.* **78** (1983) 1621—1622.
- [8] SCHNAKENBERG, J., "Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour", *J. Theor. Biol.* **81** (1979) 389—400.
- [9] TÓTH, J., „A kémiai reakciókinetika direkt és inverz feladatairól”, *Alk. Mat. Lapok* **7** (1981) 253—269.
- [10] TÓTH, J., HOFFER, J. (előkészületben).
- [11] TYSON, J. J. and LIGHT, J. C., "Properties of two-component bimolecular and trimolecular chemical reaction systems", *J. Chem. Phys.* **59** (1973) 4164—4173.

(Beérkezett: 1986. március 18.)

(Átdolgozva beérkezett: 1986. szeptember 25.)

TÓTH JÁNOS
MTA SZTAKI BUDAPEST, KENDE U. 13—17.

HÁRS VERA
CHINOIN BUDAPEST, TÓ U. 4.

CONSTRUCTING OSCILLATORY REACTIONS FROM THEIR LINEARIZED FORM

J. TÓTH and V. HÁRS

The uniqueness of the *Lotka—Volterra model* is shown within the class of models having the same linearized form. It is also shown that the reduced explodator is not unique within its own class: there exist four models with the same linearized form. A general method is proposed appropriate to construct model reactions with prescribed equilibrium point(s).

KAOTIKUS ÉS KINETIKAI DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

HÁRS VERA és TÓTH JÁNOS

Budapest

Megmutatjuk, hogy a kaotikus megoldásokkal rendelkező *Lorenz-egyenletet* egyetlen valódi vagy nem valódi ortogonális transzformáció sem transzformálja kinetikaivá, vagyis olyaná, amelyik kémiai reakció determinisztikus modelljének volna tekinthető. Azt is bebizonyítjuk, hogy RÖSSLER egy hasonló modelljéhez nincsen olyan univerzális valódi ortogonális transzformáció, amelyik a paraméterek tetszőleges értéke esetén kinetikaiba vinné ezt az egyenletet. Az eredményekkel kapcsolatban rámutatunk a negatív keresztthatásnak a kaotikus egyenletekben való jelenléte szükségességére.

1. Bevezetés

Az utóbbi időben igen nagy érdeklődést váltott ki az a kérdés, hogy valós kémiai rendszerek képesek-e kaotikus viselkedést mutatni. EPSTEIN [2] összefoglaló dolgozata számos kísérleti példát ír le és idéz, és bizonyos modellekről azt állítja, hogy kérdéses kémiai relevanciájuk.

Azt a kérdést, hogy mely polinomiális differenciálegyenletek relevánsak kémiai szempontból, a [17] dolgozat a következőképpen tárgyalja. A

$$(1.1) \quad \sum_{m=1}^M \alpha(m, r) X(m) \xrightarrow{k(r)} \sum_{m=1}^M \beta(m, r) X(m) \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

(összetett kémiai) reakciót rendszerint az alábbi elsőrendű explicit közönséges polinomiális differenciálegyenlettel írják le:

$$(1.2) \quad \dot{c}_m(t) = \sum_{r=1}^R (\beta(m, r) - \alpha(m, r)) k(r) \prod_{m'=1}^M c_{m'}(t)^{\alpha(m', r)},$$

amelyet (1.1) *indukált kinetikai differenciálegyenletének* neveznek. Itt c_m az $X(m)$ kémiai komponens koncentrációja, t pedig az idő. Egy lényegében egyszerű, de bonyolultan megfogalmazható jellemzést lehet adni a kinetikai differenciálegyenletekre a polinomiális differenciálegyenletek halmazán belül. Egy polinomiális differenciálegyenlet pontosan akkor tekinthető valamely reakció indukált kinetikai differenciálegyenletének, ha nem tartalmaz *negatív keresztthatást*, azaz ha a jobb-oldalán nem szerepel olyan tag, amely egy komponens fogyását fejezné ki olyan folyamatokban, amelyekben a kérdéses komponens nem vesz részt (vö. [3]). Példaként tekintsük a *Lorenz-egyenletet* [10]:

$$(1.3) \quad \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz \quad (\sigma, r, b \in \mathbb{R}^+),$$

ahol $-xz$ egy olyan tag, amely y fogyását fejezi ki egy olyan folyamatban, amelyikben y nem vesz részt.

Eszerint a szükséges és elégséges feltétel szerint az EPSTEIN [2] által idézett kaotikus viselkedésű modellek nemkinetikaiak. Továbbá, az irodalomban előforduló legtöbb kaotikus modell szintén nemkinetikai. Másrészt viszont igaz, hogy RÖSSLER [14], SCHULMEISTER [15], GILPIN [4], TOMITA és TSUDA [16], ARNEODO és mtsai [1], továbbá WILLAMOWSKI és RÖSSLER [20] meg tudott adni kaotikus viselkedésű kinetikai differenciálegyenleteket. (Megjegyzendő, hogy a kaotikus viselkedést általában numerikus vizsgálatokban észlelik.)

A jelen dolgozatban a kaotikus viselkedésű polinomiális differenciálegyenletek algebrai-strukturális jellemzése irányába szeretnénk tenni egy lépést, más irányban, ahogyan azt KING [7] tette. E célból először megmutatjuk, hogy a *Lorenz-egyenletet* egyetlen valódi ortogonális transzformáció sem transzformálja kinetikaivá. Másodszor: nemvalódi ortogonális transzformációkkal sem tehető ez meg. Harmadszorra ezt az állítást kissé általánosítjuk. Ezután bebizonyítjuk, hogy RÖSSLER egy kaotikus modelljét egyetlen valódi ortogonális transzformáció sem viszi kinetikaiba. (Két okból is célszerű *lineáris* transzformációkra korlátozódni: egyrészt ezek könnyen kezelhetők, másrészt ezek polinomiális differenciálegyenletet polinomiálisba visznek, míg egy nemlineáris transzformációról ezt általában nem lehet elmondani.)

Ezen számítások alapján úgy gondoljuk, hogy a kaotikus viselkedés és „kitranszformálhatatlan” negatív kereszthatás(ok) jelenléte között összefüggés van.

2. Lorenz-egyenlet valódi ortogonális transzformáltjai

A *Lorenz-egyenlet* [10]:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz \quad (\sigma, r, b \in \mathbb{R}^+)$$

vagy röviden

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \circ \mathbf{x}.$$

Az a kérdés, hogy létezik-e olyan $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi ortogonális transzformáció (azaz olyan \mathbf{A} lineáris transzformáció, amelyre $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$, $\det \mathbf{A} = 1$, vagy $\mathbf{A} \in SO(3)$), hogy $\xi := \mathbf{A}\mathbf{x}$ már egy kinetikai differenciálegyenletnek tesz eleget (azaz egy olyan egyenletnek, amelyikben *nincsen* negatív kereszthatás [17], mint amilyen például $-xz$ az eredeti rendszerben).

A $\xi := (\xi, \eta, \zeta)^T$ -re vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{f} \circ \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{f} \circ \mathbf{A}^{-1}\xi.$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $c_x := \cos x$, $s_x := \sin x$ ($x \in [0, 2\pi)$). Ezekkel \mathbb{R}^3 általános ortogonális transzformációja úgy írható fel, mint három síkbeli forgatás egymásutánja [8]:

$$(2.2) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\gamma & s_\gamma \\ 0 & -s_\gamma & c_\gamma \end{bmatrix} =: \mathbf{A}_\alpha \mathbf{B}_\beta \mathbf{C}_\gamma =$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma \\ -c_\beta s_\alpha & c_\alpha c_\gamma + \bar{s} & c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta & -c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix},$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ és $\bar{s} := s_\alpha s_\beta s_\gamma$. Az alábbiakban $\bar{c} := c_\alpha c_\beta c_\gamma$ -ra is szükségünk lesz.

A ortogonális, így $A^{-1}=A^T$. Így először $A^{-1}\xi$ -t, másodsor $f \circ A^{-1}\xi$ -t, végül a

$$(2.3) \quad \dot{\xi} = A f \circ A^{-1} \xi$$

transzformált egyenlet koordináta-egyenleteit kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & \xi [(\sigma+r)c_\alpha c_\beta (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma) - b(c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma)^2 - \sigma(c_\alpha c_\beta)^2 - (c_\alpha s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma)^2] + \\ & \eta [\sigma c_\alpha c_\beta (c_\alpha c_\gamma + \bar{s} + c_\beta s_\alpha) - r c_\beta s_\alpha (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma) - c_\alpha c_\gamma^2 s_\alpha + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta s_\gamma - \\ & - c_\gamma \bar{s} s_\alpha + c_\alpha \bar{s} s_\beta s_\gamma - b(c_\alpha s_\alpha s_\gamma^2 + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta s_\gamma - c_\gamma \bar{s} s_\alpha - c_\alpha c_\gamma^2 c_\beta^2)] + \\ & \zeta [-\sigma c_\alpha c_\beta (c_\beta s_\gamma - s_\beta) - r s_\beta (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma) - b c_\beta c_\gamma (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma) + \\ & + c_\beta s_\gamma (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma)] + \xi^2 0 - \eta^2 c_\beta s_\alpha s_\beta + \zeta^2 c_\beta s_\alpha s_\beta + \\ & \xi \eta c_\alpha c_\beta s_\beta - \xi \zeta c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha + \eta \zeta (c_\beta^2 s_\alpha^2 - s_\beta^2), \\ \dot{\eta} = & \xi [-\sigma c_\beta s_\alpha (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma - c_\alpha c_\beta) + r c_\alpha c_\beta (c_\alpha c_\gamma + \bar{s}) - \\ & - b(c_\alpha s_\alpha s_\gamma^2 + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta s_\gamma - c_\gamma \bar{s} s_\alpha - c_\alpha c_\gamma^2 s_\beta^2) + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta s_\gamma - c_\alpha c_\gamma^2 s_\alpha - c_\gamma \bar{s} s_\alpha + \\ & + c_\alpha s_\alpha s_\beta^2 s_\gamma] + \\ & \eta [-(\sigma+r)c_\beta s_\alpha (c_\alpha c_\gamma + \bar{s}) - b(c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta)^2 - \sigma c_\beta s_\alpha^2 - (c_\alpha c_\gamma + \bar{s})^2] + \\ & \zeta [\sigma c_\beta s_\alpha (c_\beta s_\gamma - s_\beta) - r s_\beta (c_\alpha c_\gamma + \bar{s}) - b c_\beta c_\gamma (c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta) - c_\beta s_\gamma (c_\alpha c_\gamma + \bar{s})] + \\ & \xi^2 [-c_\alpha c_\beta s_\beta - c_\alpha^2 c_\beta c_\gamma s_\alpha s_\beta^2 s_\gamma] + \eta^2 0 + \zeta^2 c_\alpha c_\beta s_\beta + \\ & \xi \eta c_\beta s_\alpha s_\beta + \xi \zeta (s_\beta^2 - c_\alpha^2 c_\beta^2) + \eta \zeta c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha, \\ \dot{\zeta} = & \xi [\sigma s_\beta (-c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\beta) - r c_\alpha c_\beta^2 s_\gamma - b c_\beta c_\gamma (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma) + \\ & + c_\beta s_\gamma (c_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\gamma s_\alpha)] + \\ & \eta [-\sigma s_\beta (c_\alpha c_\gamma + \bar{s} + c_\beta s_\alpha) + r c_\beta^2 s_\alpha s_\gamma + b c_\beta c_\gamma (-c_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\alpha s_\beta) + c_\beta s_\gamma (c_\alpha c_\gamma + \bar{s})] + \\ & \zeta [\sigma s_\beta (c_\beta s_\gamma - s_\beta) + r c_\beta s_\beta s_\gamma - b c_\beta^2 c_\gamma^2 - c_\beta^2 s_\gamma^2] + \\ & \xi^2 c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha - \eta^2 c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha + \zeta^2 0 + \\ & \xi \eta c_\beta^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) - \xi \zeta c_\beta s_\alpha s_\beta - \eta \zeta c_\alpha c_\beta s_\beta. \end{aligned}$$

Az a követelmény, hogy nincs negatív keresztthatás, a *másodfokú* tagokra ezt jelenti:

$$(2.4) \quad c_\beta s_\alpha s_\beta = 0,$$

$$(2.5) \quad c_\beta^2 s_\alpha^2 \equiv s_\beta^2,$$

$$(2.6) \quad c_\alpha c_\beta s_\beta = 0,$$

$$(2.7) \quad s_\beta^2 \equiv c_\alpha^2 c_\beta^2,$$

$$(2.8) \quad c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha = 0,$$

$$(2.9) \quad c_\beta^2 c_\alpha^2 \equiv c_\beta^2 s_\alpha^2.$$

Ha a (2.4) egyenlőségből indulunk ki, három eset látszik lehetségesnek. Vagy $c_\beta = 0$, de akkor $s_\beta^2 = 1$, és ez ellentmond a (2.5) egyenlőtlenségnek; vagy $s_\alpha = 0$, de akkor $s_\beta = 0$ és $c_\alpha^2 = 1$, és ez ellentmond a (2.7) egyenlőtlenségnek; vagy $s_\beta = 0$, de akkor $c_\beta^2 = 1$ és $c_\alpha = 0$, ami viszont a (2.9) egyenlőtlenségnek mond ellent.

3. Nemvalódi ortogonális transzformációk

Így az a feltevés, hogy egy valódi ortogonális transzformáció képes eltávolítani a negatív keresztthatást, ellentmondásra vezetett. Mi a helyzet a *nemvalódi* ortogonális transzformációkkal, azaz azokkal a $\mathbf{B}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ lineáris transzformációkkal, amelyekre $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}$, $\det \mathbf{B} = -1$. Nyilvánvaló, hogy minden ilyen transzformáció egy rögzített nemvalódi ortogonális transzformációnak és egy valódi ortogonális transzformációnak a szorzatára bontható. Ha rögzített nemvalódi ortogonális transzformációnak az origóra való tükrözést vesszük és \mathbf{P} -vel jelöljük, akkor

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

és minden nemvalódi \mathbf{B} -hez létezik egy olyan valódi \mathbf{A} , hogy $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}$. Általában, ha \mathbf{P} a rögzített nemvalódi ortogonális transzformáció, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T\mathbf{B}$, $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$, tehát $\mathbf{A} := \mathbf{P}^T\mathbf{B}$ meg fog felelni.

Nyilvánvaló, hogy (2.3) jobb oldalát g -vel jelölve, a \mathbf{B} alkalmazása után kapott egyenlet:

$$(3.1) \quad \dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{g} \circ (-\mathbf{X}) \quad (\mathbf{X} := \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}\xi).$$

(Ez ugyanaz, mint a

$$(3.3) \quad \dot{\xi} = \mathbf{g} \circ \xi$$

egyenletből \mathbf{P} alkalmazása után kapott egyenlet.)

Az a követelmény, hogy nincs negatív keresztthatás (3.1)-ben, a másodfokú tagok együtthatójára nézve ezt jelenti:

$$(3.2) \quad c_\beta s_\alpha s_\beta = 0,$$

$$(3.3) \quad c_\beta^2 s_\alpha^2 \leq s_\beta^2,$$

$$(3.4) \quad c_\alpha c_\beta s_\beta = 0,$$

$$(3.5) \quad s_\beta^2 \leq c_\alpha^2 c_\beta^2,$$

$$(3.6) \quad c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha = 0,$$

$$(3.7) \quad c_\beta^2 c_\alpha^2 \leq c_\beta^2 s_\alpha^2.$$

Ezek éppen az előző egyenlőtlenségek, csak az egyenlőtlenségjelek itt meg vannak fordítva. (Az Olvasó ellenőrizheti, hogy akkor is (3.2)–(3.7)-et kapjuk, ha rögzített

nemvalódi ortogonális transzformációnak például a

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transzformációt vesszük.)

Ha a (3.2) egyenlőtlenségből indulunk ki, akkor három eset látszik lehetségesnek. Vagy $c_\beta = 0$, de akkor $s_\beta^2 = 1$, és ez ellentmond a (3.5) egyenlőtlenségnek; vagy $s_\alpha = 0$, de akkor $c_\alpha^2 = 1$ és $c_\beta = 0$, ami ismét az előző ellentmondásra vezet; vagy $s_\beta = 0$, de akkor $c_\beta^2 = 1$ és $s_\alpha = 0$, ami a második esetben kapott módon vezet ellentmondásra.

Így tehát megmutattuk, hogy nemvalódi ortogonális transzformációkkal sem lehet kiküszöbölni a negatív kereszthatást.

Mivel egy pozitív definit diagonális transzformáció hatására nemkinetikai egyenletről nemkinetikait kapunk, fenti eredményeinkből következik, hogy a *Lorenz-egyenlet* $D = MA$ alakú transzformációk hatására is nemkinetikai marad, ha A tetszőleges valódi vagy nemvalódi ortogonális transzformáció, M pedig egy pozitív definit diagonális transzformáció.

4. A Rössler-egyenlet valódi ortogonális transzformáltjai

RÖSSLER [13] szerint a

$$(4.1) \quad \dot{x} = x - xy - z, \quad \dot{y} = x^2 - ay, \quad \dot{z} = bx - cy + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}^+)$$

modell realisztikusabb, mint a *Lorenz-modell*, és kvalitatíve ez is hasonlóan viselkedik. Ennek az esetnek a vizsgálatához a fenti számolások egy része felhasználható. Legyen A egy tetszőleges valódi ortogonális transzformáció. Ekkor az első kifejezés, amelyik eltér az előzőktől, $f \circ A^{-1} \xi$ lesz. A transzformált differenciálegyenlet koordináta-egyenletei:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & \xi [c_\alpha^2 c_\beta^2 - \bar{c}_\alpha c_\beta s_\alpha s_\gamma - (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma)^2 a + \\ & + (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma)(bc_\alpha c_\beta - c(c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma))] + \\ (4.2a) \quad & \eta [-c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha - c_\alpha^2 c_\beta s_\gamma + \bar{c}_\alpha s_\beta - (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma)a(c_\alpha c_\gamma + \bar{s}) - \\ & - (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma)(bc_\beta s_\alpha + c(c_\alpha c_\gamma + \bar{s}))] + \\ & \zeta [-c_\alpha c_\beta s_\beta - \bar{c}_\alpha c_\beta + (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma)ac_\beta s_\gamma - (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma)(bs_\beta - cc_\beta s_\gamma) \\ & \xi^2 0 + \eta^2 (c_\beta^2 c_\gamma s_\alpha) + \zeta^2 (c_\gamma s_\alpha s_\beta^2 - c_\alpha s_\beta s_\gamma) + \xi \eta (-\bar{c}_\alpha c_\beta) + \\ & \xi \zeta (-\bar{c}_\alpha s_\beta + c_\alpha^2 c_\beta s_\gamma) + \eta \zeta (3c_\alpha c_\beta \bar{s} s_\beta - c_\alpha c_\beta^3 s_\alpha s_\gamma - 2c_\beta c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta + \bar{c}_\alpha s_\beta) + \\ & + (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma)d, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} = & \xi [-c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha + \bar{c} s_\alpha s_\beta + c_\beta s_\alpha^2 s_\gamma - (c_\alpha c_\gamma + \bar{s}) a (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma) + \\
& + (c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta) (b c_\alpha c_\beta - c (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma))] + \\
(4.2b) \quad & \eta [c_\beta^2 s_\alpha^2 + c_\alpha c_\beta s_\alpha s_\gamma - c_\beta c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta - (c_\alpha c_\gamma + \bar{s})^2 a - (c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta) (b c_\beta s_\alpha + c (c_\alpha c_\gamma + \bar{s}))] + \\
& \zeta [c_\beta s_\alpha s_\beta + c_\beta^2 c_\gamma s_\alpha + a \bar{c} s_\gamma + a c_\beta \bar{s} s_\gamma - (c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta) (b s_\beta - c c_\beta s_\gamma)] + \\
& \xi^2 (\bar{c} c_\beta) + \eta^2 0 + \zeta^2 (c_\alpha c_\gamma s_\beta^2 + \bar{s}) + \xi \eta (-c_\beta^2 c_\gamma s_\alpha) + \\
& \xi \zeta (-c_\alpha c_\beta s_\alpha s_\gamma - c_\beta c_\gamma s_\beta - c_\alpha^2 c_\beta c_\gamma s_\beta) + \eta \zeta (\bar{c} s_\alpha s_\beta + c_\beta s_\alpha^2 s_\gamma) + (c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta) d, \\
\dot{\zeta} = & \xi [-c_\alpha c_\beta s_\beta + c_\alpha c_\gamma s_\beta^2 - \bar{s} + a c_\beta s_\gamma (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma) + \\
& + c_\beta c_\gamma (b c_\alpha c_\beta - c (c_\gamma s_\alpha - c_\alpha s_\beta s_\gamma))] + \\
(4.2c) \quad & \eta [c_\beta s_\alpha s_\beta + c_\alpha s_\beta s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta^2 + a c_\beta s_\gamma (c_\alpha c_\gamma + \bar{s}) - c_\beta c_\gamma (b c_\beta s_\alpha + c (c_\alpha c_\gamma + \bar{s}))] \\
& \zeta [s_\beta^2 + c_\beta c_\gamma s_\beta - a c_\beta^2 s_\gamma^2 - c_\beta c_\gamma (b s_\beta - c c_\beta s_\gamma)] + \\
& \xi^2 [\bar{c} s_\alpha s_\beta - c_\alpha^2 c_\beta s_\gamma] + \eta^2 [-\bar{c} s_\alpha s_\beta - c_\beta s_\alpha^2 s_\gamma] + \zeta^2 0 + \\
& \xi \eta [2 c_\alpha c_\beta s_\alpha s_\gamma + c_\alpha^2 c_\beta c_\gamma s_\beta - c_\beta c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta] + \xi \zeta [c_\alpha s_\beta s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta^2] + \\
& \eta \zeta [-\bar{s} - c_\alpha c_\gamma s_\beta^2] + c_\beta c_\gamma d.
\end{aligned}$$

Most a negatív keresztthatás kizárásának a figyelembevétele a másodfokú tagok együtthatóiban nem vezet ellentmondásra, mint a 2. szakaszban, ezért egy bonyolultabb bizonyításra van szükség, amit a függelékben közlünk. A bizonyítás szerkezete a következő:

(i) A (4.2) egyenlet jobb oldalán szereplő a , b , c és d paraméterek mindegyikét nullának vesszük. A folytonosság miatt a negatív keresztthatás hiányának *szükséges* feltétele, hogy az (F.1)–(F.18) egyenlőtlenségrendszer megoldható legyen.

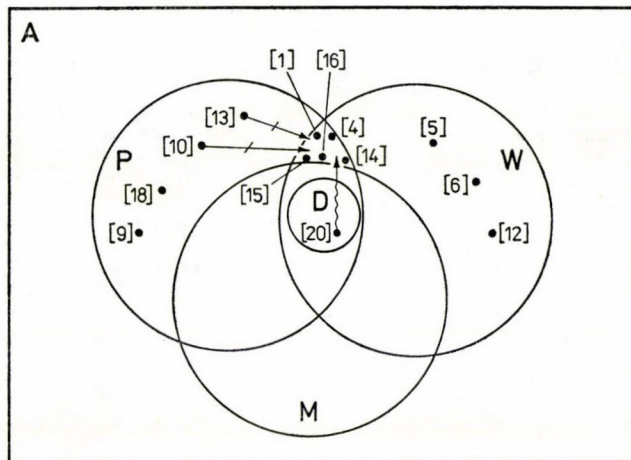
(ii) Az esetek szétválasztásából keletkező legtöbb elágazás éppúgy ellentmondásra vezet, mint a második szakaszban.

(iii) Néhány esetben úgy tűnik, mint hogyha az egyenlőtlenségrendszernek lenne megoldása. Ezekben az esetekben a megoldásjelölteket visszahelyettesítve az eredeti együtthatókba kiderül, hogy az *elsőfokú* tagok együtthatói mutatnak negatív keresztthatást, hacsak a , b , c és d pozitív.

Hangsúlyozzuk, hogy ezzel azt bizonyítottuk be, hogy nincsen olyan *univerzális* valódi ortogonális transzformáció, amelyik az a , b , c és d paraméterek tetszőleges választása esetén kinetikaiba vinné a *Rössler-egyenletet*. Ettől még lehetséges, hogy létezik minden a , b , c és d -hez egy-egy megfelelő transzformáció.

5. Összefoglalás és kitekintés

A fentiek alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy a kaotikus viselkedés szoros kapcsolatban van a kiküszöbölhetetlen negatív keresztthatással. Az 1. ábrát azért készítettük, hogy a kaotikus megoldással rendelkező különböző modellek közti finomabb kapcsolatokat is megmutassa. Ezen ismert példákra úgy hivatkozunk, mint különböző, differenciálegyenletekből álló halmazok elemeire.



1. ábra

Kaotikus megoldással rendelkező differenciálegyenletek osztályozása. A számok az irodalomjegyzékre utalnak, a betűk differenciálegyenletek különböző halmazataira: A — autonóm, P — polinomiális, M — tömegmegőrző, W — negatív kereszthatást nem tartalmazó, D — feltétel nélküli részletesen kiegyensúlyozott, reverzibilis, legfeljebb másodrendű, a tömegmegmaradás törvényének eleget tevő, tömeghatás kinetikájú elemi reakciókból álló összetett kémiai reakciók indukált kinetika differenciálegyenletei

Elképzelhető egy olyan álláspont, amely szerint még a $(P \cap W) \setminus M$ halmazban levő modellek sem elfogadhatók kémiai szempontból. (A [17] dolgozat $P \cap W$ elemeit tekinti kinetikaiaknak.) A jelen dolgozat eredménye (ezt áthúzott nyílak jelölik), hogy két speciális példa, a *Lorenz-egyenlet* és RÖSSLER egy modellje nem kerül be a $P \cap W$ halmazba egy lineáris transzformáció után. A legtöbb kémikus — WEI [19] úttörő dolgozatával összhangban — D elemeit tekinti kinetikaiaknak.

A hullámos nyíl azt fejezi ki, hogy WILLAMOWSKI és RÖSSLER [20] modellje egy olyan modell közelítésének tekinthető, amely a legszigorúbb követelményeket is kielégíti. Más szavakkal, kémiai szempontból ez a legelfogadhatóbb (közelítő) kaotikus modell.

Az összes eddigi példával összhangban pillanatnyilag a következő sejtés fogalmazható meg: ha egy nemkinetikai differenciálegyenlet kaotikus viselkedést mutat, akkor ebből egyetlen ortogonális (vagy lineáris) transzformációval sem lehet eltüntetni a negatív kereszthatást.

A jelen dolgozat egy lehetséges folytatása más speciális modellek vizsgálata, mint például a [7, 9]-ben találhatóaké, vagy HUDSON és RÖSSLER [5] 4-dimenziós modelljéé. Egy másik (és talán többet ígérő) folytatás lenne a kinetikai differenciálegyenletek rendszeres osztályozása. Ez a differenciálegyenletek algebrai invariánsainak elmélete segítségével (l. pl. [21]) lehetségesnek látszik.

Köszönetnyilvánítás. A szerzők megköszönik O. E. RÖSSLER professzor ösztönző javaslatait. A DR. W. F. LANGFORDdal és DR. BOLLA MARIANNÁval folytatott beszélgetésekből is sokat hasznosítottunk. DR. A. HOLDEN megjegyzései igen értékesek voltak a dolgozat jelenlegi változatának megfogalmazásánál.

IRODALOM

- [1] ARNEODO, A., COULLET, P. and TRESSER, C., "Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations", *Phys. Letters* **79A** (1980) 259—263.
- [2] EPSTEIN, I. R., "Oscillations and chaos in chemical systems", *Physica* **7D** (1983) 47—56.
- [3] ESCHER, C., "Bifurcation and coexistence of several limit cycles in models of open two-variable quadratic mass-action systems", *Chem. Phys.* **63** (1981) 337—343.
- [4] GILPIN, M. E., "Spiral chaos in a predator-pray model", *Am. Naturalist* **113** (1979) 306—308.
- [5] HUDSON, J. L. and RÖSSLER, O. E., "Chaos in simple three- and four-variable chemical systems", in: *Modelling of Patterns in Space and Time* Ed. W. Jäger and J. D. Murray (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1984) 135—145.
- [6] KAWCZYNSKI, A. L., "Chemical model of chaos", *Pol. J. Chem.* 1984 (to appear).
- [7] KING, R. B., "Chemical applications of topology and group theory. 14. Topological aspects of chaotic chemical reactions", *Theoret. Chim. Acta* **63** (1983) 323—338.
- [8] KORN, G. M. és KORN, T., *Matematikai kézikönyv műszakiaknak* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975).
- [9] LANGFORD, W. F., "Hopf bifurcation at a hysteresis point", *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* (submitted).
- [10] LORENZ, P., "Deterministic nonperiodic flow", *J. Athm. Sci.* **20** (1963) 130—141.
- [11] PIKOVSKY, A. S., "A dynamic model for periodic and chaotic oscillations in the Belousov—Zhabotinsky reaction", *Phys. Letters* **85A** (1981) 13—16.
- [12] RÖSSLER, O. E., "Chaotic behaviour in simple reaction systems", *Z. Naturforsch.* **31A** (1976) 259—264.
- [13] RÖSSLER, O. E., *Z. Naturforsch.* **31A** (1976) 1664—
- [14] RÖSSLER, O. E., "Chaotic oscillations in a 3-variable quadratic mass-action system", in: *Proc. Intl. Symp. Math. Topics in Biology* (Publ. Kyoto Res. Inst. for Math. Sci., Kyoto 1978) 131—135.
- [15] SCHULMEISTER, T., „Chaos in einem Lotka-Schema mit Depot“, *Studia Biophysica* **72** (1978) 205—206.
- [16] TOMITA, K. and TSUDA, I., "Chaos in the Belousov—Zhabotinsky reaction in a flow system", *Phys. Letters* **71A** (1979) 489—492.
- [17] TÓTH, J., „A kémiai reakciókinetika direkt és inverz feladatairól“, *Alk. Mat. Lapok* **7** (1981) 253—269.
- [18] TURNER, J. S., ROUX, J.-C., MCCORMICK, W. D. and SWINNEY, H. L., "Alternating periodic and chaotic regimes in a chemical reaction — Experiment and theory", *Phys. Lett.* **85A** (1981) 9—12.
- [19] WEI, J., "Axiomatic treatment of chemical reaction systems", *J. Chem. Phys.* **36** (1962) 1578—1584.
- [20] WILLAMOWSKI, K. D. and RÖSSLER, O. E., "Irregular oscillations in a realistic abstract quadratic mass action system", *Z. Naturforsch.* **35A** (1980) 317—318.
- [21] Сибирский, К. С., «Теория алгебраических инвариантов дифференциальных уравнений», (Штиница, Кишинев 1982).

(Beérkezett: 1986. március 18.)

(Átdolgozva beérkezett: 1986. november 23.)

HÁRS VERA
CHINOIN
1045 BUDAPEST, TÓ U. 4.

TÓTH JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1014 BUDAPEST, ÜRI U. 49.

CHAOTIC AND KINETIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. HÁRS and J. TÓTH

It is shown that the *Lorenz equation* can not be transformed into a kinetic differential equation by any of the proper or nonproper orthogonal transformations. It is also shown that no proper orthogonal transformation transforms a model by RÖSSLER into a kinetic differential equation.

Alkalmazott Matematikai Lapok **12** (1986)

FÜGGELÉK

Kezdetben teljes bizonyításokat, később pedig vázlatokat adunk.

A negatív keresztthatás hiányának szükséges feltételét kifejező egyenlőtlenségrendszer a következő:

$$(F.1) \quad c_\alpha c_\beta (c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\gamma) = 0,$$

$$(F.2) \quad -c_\alpha c_\beta (s_\beta + c_\beta c_\gamma) = 0,$$

$$(F.3) \quad c_\beta^2 c_\gamma s_\alpha \equiv 0,$$

$$(F.4) \quad s_\beta (c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.5) \quad c_\beta (3c_\alpha s_\beta + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta - 2c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta - c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha s_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.6) \quad c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma \equiv 0,$$

$$(F.7) \quad c_\beta (-c_\alpha c_\beta s_\alpha + c_\alpha c_\gamma s_\alpha s_\beta + s_\alpha^2 s_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.8) \quad c_\beta s_\alpha (s_\beta + c_\beta c_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.9) \quad c_\alpha c_\beta^2 c_\gamma \equiv 0,$$

$$(F.10) \quad s_\beta (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.11) \quad c_\beta (c_\alpha s_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\beta + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta) \equiv 0,$$

$$(F.12) \quad c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta \equiv 0,$$

$$(F.13) \quad -s_\beta (c_\alpha c_\beta - c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.14) \quad s_\beta (c_\beta s_\alpha + c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta) \equiv 0,$$

$$(F.15) \quad c_\alpha c_\beta (c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.16) \quad -c_\beta s_\alpha (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.17) \quad c_\beta (2c_\alpha s_\alpha s_\gamma + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta - c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta) \equiv 0,$$

$$(F.18) \quad c_\beta c_\gamma \equiv 0.$$

Mivel a bal oldalon s_β fordul elő a leggyakrabban, kezdjük az esetek szétválasztását azzal az esettel, amikor $s_\beta > 0$.

Az esetszétválasztás képleteiben a harmadik azonosító szám a megfelelő aleset azonosítja.

1. $s_\beta > 0$

Ebben az esetben az egyenlőtlenségrendszer az alábbira redukálódik:

$$(F.1.1) \quad c_\alpha c_\beta (c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.2.1) \quad c_\alpha c_\beta (s_\beta + c_\beta c_\gamma) \equiv 0,$$

$$(F.3.1) \quad c_\beta^2 c_\gamma s_\alpha \equiv 0,$$

$$\begin{aligned}
(\text{F.4.1})+(\text{F.12.1}) & c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma = 0, \\
(\text{F.5.1}) & c_\beta (3c_\alpha s_\beta + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta - 2c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta - c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha s_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.6.1})=(\text{F.10.1}) & c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma \cong 0, \\
(\text{F.7.1}) & c_\beta (-c_\alpha c_\beta s_\alpha + c_\alpha c_\gamma s_\alpha s_\beta + s_\alpha^2 s_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.8.1}) & c_\beta s_\alpha (s_\beta + c_\beta c_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.9.1}) & c_\alpha c_\beta^2 c_\gamma \cong 0, \\
(\text{F.11.1}) & c_\beta (c_\alpha s_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\beta + c_\alpha^2 c_\alpha s_\beta) \cong 0, \\
(\text{F.13.1}) & c_\alpha c_\beta - c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma \cong 0, \\
(\text{F.14.1}) & c_\beta s_\alpha + c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta \cong 0, \\
(\text{F.15.1}) & c_\alpha c_\beta (c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.16.1}) & c_\beta s_\alpha (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.17.1}) & c_\beta (2c_\alpha s_\alpha s_\gamma + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta - c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta) \cong 0, \\
(\text{F.18}) & c_\beta c_\gamma \cong 0.
\end{aligned}$$

Tekintsük azt az esetet, amikor $c_\beta > 0$.

1.1. $c_\beta > 0$

Ebben az esetben az egyenlőtlenségrendszer az alábbira redukálódik:

$$\begin{aligned}
(\text{F.1.11}) & c_\alpha (c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.2.11}) & c_\alpha (s_\beta + c_\beta c_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.3.11}) & c_\gamma s_\alpha \cong 0, \\
(\text{F.4.11}) & c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma = 0, \\
(\text{F.5.11}) & 3c_\alpha s_\beta + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta - 2c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta - c_\alpha c_\beta^2 s_\alpha s_\gamma \cong 0, \\
(\text{F.6.11}) & c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma \cong 0, \\
(\text{F.7.11}) & -c_\alpha c_\beta s_\alpha + c_\alpha c_\gamma s_\alpha s_\beta + s_\alpha^2 s_\gamma \cong 0, \\
(\text{F.8.11}) & s_\alpha (s_\beta + c_\beta c_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.9.11}) & c_\alpha c_\gamma \cong 0, \\
(\text{F.11.11}) & c_\alpha s_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\beta + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta \cong 0, \\
(\text{F.13.11}) & c_\alpha c_\beta - c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma \cong 0, \\
(\text{F.14.11}) & c_\beta s_\alpha + c_\alpha s_\gamma - c_\gamma s_\alpha s_\beta \cong 0, \\
(\text{F.15.11}) & c_\alpha (c_\gamma s_\alpha s_\beta - c_\alpha s_\gamma) \cong 0, \\
(\text{F.16.11}) & s_\alpha (c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma) \cong 0,
\end{aligned}$$

$$(F.17.11) \quad 2c_\alpha s_\alpha s_\gamma + c_\alpha^2 c_\gamma s_\beta - c_\gamma s_\alpha^2 s_\beta \cong 0,$$

$$(F.18.11) \quad c_\gamma \cong 0.$$

Két al-aleset fordulhat elő.

1.1.1. $c_\gamma > 0$

Ebben az esetben az egyenlőtlenségrendszer ellentmondásra vezet, mivel (F.3.11) szerint

$$(F.3.111) \quad s_\alpha \cong 0$$

és (F.9.11) szerint

$$(F.9.111) \quad c_\alpha \cong 0.$$

1.1.1.1. Tegyük fel, hogy $s_\alpha > 0$, ekkor (F.6.11) és (F.16.11) szerint

$$(F.6.1111) \quad c_\alpha c_\gamma s_\beta + s_\alpha s_\gamma = 0.$$

Mivel s_α és s_β pozitív, ezért vagy $c_\alpha c_\gamma = s_\gamma = 0$, de akkor $c_\alpha = s_\gamma = 0$, $c_\gamma = s_\alpha = 1$ és

$$(F.4.1111) \quad c_\gamma s_\alpha s_\beta = 0$$

ellentétben azzal, hogy mindegyik tényező pozitív, vagy

$$(F.9.1111) \quad c_\alpha > 0$$

és $s_\gamma < 0$. De ekkor

$$(F.2.1111) + (F.8.1111) \quad s_\beta + c_\beta c_\gamma = 0$$

kellene, hogy fennálljon, ami lehetetlen, mert s_β , c_β és c_γ egyaránt pozitív.

1.1.1.2. Tegyük fel, hogy $s_\alpha = 0$, ekkor

$$(F.4.1112) \quad c_\alpha s_\gamma = 0,$$

de c_α nem lehet nulla, ha $s_\alpha = 0$, tehát $s_\gamma = 0$. Így $c_\gamma = 1$, tehát

$$(F.2.1112) \quad c_\alpha (s_\beta + c_\beta) = 0,$$

amiből következik, hogy $c_\alpha = 0$. De (F.9.111) miatt $c_\alpha = 0$ kellene, hogy álljon ellentmondásban $s_\alpha = 0$ -val.

Most tekintsük át az eseteket. Az 1. táblázatban szereplő esetek hasonlóan vizsgálhatók, mint az előbb, kivéve a csillaggal megjelölt eseteket. Tekintsük ezek egyikét, például az 1.2.3. al-alesetet. Ebben az esetben $s_\beta = 1$ és az egyenlőtlenségrendszer erre redukálódik:

$$(F.4.123) \quad c_\gamma s_\alpha = c_\alpha s_\gamma,$$

$$(F.6.123) \quad c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \cong 0,$$

$$(F.13.123) \quad -c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \leq 0.$$

1. Táblázat. Az esetek szétválasztása

1. $s_\beta > 0$	1.1. $c_\beta > 0$	1.1.1. $c_\gamma > 0$	1.1.1.1. $s_\alpha > 0$
			1.1.1.2. $s_\alpha = 0$
		1.1.2. $c_\gamma = 0$	
	1.2. $c_\beta = 0$	1.2.1. $s_\alpha = 0$	
		1.2.2. $s_\gamma = 0$	
		1.2.3. $s_\alpha \neq 0, s_\gamma \neq 0$ *	
	1.3. $c_\beta < 0$	1.3.1. $c_\gamma < 0$	1.3.1.1. $s_\alpha = 0$
			1.3.1.2. $c_\alpha = 0$
			1.3.1.3. $c_\alpha < 0$
			1.3.2. $c_\gamma = 0$
2. $s_\beta = 0$	2.1. $c_\alpha = 0$ *		
	2.2. $c_\gamma = 0$	2.2.1. $c_\alpha = 0$	
		2.2.2. $s_\alpha = 0$ *	
3. $s_\beta < 0$	3.1. $c_\beta > 0$	3.1.1. $c_\gamma > 0$	3.1.1.1. $c_\alpha > 0$
			3.1.1.2. $c_\alpha = 0$ *
			3.1.2. $c_\gamma = 0$
	3.2. $c_\beta = 0$	3.2.1. $s_\alpha = 0$	
		3.2.2. $s_\gamma = 0$	
		3.2.3. $s_\alpha \neq 0, s_\gamma \neq 0$ *	
	3.3. $c_\beta < 0$	3.3.1. $c_\gamma > 0$	3.3.1.1. $c_\alpha > 0, s_\alpha > 0$
			3.3.1.2. $c_\alpha = 0, s_\alpha = 1$
			3.3.1.3. $c_\alpha = 1, s_\alpha = 0$
			3.3.2. $c_\gamma = 0$

Az (F.4.123) egyenlőtlenségből $\alpha = \gamma$ vagy $\alpha = \gamma + \pi$ következik, de ez utóbbi (F.6.123) miatt lehetetlen. Így $\alpha = \gamma$ és ekkor (F.13.123)-ból kapjuk, hogy $s_\alpha^2 \leq c_\alpha^2$. A behelyettesítés után egy rövid számolás mutatja, hogy ebben az esetben a (4.3a)-ban szereplő elsőfokú tagok együtthatói 0, $-c$ és $-b$; (4.3b)-ben 0, $-a$ és 0; (4.3c)-ben pedig $c_\alpha^2 - s_\alpha^2$, 0 és 1 lesznek. Ezen kilenc szám közül a második és a harmadik negatív kereszthatást fejez ki, tehát a *Lorenz-egyenletet* nem lehet kinetikaivá transzformálni ilyen módon.

Ugyanígyen érvelés alkalmazható az összes többi, csillaggal jelölt esetben is.

EGY MAGAS SZINTŰ HIBAKERESÉSI MÓDSZER PÁRHUZAMOS PROGRAMOKRA

NGUYEN HUU CHIEN

Budapest

A programok hatékony hibakeresésének nagyon fontos feltétele az, hogy rendelkezésünkre álljon egy nyelv, amelynek segítségével a programok várható viselkedését le tudjuk írni bármilyen absztrakt szinten. Jelen dolgozatban egy ilyen nyelvet, az ún. EBES nyelvet mutatjuk be a párhuzamos programok várható viselkedésének leírására. Defináljuk a nyelv pontos szintaxisát, ill. szemantikáját. Megvizsgáljuk a nyelv implementálását. Kidolgozunk egy módszert a hibakereső rendszerek bizonyítottan helyes tervezésére párhuzamos programok esetén.

1. Bevezetés

A nagy, bonyolult és párhuzamos programok hatékony hibakereséséhez szükséges az, hogy tudjuk megfigyelni a program részletes viselkedésének különböző aspektusait egy megfelelően absztrakt perspektívából. Az ilyen megfigyelések segítségével a felhasználó a program gyanús részeire tud összpontosítani. Ehhez viszont az szükséges, hogy rendelkezésünkre álljon olyan nyelv, amelynek segítségével a programok várható viselkedését le tudjuk írni bármilyen absztrakt szinten.

Ez ideig számos nyelvet fejlesztettek ki elsősorban szekvenciális programok várható viselkedésének leírására. Párhuzamos programok várható viselkedésének leírására alkalmas nyelvek találhatók például [1, 2, 3]-ban. Szeretnénk megemlíteni ezek közül az ún. általános útkifejezést [3], amelynek alapja az útkifejezés.

Eredetileg az útkifejezést a párhuzamos programok szinkronizálására alkalmazták. [3]-ban B. BRUEGGE és P. HIBBARD az útkifejezést programhibák keresésére használta fel azzal az észrevétellel, hogy a program és a hibakereső párhuzamos rendszernek tekinthető, amelyeket szinkronizálnak az útkifejezés által specifikált pontoknál. Ha a hibakereső azt találja, hogy bizonyos feltételek (predikátumok) nem teljesülnek a szinkronizált pontoknál, akkor a felhasználó által előírt utasításokat hajtja végre.

Az útkifejezés alkalmas eszköz szekvenciális, valamint párhuzamos programok várható viselkedésének leírására, de a párhuzamos programok esetén sok esetben nehezen és bonyolultan írható le a viselkedés.

A [6, 7] dolgozatokban kiterjesztettük az útkifejezést az ún. keverés művelettel. A kiterjesztett nyelv (az ún. EBE nyelv) segítségével a párhuzamos programok várható viselkedése könnyebben és egyszerűbben írható le.

E dolgozatban az ún. szinkronizációs szimbólumokat [8] felhasználva tovább bővítjük az EBE nyelvet. Az így bővített nyelv nem növeli az EBE, sem az útkifejezés kifejezhetőségi erejét, de ennek segítségével a párhuzamos programok várható viselkedése természetesebb és általában egyszerűbb módon írható le.

A további fejezetekben leírjuk a hibakeresés általános mechanizmusát; definiáljuk a kiterjesztett nyelv pontos szintaxisát, ill. szemantikáját; megvizsgáljuk a nyelv implementálásának kérdését; megadunk egy modellt, amelynek segítségével a hibakereső párhuzamos programok aktuális viselkedését ellenőrizni tudja a nyelv által specifikált várható viselkedés alapján; elemezzük a modellt is, s végül a párhuzamos programok hibakeresésének folyamatát példákon keresztül mutatjuk be.

2. A hibakeresés általános mechanizmusa

Hibakeresési módszerünk azon a gondolaton alapszik, hogy a hibakeresést olyan folyamatnak tekintjük, amelynek során a hibakereső a program futtatása közben a program aktuális viselkedésének modelljeit hozza létre és ezeket összehasonlítja a programnak a felhasználó által előírt várható viselkedésével. Az összehasonlítás eredményeire támaszkodva a felhasználó eszközök segítségével meghatározhatja a hiba helyét, ill. okát [2]. A módszerünk másik alapgondolata az, hogy a hibakeresőt és a programot két konkurrens folyamatnak tekintjük [3]. Ezek alapján a hibakeresési mechanizmusunk a következő.

A felhasználó megadhatja a hibakereső igényeket az alábbi formában:

CHECK

⟨várható viselkedés⟩

ACTION

MATCH ⟨tevékenység-lista⟩

NOMATCH ⟨tevékenység-lista⟩

ahol ⟨várható viselkedés⟩ egy kifejezés, amely specifikálja a program várható viselkedését, és ⟨tevékenység-lista⟩ a hibakereső utasítások listája, amelyeket a felhasználó ír elő. A hibakereső utasítások például lehetnek egy programozási nyelv végrehajtható utasításai (pl. a változók értékeinek kiírása), vagy a program megállítása, stb. Az ACTION rész azt írja le, hogy mit kell csinálnia a hibakeresőnek abban az esetben, amikor a program aktuális viselkedése megegyezik, ill. nem egyezik meg a várható viselkedéssel.

A program futtatása közben a hibakereső megfigyeli az aktuális viselkedését és ezt összehasonlítja a várható viselkedéssel, és az összehasonlítás eredményétől függően végrehajtja az ACTION részben leírt utasításokat.

A következő fejezetekben egy olyan nyelvet definiálunk, amelynek segítségével leírható a párhuzamos programok várható viselkedése (3. és 4. fejezetben), és megadunk egy modellt, amely megfigyeli a program aktuális viselkedését és ellenőrzi azt, hogy az aktuális viselkedés kielégíti-e a várható viselkedést (5. fejezetben).

3. EBES nyelv

3.1. Az EBES szintaxisa

Az EBES (*Expected Behavior Expression including synchronization Symbols*) alapja az útkifejezés [3], amelyet az ún. keverés művelettel (Δ), ill. a „lock” és „signál” szimbólumokkal bővítünk ki. A keverés művelet a konkurrenciát, a lock szimbólum az események kölcsönös kizárását, a signal szimbólum pedig az egyszerű szinkronizációs mechanizmust fejezi ki.

Legyen P az esemény-nevek egy véges halmaza. Események lehetnek az utasítások, az eljárások, az utasítások egy csoportja, vagy üzenetek (messages).

Legyen továbbá LO a párosított lock szimbólumok egy véges halmaza:

$$LO = \{1[,]1, 2[,]2, \dots, k[,]k\},$$

és SI a „wait” és „send” szimbólumok egy véges halmaza:

$$SI = \{\omega_1, \sigma_1, \omega_2, \sigma_2, \dots, \omega_m, \sigma_m\}.$$

Az ω_i és σ_i szimbólumokat úgy értelmezzük, hogy hatásuk ekvivalens legyen a bináris szemaforokéval, azaz ω_i jelentése „várj i jelre”, σ_i -é pedig „küldj i jelet”. Tegyük fel, hogy

$$P \cap SO = P \cap SI = \emptyset.$$

Tegyük fel továbbá, hogy az „egész változó”, „egész szám” és az „aritmetikai kifejezés” fogalmak ismeretesek.

Ezek után az EBES szintaxisát a következőképpen definiáljuk:

i) *Számláló.*

$ACT(p)$ és $TERM(p)$ a számláló, ahol $p \in P$.

Megjegyzés.

$ACT(p)$, ill. $TERM(p)$ valójában olyan függvények, amelyek a p esemény aktiválásának, ill. terminálásának számát adják meg.

ii) *Számláló kifejezés.*

a) Számláló kifejezés: számláló, egész szám és egész változó.

b) Ha $c1$ és $c2$ számláló kifejezés, akkor $(c1)$ és $c1 \text{ op } c2$ is számláló kifejezés, ahol

$$\text{op} \in \{+, -, \times\}.$$

Megjegyzés.

Az operátorok halmaza szükség esetén kibővíthető.

iii) *Számláló reláció.*

Ha $c1$ és $c2$ számláló kifejezés, akkor $c1 \text{ rel } c2$ a számláló reláció, ahol

$$\text{rel} \in \{=, <, >, \leq, \geq\}.$$

iv) *Aritmetikai reláció.*

Ha $a1$ és $a2$ aritmetikai kifejezés, akkor $a1 \text{ rel } a2$ az aritmetikai reláció.

v) *Predikátum.*

a) Predikátum: számláló reláció és aritmetikai reláció.

b) Ha $q1$ és $q2$ predikátum, akkor $(q1)$, $q1 \text{ logicop } q2$ és $\neg q1$ is az, ahol

$$\text{logicop} \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}.$$

vi) *Operandus.*

Ha $p \in P$ és q predikátum, akkor p és $p[q]$ az operandus.

Megjegyzés.

Nem formálisan $p[q]$ azt jelenti, hogy a p esemény csak akkor következhet be, ha a q predikátum igaz értékű.

vii) EBES.

- a) EBES: operandus és minden $s \in SI$.
- b) Ha $E1$ és $E2$ EBES, akkor $(E1; E2)$, $(E1 + E2)$, $E1^*$ és $(E1 \Delta E2)$ is az.
- c) Ha E EBES és $i[,] \in LO$, akkor $i[E]i$ is az EBES.

Megjegyzés.

a) A „;”, „+” és „*” műveletek rendre szekvenciális, alternatíva és ismétlési műveleteket jelent. Így például

$$a; (b + c^*)$$

azt fejezi ki, hogy először a esemény következhet be, utána vagy b vagy c ismétlődően következhet be.

A következőkben, ahol nem okozhat félreértést, elhagyjuk a „;” jelet, így $a; b$ helyett ab fog szerepelni.

b) A „ Δ ” az ún. keverés műveletet jelenti. Például $a \Delta b$ a következő esemény-sorozatok fejezi ki:

$$ab, ba.$$

c) A következőkben, ahol nem okozhat félreértést a $k[E]k$ helyett $[E]_k$ -t írunk.

3.1.1. Definíció. Legyen E egy EBES. Akkor az E által generált nyelvet, jelöljük $L(E)$ -vel, a következőképpen definiáljuk:

Legyen $O = \{o \mid o \text{ az operandus, amely előfordul } E\text{-ben}\}$.

Ha

$$E = a,$$

ahol

$$a \in O \cup LO \cup SI,$$

akkor

$$L(E) = \{a\}.$$

Tegyük fel, hogy

$$L1 = L(E1), \quad L2 = L(E2),$$

akkor

$$L(E1 E2) = L1 L2 = \{xy \mid x \in L1 \text{ és } y \in L2\},$$

$$L(E1 + E2) = L1 + L2 = \{x \mid x \in L1 \text{ vagy } x \in L2\},$$

$$L(E1^*) = L1^* = \sum_{n \geq 0} L1^n, \quad \text{ahol } L1^0 = \{\epsilon\}, \quad L1^n = L1^{n-1} L1,$$

$$L(E1 \Delta E2) = L1 \Delta L2 =$$

$$= \{x_1 y_1 \dots x_n y_n \mid x_1 \dots x_n \in L1 \text{ és } y_1 y_2 \dots y_n \in L2, x_i, y_i \in (O \cup LO \cup SI)^*, i = 1, \dots, n\}.$$

3.1.1. Példa.

$$E1 = (\omega_1 a) \Delta (b \sigma_1), \quad E2 = ([ab]_1) \Delta ([cd]_1).$$

$$L(E1) = \{\omega_1 a b \sigma_1, \omega_1 b a \sigma_1, \omega_1 b \sigma_1 a, b \omega_1 \sigma_1 a, b \sigma_1 \omega_1 a, b \omega_1 a \sigma_1\},$$

$$L(E2) = \{[ab]_1 [cd]_1, [cd]_1 [ab]_1, [a [bc]_1 d]_1, [a [b]_1 cd]_1, \dots\}.$$

3.1.2. Definíció. Ha E olyan EBES, amely nem tartalmazza az LO -, ill. SI -beli elemeket, akkor EBE-nek nevezzük [6, 7].

3.2. Az EBES szemantikája

Az EBES szemantikáját EBE szemantikájára [6, 7] vezetjük vissza.

Először definiáljuk az ún. viselkedési nyelvet egy adott EBES-re.

3.2.1. Definíció. Az LO és SI halmazoknak megfelelően vezessük be a következő EBES-eket [8]:

$$ELO = ([1]_1)^* \Delta ([1]_2)^* \Delta \dots \Delta ([1]_k)^*,$$

$$ESI = ((\sigma_1^+ \omega_1)^* \sigma_1^*) \Delta \dots \Delta ((\sigma_m^+ \omega_m)^* \sigma_m^*),$$

ahol $\sigma^+ = \sigma \sigma^*$.

3.2.2. Definíció. Legyen E egy EBES, akkor az E által leírt viselkedési nyelv a következő:

$$\begin{aligned} \bar{L}(E) = \{x_1 \dots x_n \mid x_i \in O^*, i = 1, \dots, n, \text{ és } \exists y_i \in (LO \cup SI)^*, \\ i = 1, \dots, n, \text{ amelyre } y_1 \dots y_n \in L(ELOAESI) \\ \text{és } x_1 y_1 \dots x_n y_n \in L(E)\}. \end{aligned}$$

3.2.1. Példa.

Legyen $E1$ és $E2$ olyanok, mint a 3.1.1. példában. Ekkor

$$\bar{L}(E1) = ba,$$

ugyanis $b\sigma_1\omega_1a \in L(E1)$ és $\sigma_1\omega_1 \in L(ELOAESI)$.

$$\bar{L}(E2) = \{abcd, cdab\},$$

ugyanis $[ab]_1[cd]_1, [cd]_1[ab]_1 \in L(E2)$ és $[1]_1[1]_1 \in L(ELOASI)$.

Mielőtt az EBE szemantikáját definiáljuk, bebizonyítjuk a következő tételt.

3.2.1. TÉTEL. Bármely E EBES-re létezik olyan E' EBE, amelyre

$$\bar{L}(E) = L(E').$$

Bizonyítás. Megkonstruálhatjuk a kívánt E' EBE-t a következő algoritmussal.

1. lépés.

Konstruáljuk meg az $M1$ és $M2$ automatákat az $O \cup LO \cup SI$ fölött, amelyekre

$$L(M1) = L(E),$$

$$L(M2) = L(ELOAESIAE''),$$

ahol $E'' = (o_1 + \dots + o_n)^*$ ($O = \{o_1, \dots, o_n\}$) (lásd függelék).

2. lépés.

Az $M1$ és $M2$ automatákból konstruáljuk meg az M' automatát, amelyre

$$L(M') = L(M1) \cap L(M2) \quad (\text{lásd [4]}).$$

3. lépés.

Az M' automatából definiáljuk az M automatát a következőképpen:
Legyen

$$M' = (A', a'_0, X', \delta', F'),$$

ahol

$X' = O \cup LO \cup SI$, az X' az automata bemenő halmaza,

A' az állapotok véges halmaza,

a'_0 a kezdő állapot, $a'_0 \in A'$,

F' a végállapotok halmaza, $F' \subset A'$,

δ' az átmenetfüggvény, $\delta': A' \rightarrow X' \times A'$,

akkor legyen $M = (A, a_0, X, \delta, F)$, amelyre

$$A = A', \quad a_0 = a'_0, \quad F = F', \quad X = O,$$

és δ a következőképpen definiálható:

$$\text{i) } \delta(a, o) = \delta'(a, o), \quad \forall a \in A \text{ és } \forall o \in O.$$

$$\text{ii) Ha } a' \in \delta'(a_0, x) \text{ és } a'' \in \delta'(a', o),$$

ahol $o \in O$, $x \in (LO \cup SI)^*$, és $|x| \leq i$ (tegyük fel, hogy i az állapotok száma és $|x|$ az x hosszúságát jelöli), akkor legyen

$$a'' \in \delta(a_0, o).$$

iii) Ha $a' \in \delta'(a, o)$ és $a'' \in \delta'(a', x)$, ahol $o \in O$, $x \in (LO \cup SI)^*$ és $|x| \leq i$, és $a'' \in F$, akkor legyen

$$a'' \in \delta(a, o).$$

$$\text{iv) Ha } a_1 \in \delta'(a, o), a_2 \in \delta'(a_1, x) \text{ és } a_3 \in \delta'(a_2, o'),$$

ahol $o, o' \in O$, $x \in (LO \cup SI)^*$ és $|x| \leq i$, akkor legyen

$$a_2 \in \delta(a, o).$$

4. lépés.

Az M automatából megkonstruáljuk az E' reguláris kifejezést az O fölött, amelyre

$$L(E') = L(M) \quad (\text{lásd [4]}).$$

Most bizonyítsuk be, hogy E' a kívánt EBE.

Könnyű belátni, hogy ha

$$L' = L(E) \cap L(EOAESIAE''),$$

akkor

$$\bar{L}(E) = \{x_1 \dots x_n \mid x_i \in O^*, i = 1, \dots, n, \text{ és } \exists y_i \in (LO \cup SI)^*,$$

$$i = 1, \dots, n, \text{ amelyre } x_1 y_1 \dots x_n y_n \in L'\}.$$

Mivel $L' = L(M')$, így az algoritmus 3. lépése alapján könnyen belátható, hogy

$$\bar{L}(E) = L(M).$$

Ezért a 4. lépés alapján

$$\bar{L}(E) = L(E').$$

Ezek után definiáljuk az EBES szemantikáját.

3.2.3. *Definíció.* Legyen E egy EBES és E' egy EBE, amelyre

$$\bar{L}(E) = L(E'),$$

akkor az E szemantikája az E' szemantikája, azaz a definíció szerint

$$B(E) = B(E'),$$

ahol $B(E) = \{B | B \text{ érvényes konkrét viselkedés az } E\text{-re nézve}\}$ (lásd [6, 7]).

Megjegyzés.

Az E szemantikája jól-definiált, ugyanis a [7]-ben szerepelt 2. tétel alapján igaz az, hogy ha E' és E'' az EBE-k, amelyekre

$$L(E') = L(E''),$$

akkor

$$B(E') = B(E'').$$

4. Az EBES implementálása

Ebben a fejezetben tárgyaljuk azt a kérdést, hogy egy adott E EBES esetén hogyan dönthetjük el, hogy egy adott B aktuális viselkedés kielégíti-e az E által specifikált várható viselkedést, vagyis hogyan dönthetjük el, hogy vajon $B \in B(E)$.

Először definiáljuk az implementáció általános fogalmát, ezután megadunk egy algoritmust, amelynek segítségével egy adott E EBES-ből származtathatjuk az E implementációját, amivel eldönthetjük, hogy egy adott B konkrét viselkedés kielégíti-e az E által előírt várható viselkedést.

Először tekintsünk át néhány szükséges fogalmat, amelyek szerepeltek [6, 7]-ben.

Legyen Q a predikátumok halmaza, és M determinisztikus véges automata,

$$M = (A, a_0, X, \delta, F),$$

ahol $X \subset P \times Q$ (emlékezve, hogy P az esemény-nevek véges halmaza).

Minden $p \in P$ -re a

$$\text{Condition}(p) = \{(a, q) | \delta(a, (p, q)) \text{ definiálva van}\}$$

halmazt a p esemény-név feltételének nevezzük.

Ezek után definiáljuk a következő halmazt:

$$I(M) = \{\langle p, \text{Condition}(p) \rangle | p \in P\},$$

és ezt nevezzük implementációnak.

Definiáltuk implementáció szemantikáját is (lásd [7]).

4.1. *Definíció.* Egy

$$I(M) = \{\langle p, \text{Condition}(p) \rangle | p \in P\}$$

implementációt az adott E EBES implementációjának nevezzük, ha

$$P_E = P \text{ és } B(E) = B(I(M)),$$

ahol

$$P_E = \{p \mid p \text{ az esemény-név, amely előfordul } E\text{-ben}\}$$

és

$$B(I(M)) = \{B \mid B \text{ érvényes konkrét viselkedés az } I(M)\text{-re nézve}\} \text{ lásd [7]}.$$

A következőkben megadunk egy algoritmust, amelynek segítségével megkonstruálhatjuk egy adott E EBES implementációját.

Legyen E egy EBES. Először helyettesítsük az E -ben szerepelt p vagy $p[q]$ operandusokat rendre $e=(p, \text{true})$ - vagy $e=(p, q)$ -vel, és a kapott kifejezést jelöljük Ee -vel.

Legyen

$$X = \{e \mid e \text{ előfordul } Ee\text{-ben}\}.$$

A következőkben az egyszerűség kedvéért nem különböztetjük meg az $e=(p, \text{true})$ -t, ill. $e=(p, q)$ -t a p , ill. $p[q]$ operandusoktól, így Ee -t, ill. X -et az E -től sem.

4.1. Algoritmus

1. lépés.

A 3.2.1. tételben szerepelt algoritmus 1., 2. és 3. lépéseit felhasználva megkonstruáljuk az M automatát, amelyet a 3.2.1. tételben szerepelt algoritmus 3. lépésében kaptunk meg.

2. lépés.

Alakítsuk át az M automatát egy determinisztikus automatává. A kapott automatát ugyanazzal az M -mel jelöljük.

3. lépés.

Minden $p \in P_E$ -re megkonstruáljuk a

$$\text{Condition}(p) = \{(a, q) \mid \delta(a, (p, q)) \text{ definiálva van}\}$$

halmazt.

Így megkapjuk az

$$I(M) = \{\langle p, \text{Condition}(p) \rangle \mid p \in P_E\}$$

implementációt.

4.1. TÉTEL. A 4.1. algoritmusban kapott implementáció valóban az E implementációja.

Bizonyítás. Be kell bizonyítanunk, hogy

$$B(E) = B(I(M)).$$

A 3.2.1. tétel bizonyításában megmutatjuk, hogy létezik egy E' EBE, amelyre

$$\bar{L}(E) = L(E') = L(M).$$

Így a 3.2.3. definíció szerint

$$(4.1.1) \quad B(E') = B(E).$$

Mivel $L(E') = L(M)$, így a [7]-ben szerepelt 4. tétel alapján

$$B(E') = B(I(M)),$$

ezért (4.1.1)-et felhasználva

$$B(E) = B(I(M)),$$

amit bizonyítanunk kellett.

4.1. Példa.

Legyen

$$E = ([a[q]b]_1) \Delta ([cd[r]]_1),$$

ahol a, b, c és d az esemény-nevek és q és r a predikátumok. Konstruáljuk meg az E implementációját.

Először átírjuk az E -t a következő alakra:

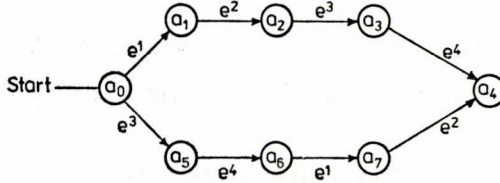
$$Ee = ([e^1 e^2]_1) \Delta ([e^3 e^4]_1),$$

ahol

$$e^1 = (a, q), \quad e^2 = (b, \text{true}),$$

$$e^3 = (c, \text{true}), \quad e^4 = (d, \text{true}).$$

A 4.1. algoritmus 1. és 2. lépését felhasználva megkonstruáljuk az M automatát, amely a 4.1. ábrán látható,



4.1. ábra

ahol a_0 : kezdő állapot,

a_4 : végállapot.

A feltétel-halmazok a következők:

$$\text{Condition}(a) = \{(a_0, q), (a_6, q)\},$$

$$\text{Condition}(b) = \{(a_1, \text{true}), (a_7, \text{true})\},$$

$$\text{Condition}(c) = \{(a_0, \text{true}), (a_2, \text{true})\},$$

$$\text{Condition}(d) = \{(a_3, r), (a_5, r)\}.$$

Így megkapjuk az E $I(M)$ implementációját, amely a következő:

$$I(M) = \{\langle a, \text{Condition}(a) \rangle, \langle b, \text{Condition}(b) \rangle, \\ \langle c, \text{Condition}(c) \rangle, \langle d, \text{Condition}(d) \rangle\}.$$

Az implementáció szemantikája [7] szerint az $I(M)$ -et a következő absztrakt programokkal írhatjuk le:

A program a -ra:

```

 $G := \text{next};$ 
 $\text{act}(a) := \text{act}(a) + 1;$ 
 $\text{valid} := \exists s \exists q (s \in G \wedge q \in Q_E \wedge (s, q) \in \text{Condition}(a) \wedge$ 
 $q(\{\text{act}(p) | p \in P_E\}, \{\text{term}(p) | p \in P_E\}, S));$ 
IF  $\text{valid} = \text{true}$  THEN
  BEGIN
     $\text{next} := \{s | \exists s' \exists q (s' \in G \wedge s = \delta(s', (a, q)) \wedge$ 
 $q(\{\text{act}(p) | p \in P_E\}, \{\text{term}(p) | p \in P_E\}, S) = \text{true})\};$ 
     $\text{term}(a) := \text{term}(a) + 1$ 
  END

```

Hasonlóan írhatjuk le a programokat a b , c és d eseményekre, ahol

$$P_E = \{a, b, c, d\}, \quad S \subset OB$$

(OB az adatok halmaza), $Q_E = \{q | q \text{ predikátum, amely előfordul } E\text{-ben}\}$, és kezdetben

$$\begin{aligned} \text{next} &= \{a_0\}, \\ \text{act}(a) &= \text{act}(b) = \text{act}(c) = \text{act}(d) = 0, \\ \text{term}(a) &= \text{term}(b) = \text{term}(c) = \text{term}(d) = 0. \end{aligned}$$

5. A hibakeresés modellje

Ebben a fejezetben megadunk egy modellt, amelynek segítségével a hibakereső meg tudja figyelni a program aktuális viselkedését a futás alatt és el tudja dönteni azt, hogy a megfigyelt aktuális viselkedés kielégíti-e az EBES által előírt várható viselkedést. A modell alap gondolata az, hogy a hibakereső és a program két konkurrens folyamatnak tekinthető.

[5]-ben megadtunk egy ilyen modellt abban az esetben, amikor a hibakereső és a program szekvenciális programok. Itt módosítjuk ezt a modellt arra az esetre, amikor mind a hibakereső, mind a program párhuzamos folyamat.

5.1. A modell

A modell működésének elve az, hogy amikor egy esemény bekövetkezik, a hibakereső növeli az esemény aktiválásának számát 1-gyel, s ezután ellenőrzi azt, hogy az illető esemény bekövetkezése kielégíti-e az EBES-t, majd végrehajtja a felhasználó által előírt utasításokat. Végül növeli az esemény terminálásának számát 1-gyel.

Ennek megfelelően a modellt a következőképpen adjuk meg.

Legyen E egy EBES, és legyen

$$P_E = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

Ezek után a hibakereső (jelöljük D -vel) a D_1, D_2, \dots, D_n folyamatokból áll, amelyek párhuzamosan működnek. Így D a következő alakban írható:

$$D: D_1 \| D_2 \| \dots \| D_n,$$

ahol D_i szekvenciális folyamat, és ellenőrzi a p_i esemény bekövetkezését, $i=1, 2, \dots, n$.

Tegyük fel, hogy a rendszerünkben csak egy hibakereső van. A rendszert úgy szinkronizáljuk, hogy teljesüljenek a következő tulajdonságok:

- i) D_i folyamatok kölcsönösen kizárják egymást,
- ii) D_i folyamatok csak akkor hajthatók végre, ha a p_i események bekövetkeznek,
- iii) A p_i események csak akkor hajthatók végre, ha a D_i folyamatok befejezik az aktuális viselkedés ellenőrzését és a felhasználó által előírt hibakereső utasításokat,
- iv) A D_i folyamatok végrehajtásának sorrendje egyezzen meg a p_i események bekövetkezésének sorrendjével.

A rendszer szinkronizálására a $P-V$ műveleteket [9, 10] használjuk fel.

Először megkonstruáljuk az E implementációját a 4.1 algoritmussal:

$$I(M) = \{\langle p_i, \text{Condition}(p_i) \rangle | p_i \in P_E\}.$$

Ezek után mindegyik D_i folyamat a következő absztrakt programmal írható le:
A D_i folyamat:

```

CIKLUS     $P(s_i);$ 
            $P(s);$ 
            $G := \text{next};$ 
            $\text{act}(p_i) := \text{act}(p_i) + 1;$ 
            $\text{valid} := \exists a (a \in G \wedge (a, q) \in \text{Condition}(p_i) \wedge$ 
                $q(\{\text{act}(p_i), \text{term}(p_i) | p_i \in P_E\}, S));$ 
            $\left. \begin{array}{l} \text{HA } \text{valid} = \text{igaz AKKOR} \\ \text{next} := \{a | \exists a' \exists q (a' \in G \wedge q \in Q_E \wedge a = \delta(a', (p_i, q)) \wedge \\ q(\{\text{act}(p_i), \text{term}(p_i) | p_i \in P_E\}, S) = \text{igaz})\}; \end{array} \right\} \text{BEGIN}_i$ 

```

hajtsa végre a hibakereső utasításokat;

$$\begin{array}{l} V(r_i); \\ P(n_i); \\ \text{term}(p_i) := \text{term}(p_i) + 1; \\ V(s) \end{array} \} \text{END}_i$$

ISMÉTLÉS

A program a következőképpen írható le:

A program:

a többi utasítások;

$$V(s_i);$$

$$P(r_i);$$

a p_i esemény utasításai;

$$V(n_i);$$

a többi utasítások

ahol

$Q_E = \{q | q \text{ predikátum, amely előfordul } E\text{-ben}\}$,

δ : az M automata átmenetfüggvénye,

s, s_i, r_i, n_i : szemaforok,

és kezdetben

$\text{next} = \{\text{az } M \text{ automata kezdőállapota}\}$,

$\text{act}(p_i) = \text{term}(p_i) = 0$,

$s = 1$,

$s_i = r_i = n_i = 0$,

$i = 1, 2, \dots, n$.

Tegyük fel, hogy az s -, ill. r_i -hez tartozó várakozó sor kiszolgálása „*first-in-first-served*” módon történik. Ennek a feltevésnek célja az, hogy a D_i folyamatok végrehajtásának sorrendje egyezzen meg a p_i események bekövetkezésének sorrendjével.

A következőkben a modellt elemezzük.

5.2. A modell elemzése

Megmutatjuk, hogy a fenti tulajdonságok teljesülnek.

Legyen $nP(s)$, ill. $nV(s)$ a végrehajtott $P(s)$, ill. $V(s)$ műveletek száma. Legyen továbbá $nk(s)$ a kritikus szakaszban levő folyamatok száma, és $nv(s)$ az s -hez tartozó várakozó sorban levő folyamatok számát jelölje.

Fel fogjuk használni a következő lemmát:

5.2.1. LEMMA [9, 10]. Ha a rendszer indításakor az s értéke nem negatív, akkor ha valamikor az s értéke nem negatív, akkor

$$\text{abs}(s) = nv(s).$$

A modellünk tulajdonságaira vonatkozóan bebizonyítjuk a következő állításokat.

5.2.1. ÁLLÍTÁS. A D_i folyamatok kölcsönösen kizárják egymást.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $nk(s) \geq 1$, akkor $nk(s) = 1$.

Nyilvánvaló, hogy

$$(5.2.1) \quad nk(s) = nP(s) - nV(s) - nv(s).$$

Másrészt a $P-V$ műveletek szemantikája [9, 10] szerint

$$(5.2.2.) \quad s = 1 - nP(s) + nV(s),$$

így

$$(5.2.3) \quad s = 1 - nv(s) - nk(s).$$

Mivel $nk(s) \geq 1$ és $nv(s) \geq 0$, ezért (5.2.3)-ból

$$s \leq 0.$$

Így az 5.2.1. lemma szerint

$$(5.2.4) \quad nv(s) = \text{abs}(s) = nP(s) - nV(s) - 1.$$

Az (5.2.1)- és (5.2.4)-ből

$$nk(s) = 1$$

következik.

5.2.2. ÁLLÍTÁS. A $BEGIN_i$ -vel jelölt programszakasz csak akkor hajtható végre, ha a p_i esemény bekövetkezése megkezdődik, $i = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Ez az állítás formálisan a következő alakban írható le:

$$nP(s_i) - nv(s_i) \leq nV(s_i).$$

Tegyük fel az ellenkezőjét:

$$(5.2.5) \quad nP(s_i) - nv(s_i) > nV(s_i).$$

Mivel

$$s_i = nV(s_i) - nP(s_i),$$

így az (5.2.5)-öt felhasználva

$$s_i < -nv(s_i)$$

következik. De ekkor az 5.2.1 lemma szerint

$$nv(s_i) = \text{abs}(s_i) = -s_i,$$

ami ellentmondáshoz vezet.

5.2.3. ÁLLÍTÁS. Az END_i -vel jelölt utasítás csak akkor hajtható végre, ha a p_i esemény végrehajtása befejeződik, $i = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy

$$nP(n_i) - nv(n_i) \leq nV(n_i),$$

ami viszont az 5.2.2. állítás bizonyításához hasonlóan belátható.

5.2.4. ÁLLÍTÁS. A $BEGIN_i$ -vel jelölt programszakasz és a p_i esemény végrehajtása kölcsönösen kizárják egymást, $i = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az $nk(s_i) \neq 0$ és $nk(r_i) \neq 0$ feltételek egyidejűleg nem teljesülhetnek.

Tegyük fel, hogy egyidejűleg

$$nk(s_i) \neq 0 \quad \text{és} \quad nk(r_i) \neq 0.$$

Mivel a rendszerünkben csak egy hibakereső van, így csak egy folyamat, nevezetesen D_i , várakozhat az s_i -hez tartozó várakozó sorban, ezért ha $nk(s_i) \neq 0$, akkor

$$nv(s_i) = 0,$$

így az 5.2.1. lemma alapján

$$s_i \geq 0.$$

Mivel

$$s_i = nV(s_i) - nP(s_i),$$

és nyilvánvaló, hogy

$$nV(s_i) = nP(r_i)$$

mindig fennáll, így

$$(5.2.6) \quad s_i = nP(r_i) - nP(s_i).$$

Másrészt

$$nP(s_i) = nk(s_i) + nV(r_i) \quad (\text{mert } nv(s_i) = 0),$$

így (5.2.6)-ot felhasználva,

$$(5.2.7) \quad nP(r_i) = nk(s_i) + s_i + nV(r_i)$$

következik.

Mivel

$$r_i = nV(r_i) - nP(r_i),$$

így (5.2.7) felhasználásával

$$nk(s_i) + s_i + r_i = 0,$$

amiből

$$r_i \leq 0$$

következik. Ezért az 5.2.1. lemma alapján

$$(5.2.8) \quad nv(r_i) = \text{abs}(r_i) = nP(r_i) - nV(r_i).$$

Másrészt

$$nP(r_i) = nk(r_i) + nv(r_i) + nV(n_i).$$

így, (5.2.8)-at, felhasználva,

$$(5.2.9) \quad nk(r_i) = nV(r_i) - nV(n_i).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$nV(r_i) = nP(n_i),$$

ezt (5.2.9)-be behelyettesítve kapjuk, hogy

$$nk(r_i) = nP(n_i) - nV(n_i) = -n_i,$$

ami ellentmond annak, hogy

$$nk(r_i) \geq 1.$$

5.2.5. ÁLLÍTÁS. A p_i esemény csak akkor hajtható végre, ha a $BEGIN_i$ -vel jelölt programszakasz végrehajtása befejeződik, $i = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Az 5.2.4. állítás szerint elég belátni azt, hogy

$$nP(r_i) - nv(r_i) \leq nV(r_i),$$

ami viszont az 5.2.2. állítás bizonyításához hasonlóan belátható.

5.2.6. ÁLLÍTÁS. Az END_i -vel jelölt utasítás csak akkor hajtható végre, ha a p_i esemény végrehajtása befejeződik, $i = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy

$$nP(n_i) - nv(n_i) \leq nV(n_i).$$

Ez pedig az 5.2.2. állítás bizonyításához hasonlóan bizonyítható.

5.2.7. ÁLLÍTÁS. A rendszer holtponmentes.

Bizonyítás. Bebizonyítjuk a következő tényeket:

a) Minden D_i folyamat egyszerre nem várakozhat az s -hez tartozó várakozó sorban.

Megmutatjuk, hogy ha $nk(s) = 0$, akkor $nv(s) = 0$.

Tegyük fel, hogy

$$nk(s) = 0 \quad \text{és} \quad nv(s) \geq 1$$

fennáll. Ekkor (5.2.1) szerint

$$nv(s) = nP(s) - nV(s),$$

amiből és (5.2.2)-ből

$$(5.2.10) \quad s = 1 - nv(s)$$

következik.

Mivel $nv(s) \geq 1$, így, (5.2.10)-et felhasználva,

$$s \leq 0.$$

Ezért az 5.2.1. lemma alapján

$$nv(s) = \text{abs}(s) = -s,$$

ami ellentmond (5.2.10)-nek.

b) Minden i -re a hibakereső és a program egyidejűleg nem várakozhat az s_i -, ill. r_i -hez tartozó várakozó sorban.

Tegyük fel, hogy valamilyen i -re egyszerre

$$nv(s_i) \neq 0 \quad \text{és} \quad nv(r_i) \neq 0$$

fennáll.

Mivel a rendszerünkben csak egy hibakereső van, így csak egy folyamat, nevezetesen D_i , hajthatja végre a $BEGIN_i$ -vel jelölt programszakaszt. Ezért ha $nv(s_i) \neq 0$, akkor $nk(s_i) = 0$. Azt állítjuk, hogy ekkor $s_i \leq 0$.

Ugyanis ha $s_i > 0$ lenne, akkor a $P-V$ művelet szemantikája [9, 10] szerint $nk(s_i) \neq 0$ lenne, ami lehetetlen az $nk(s_i) = 0$ miatt.

Így az 5.2.1. lemma alapján

$$(5.2.11) \quad nv(s_i) = \text{abs}(s_i) = nP(s_i) - nV(s_i).$$

Mivel

$$nP(s_i) = nv(s_i) + nV(r_i),$$

így (5.2.11) felhasználásával

$$(5.2.12) \quad nV(r_i) - nV(s_i) = 0.$$

Másrészt mindig igaz az, hogy

$$nV(s_i) = nP(r_i).$$

Ezt behelyettesítve (5.2.12)-be kapjuk, hogy

$$nP(r_i) - nV(r_i) = 0,$$

amiből

$$r_i = 0$$

következik. Ezért az 5.2.1. lemma alapján

$$nv(r_i) = \text{abs}(r_i) = 0,$$

ami ellentmond az $nv(r_i) \neq 0$ feltevésünknek.

c) Ha a p_i esemény végrehajtása befejeződik, akkor az END_i -vel jelölt utasítás végrehajtható, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ez a V művelet szemantikájából következik.

5.2.8. ÁLLÍTÁS. A hibakereső helyesen ellenőrzi a program aktuális viselkedését az EBES alapján.

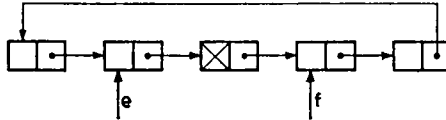
Bizonyítás. Ez nyilvánvaló a [7]-ben szerepelt 4. tétel miatt és azért is, mert az s -, ill. r_i -hez tartozó várakozó sorok „first-in-first-served” módon történő kiszolgálása biztosítja azt, hogy a D_i folyamatok végrehajtásának sorrendje megegyezik a p_i események bekövetkezésének sorrendjével.

6. Példák hibakeresésre

A következő példákban tegyük fel azt, hogy a párhuzamosság ún. „interleaved” módon történik.

6.1. Példa. Termelő—fogyasztó probléma (lásd [9, 10]).

Tekintsünk egy rendszert, amely a P_1, P_2, \dots, P_n termelő folyamatokból és a Q_1, Q_2, \dots, Q_m fogyasztó folyamatokból áll. A folyamatok egy ciklikusan láncolt soron operálnak (6.1. ábra). A termelők termelnek és helyeznek el adatokat a sor-



6.1. ábra

ban, míg a fogyasztók olvasnak és törölnek adatokat a sorból. A folyamatok a következőképpen írhatók le [9, 10]:

A termelő:

x termelése;
adat (f) $\leftarrow x$;
 $f \leftarrow \text{mutató}(f)$;

A fogyasztó:

$e \leftarrow \text{mutató}(e)$;
 $y \leftarrow \text{adat}(e)$;
 y fogyasztása;

ahol

f : az a mutató, amely az utolsó adat elem utáni első üres elemre mutat,

e : az a mutató, amely az első adat elem előtti utolsó üres elemre mutat.

Tegyük fel, hogy a folyamatok párhuzamosan működnek úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek.

i) A termelők csak akkor helyezhetnek be egy adat elemet a sorba, ha van üres elem a sorban.

ii) A fogyasztók csak akkor olvashatnak egy adat elemet a sorból, ha van adat elem a sorban.

iii) Minden folyamat kölcsönösen kizárja egymást.

[9, 10]-ben megadtak egy programot a probléma megoldására. A program a következő:

PÁRBEGIN

termelő: CIKLUS

x termelése;
 $P(r)$;
 $P(w)$;
adat (f) $\leftarrow x$;
 $f \leftarrow \text{mutató}(f)$;
 $V(w)$;

$V(s)$
ISMÉTLÉS

||
fogyasztó: CIKLUS

$P(s);$
 $P(w);$
 $e \leftarrow \text{mutató}(e);$
 $y \leftarrow \text{adat}(e);$
 $V(w);$
 $V(r);$
 y fogyasztása

ISMÉTLÉS

PAREND
ahol kezdetben

$w = 1, \quad s = 0, \quad r = k, \quad \text{és } k \text{ a sor elemeinek száma.}$

Most szeretnénk ellenőrizni azt, hogy ez a program kielégíti-e a felsorolt feltételeket, s ha nem, akkor hol lehet a hiba.

Ennek érdekében először a program várható viselkedését írjuk le a felsorolt feltételek alapján.

Lejyjenek a következő események:

p_x : x termelése,
 p_1 : $\text{adat}(f) \leftarrow x$,
 p_2 : $f \leftarrow \text{mutató}(f)$,
 p_3 : $e \leftarrow \text{mutató}(e)$,
 p_4 : $y \leftarrow \text{adat}(e)$,
 p_y : y fogyasztása.

Ekkor a program egy lehetséges várható viselkedése a következő:

$$E = \left(\bigwedge_{i=1}^n (p_x [p_2 [\text{TERM}(p_2) - \text{TERM}(p_4) < k] p_2]_1)^* \right) \Delta$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^m ([p_3 [\text{TERM}(p_2) - \text{TERM}(p_4) > 0] p_4]_1 p_y)^* \right),$$

amelyben a $[,]_1$ lock szimbólumokat a folyamatok kölcsönös kizárásának leírására használjuk fel. Ezek után a hibakereső igénylés a következő:

CHECK

E

ACTION

MATCH a program végrehajtása folytatódik

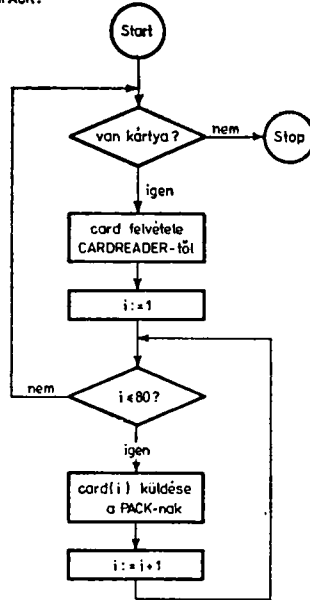
NOMATCH a program megállítása;

a legutoljára bekövetkező esemény nevének kinyomtatása, stb.

6.2. Példa.

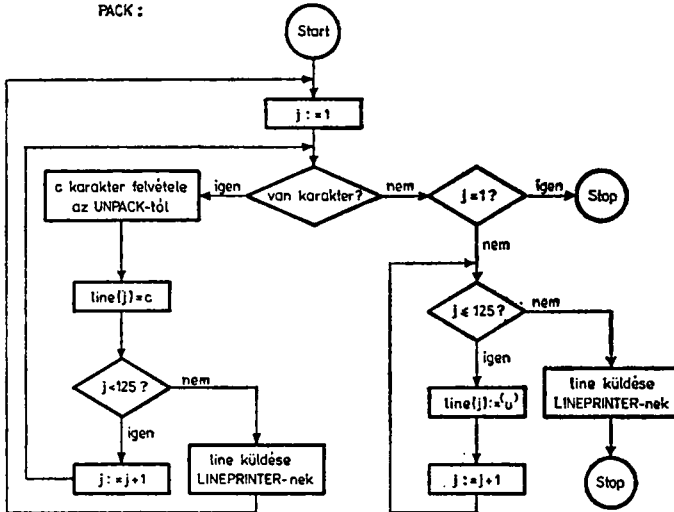
Írjunk egy programot, amely a 80 karaktert tartalmazó sorokat 125 karaktert tartalmazó sorokra alakítja át. A program két folyamatból, a PACK és az UNPACK folyamatokból áll, amelyek a 6.2a., ill. 6.2b. ábrán levő algoritmussal írhatók le, ahol card egy 80 elemű, line pedig egy 125 elemű tömb, és c karakter típusú változó.

UNPACK:



6.2a. ábra

PACK:



6.2b. ábra

Egy lehetséges, CSP nyelven írt, program a következő (lásd [1]):

```

PACK—UNPACK::
[CARDREADER
||UNPACK:: card: (1...80) character;
                i: integer;
    *[CARDREADER?card→i:=1;
      *[i≤80→PACK!card(i); i:=i+1]
    ]
||PACK:: line: (1...125) character;
                j: integer;
                c: character; j:=1;
    [ *[UNPACK?c→line(j):=c;
      [j<125→j:=j+1 □
      j=125→LINEPRINTER!line; j:=1]
    ];
    [j=1→skip □ j>1→*[j≤125→line(j):='□';
                        j:=j+1];
      LINEPRINTER!line
    ]
  ]
||LINEPRINTER]

```

Most szeretnénk ellenőrizni a programot a kommunikációs részre vonatkozóan, vagyis szeretnénk az I/O utasításokat nyomkövetni.

Ennek érdekében legyenek a következő események:

p_1 : CARDREADER?card,
 p_2 : PACK!card(i),
 p_3 : UNPACK?c,
 p_4 : LINEPRINTER!line.

A 6.2. ábrán levő algoritmus alapján leírhatjuk a program egy lehetséges várható viselkedését az I/O utasítások közötti sorrendi kapcsolatokra a következőképpen:

Először az egyes folyamatok várható viselkedését írjuk le.

Az UNPACK folyamat egy lehetséges várható viselkedése a következő:

$$(p_1(p_2[i = \text{ACT}(p_2) \bmod 80]) * p_2[i = 80])^*.$$

A PACK folyamaté:

$$((p_3[j = \text{ACT}(p_3) \bmod 125])^+ p_4[j = 125])^+ p_4[j = 125].$$

Ezek után az egész program várható viselkedését írjuk le.

A CSP I/O műveleteinek szemantikája szerint a bekövetkezésükkor egymásra kell várniuk ahhoz, hogy az ún. „rendezvous”-t együtt hajtsák végre. Esetünkben ha p_2 esemény bekövetkezik, akkor a p_3 eseményre kell várnia. Ezt $\omega_3 p_2$ -vel lehet kifejezni. De ugyanekkor a p_2 -nek azt is kell közölnie, hogy készen áll a „rendezvous” végrehajtására, ezt pedig $p_2 \sigma_2$ -vel lehet kifejezni. Tehát $\omega_3 p_2 \sigma_2$ -vel kifejez-

hető a várás és a „rendezvous” készsége. Hasonlóan az $\omega_2 p_3 \sigma_3$ kifejezést kapjuk a p_3 -ra. Így a program várható viselkedése a következő EBES-sel leírható:

$$E = ((p_1 \sigma_3 (\omega_3 p_2 \sigma_2)^* \omega_3 p_2 \sigma_2)^* \Delta (\sigma_2 (\omega_2 p_3 \sigma_3)^+ p_4)^* p_4)$$

(az egyszerűség kedvéért a predikátumokat elhagytuk), amelyben az $(\omega_3 p_2 \sigma_2)^*$, ill. $(\omega_2 p_3 \sigma_3)^+$ előtti σ_3 , ill. σ_2 használata arra szolgál, hogy kezdetben p_2 és p_3 események bármelyike bekövetkezhesen.

Ezek után a nyomkövetésre vonatkozó igénylés a következő formában írható:

CHECK

E

ACTION

MATCH folytatódik a program;

NOMATCH a program megállítása;
a legutoljára bekövetkező esemény nevének, ill. az i és j értékének kiírása; stb.

IRODALOM

- [1] BAIARDI, F., DE FRANCESCO, N., MATTEOLI, E., STEFANINI, S. and VAGLINI, G., "Development for a concurrent language", *ACM SIGPLAN Notices* 18 (1983).
- [2] BATES, P. C. and WILEDEN, J. C., "High-level debugging of distributed systems: The behavior abstraction approach", *The Journal of Systems and Software* 3 (1983).
- [3] BRUEGGE, B. and HIBBARD, P., "Generalized path expressions: A high-level debugging mechanism", *The Journal of Systems and Software* 3 (1983).
- [4] HOPCROFT, J. E. and ULLMAN, J. D., *Formal Languages and their Relation to Automata* (Addison-Wesley Publishing Company, 1969).
- [5] NGUYEN HUU CHIEN, "Sequential program debugging with path expressions", in: *Proceedings of the Conference on Automata, Languages and Programming Systems*, Salgótarján (Hungary) 1986.
- [6] NGUYEN HUU CHIEN, "EBE: A language for specifying the expected behavior of programs during debugging", in: *Proceedings of the second Conference of Program Designers*, L. Eötvös University, Budapest, 1986.
- [7] NGUYEN HUU CHIEN, "The language EBE and its implementation", *Acta Cybernetica*, megjelenés alatt.
- [8] SHAW, A. C., "Software description with flow expressions", *IEEE Transactions on Software Engineering* SE-4 (1978).
- [9] VARGA, L., *Rendszerprogramok elmélete és gyakorlata* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978).
- [10] VARGA, L., *Rendszerprogramozás III* (ELTE egyetemi jegyzet, Budapest, 1975).

(Beérkezett: 1986. december 9.)

NGUYEN HUU CHIEN
ELTE TTK SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MŰZEUM KRT. 6—8

AN APPROACH TO PARALLEL PROGRAM DEBUGGING

N. H. CHIEN

The debugging is as a process of creating models of actual behavior from the activity of a system and comparing these models to the models of expected behavior held by users. Through these comparisons, debugging tool users attempt to identify sources of errors in system [2]. The paper describes a language called EBES for specifying the expected behavior of parallel programs and a model for supporting the above process. The model is based on an idea that the client program and the debugger are as two concurrent activities [3]. Analysis of the model is also given.

FÜGGELÉK

ÁLLÍTÁS. Legyenek $M1$ és $M2$ véges automaták X fölött,

$$M1 = (A1, a_0^1, X, \delta1, F1),$$

$$M2 = (A2, a_0^2, X, \delta2, F2).$$

Konstruáljunk olyan M automatát, amelyre

$$L(M) = L(M1) \Delta L(M2) = \{x_1 y_1 \dots x_n y_n \mid x_1 \dots x_n \in L(M1)$$

$$\text{és } y_1 \dots y_n \in L(M2),$$

$$x_i, y_i \in X^*, i = 1, \dots, n\}.$$

Bizonyítás. Legyen X' véges halmaz, amelyre

$$X \cap X' = \emptyset,$$

és legyen olyan f egy-egyértelmű leképezés az X és X' között, amelyre $f(X) = X'$.

Minden $x \in X$ -re a továbbiakban legyen $f(x) = x'$.

Az M automatát a következőképpen definiáljuk:

1. Az $M1$ -ből definiáljuk az N automatát:

$$N = (A1, a_0^1, X', \delta^*, F1),$$

és

$$b \in \delta^*(a, x') \Leftrightarrow b \in \delta1(a, x), \quad \forall a \in A1, \quad x' \in X'$$

(F.1. ábra).



F.1. ábra

2. Az N automatából definiáljuk az $M1'$ automatát:

$$M1' = (A1, a_0^1, X \cup X', \delta1, F1),$$

és

$$a) \quad \delta1'(a, x') = \delta^*(a, x'), \quad \forall a \in A1, \quad \forall x' \in X',$$

$$b) \quad \delta1'(a, x) = \{a\}, \quad \forall a \in A1, \quad \forall x \in X.$$

(F.2. ábra).



F. 2. ábra

3. Az $M2$ -ből definiáljuk $M2'$ automatát:

$$M2' = (A2, a_0^2, X \cup X', \delta2', F2),$$

és

$$a) \delta_2'(a, x) = \delta_2(a, x), \quad \forall a \in A_2, \quad \forall x \in X,$$

$$b) \delta_2'(a, x') = \{a\}, \quad \forall a \in A_2, \quad \forall x' \in X'$$

(F.3. ábra).



F.3. ábra

4. Az M_1' - és M_2' -ből konstruáljunk M' automatát, amelyre

$$L(M') = L(M_1') \cap L(M_2').$$

5. Végül az M -ből konstruáljuk az M automatát a következő módon:
Legyen

$$M' = (A', a'_0, X \cup X', \delta', F'),$$

akkor

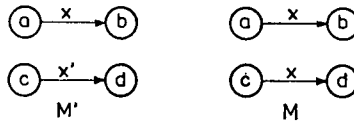
$$M = (A', a'_0, X, \delta, F'),$$

amelyre

$$a) \delta(a, x) \supset \delta'(a, x), \quad \forall a \in A', \quad \forall x \in X,$$

$$b) \text{ ha } b \in \delta'(a, x') \text{ akkor legyen } b \in \delta(a, x)$$

ahol $f(x) = x'$ (F.4. ábra).



F.4. ábra

Most bebizonyítjuk, hogy

$$L(M) = L(M_1) \Delta L(M_2).$$

Az állítás a következőkből következik:

$$i) \quad x_1 \dots x_n \in L(M_1) \Leftrightarrow x'_1 \dots x'_n \in L(N).$$

$$ii) \quad L(M') = \{u_1 v_1 \dots u_n v_n \mid u_i \in X^*, \quad v_i \in X'^*, \quad i = 1, \dots, n, \text{ és}$$

$$u_1 \dots u_n \in L(M_2),$$

$$v_1 \dots v_n \in L(N)\}.$$

$$iii) \quad u_1 v_1 \dots u_n v_n \in L(M) \Leftrightarrow u_1 v'_1 \dots u_n v'_n \in L(M'),$$

$$u_i, v_i \in X^*, \quad v'_i \in X'^*, \quad \text{és } f(v_i) = v'_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$(\text{ha } v = x_1 \dots x_m \in X^*, \text{ akkor } f(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1) \dots f(x_m),$$

$$x_i \in X, \quad i = 1, \dots, m),$$

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat a nyomdába érkezett: 1987. február 24. — Terjedelem: 14,35 (A/5) ív
87-1073—Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Surányi Tibor igazgató

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban kell beküldeni.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell, hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezésekképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtevételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldatra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

- [1] Farkas, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 124 (1902) 1—27.
- [2] Kéri, G., „DUALSIMP”, rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertető 2. 1973. május) 19—20.
- [3] Prékopa, A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról”, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
- [4] Prabhu, N. U., “Recent research on the ruin problem of collective risk theory”, in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.
- [5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számaikat szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak ezek költsége — nyomtatott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terhelő.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Kertész Viktor</i> : Zérushoz tartó megoldások létezésének feltételei homogén lineáris differenciálegyenletek esetében	191
<i>László Lajos</i> : Diszkrét dinamikus rendszerek előállítása adott input és output idősorból.....	207
<i>Benczúr András</i> : Az információ mérése relációs adatbázisokban	213
<i>Kiss Attila</i> : A szeparációs elv alkalmazása lineáris optimalizálási feladatban színes zaj esetén	227
<i>C. Fodor János</i> : A logaritmikusan konkáv eloszlások és az extrémális eloszlások kapcsolata-ról	239
<i>Bernau Heinz, Lógó János és Vásárhelyiné Szabó Anna</i> : Rúdszerkezetek méretezése több-célfüggvényes matematikai programozással	249
<i>Égertné Molnár Éva</i> : A RAS modell és érzékenységi vizsgálata	263
<i>Klafszky Emil és Terlaky Tamás</i> : Irányított matroidok megengedettségi feladatának egy új megközelítése	279
<i>Terlaky Tamás</i> : Egy új kvadratikus programozási algoritmus	283
<i>Csirík János és Galambos Gábor</i> : Nemlineáris sorozatok ládapakolási feladatoknál	295
<i>Tóth János és Hárs Vera</i> : Oszcilláló reakciók előállítása linearizáltjukból.....	309
<i>Hárs Vera és Tóth János</i> : Kaotikus és kinetikai differenciálegyenletek	317
<i>Nguyen Huu Chien</i> : Egy magas szintű hibakeresési módszer párhuzamos programokra	329

INDEX

<i>Kertész, V.</i> , Conditions for the existence of solutions converging to zero in the case of homogeneous linear differential equations	191
<i>László, L.</i> , Reproducing of discrete dynamical systems from the input-output variables.....	207
<i>Benczúr, A.</i> , Information measurement in relational databases	213
<i>Kiss, A.</i> , The application of the separation principle for the linear continuous systems with coloured noise	227
<i>Fodor, J. C.</i> , On the connection between logarithmic concave distributions and extreme-value distributions	239
<i>Bernau, H., Lógó, J. and Vásárhelyi, A.</i> , Analysis of beam structures by multicriterion optimization	249
<i>Égert, É.</i> , The model RAS and investigation of its sensitivity	263
<i>Klafszky, E. and Terlaky, T.</i> , A new approach to the feasibility problem of oriented matroids	279
<i>Terlaky, T.</i> , A new algorithm for quadratic programming	283
<i>Csirík, J. and Galambos, G.</i> , Nonlinear sequences for bin packing	295
<i>Tóth, J. and Hárs, V.</i> , Constructing oscillatory reactions from their linearized form.....	309
<i>Hárs, V. and Tóth, J.</i> , Chaotic and kinetic differential equations	317
<i>Chien, N. H.</i> , An approach to parallel program debugging	329

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI
TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ
PRÉKOPA ANDRÁS

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTES
ARATÓ MÁTYÁS

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

BENCZUR ANDRÁS, CSISZÁR IMRE, DEMETROVICS JÁNOS, FARKAS MIKLÓS,
GALÁNTAI AURÉL, GYIRES BÉLA, HATVANI LÁSZLÓ, HEPPES ALADÁR,
KÁTAI IMRE, KIS OTTÓ, MAROS ISTVÁN, TANDORI KÁROLY, TUSNÁDY GÁBOR,
VARGA LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS (technikai szerkesztő)

MUNKATÁRSÁK

BAJCSAY PÁL, BALLA KATALIN, BÉKÉSSY ANDRÁS, CSÁKI PÉTER,
CSIRIK JÁNOS, DÉNES JÓZSEF, DÖMÖLKI BÁLINT, ELBERT ÁRPÁD,
FORGÓ FERENC, GÉCSEG FERENC, GERGELY JÓZSEF, GESZTELYI ERNŐ,
GYÖRFFY LÁSZLÓ, KLAFSZKY EMIL, KÓSA ANDRÁS, KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA,
LÁSZLÓ ZOLTÁN, MIKOLÁS MIKLÓS, MOGYORÓDI JÓZSEF, NÉMETH GÉZA,
NEMETZ TIBOR, RÉVÉSZ PÁL, RÓZSA PÁL, STAHL JÁNOS, SZÉP JENŐ,
TANKÓ JÓZSEF, TOMKÓ JÓZSEF, TÓKE PÁL, VINCZE ENDRE

XII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1986

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Benczúr András</i> : Az információ mérése relációs adatbázisokban	213
<i>Bernau Heinz, Lógó János és Vásárhelyiné Szabó Anna</i> : Rűdszerkezetek méretezése több-célfüggvényes matematikai programozással	249
<i>Burkauskas Antanas</i> : Valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modellek konvexitási problémájáról	77
<i>C. Fodor János</i> : A logaritmikusan konkáv eloszlások és az extrémális eloszlások kapcsolatáról	239
<i>Csirik János és Galambos Gábor</i> : Nemlineáris sorozatok ládapakolási feladatoknál	295
<i>Égertné Molnár Éva</i> : A RAS modell és érzékenységi vizsgálata	263
<i>Fazekas Gábor és Pethő Attila</i> : Permutációs forráskódolás	107
<i>Galambos Gábor és Csirik János</i> : Nemlineáris sorozatok ládapakolási feladatoknál	295
<i>Hárs Vera és Tóth János</i> : Oszcilláló reakciók előállítása linearizáltjukból	309
<i>Hárs Vera és Tóth János</i> : Kaotikus és kinetikai differenciálegyenletek	317
<i>Kertész Viktor</i> : Másodrendű differenciálegyenletek parciális aszimptotikus becslései	91
<i>Kertész Viktor</i> : Zérushoz tartó megoldások létezésének feltételei homogén lineáris differenciálegyenletek esetében	191
<i>Kiss Attila</i> : A szeparációs elv alkalmazása lineáris optimalizálási feladatban színes zaj esetén	227
<i>Klafszyk Emil és Terlaky Tamás</i> : Magyar módszer típusú algoritmusok lineáris programozási feladatok megoldására	1
<i>Klafszyk Emil és Terlaky Tamás</i> : Irányított matroidok megengedettségi feladatának egy új megközelítése	279
<i>Kutas Tibor és Tóth János</i> : A balatoni fitoplankton dinamikájának egy sztochasztikus modellje	143
<i>László Lajos</i> : Diszkrét dinamikus rendszerek előállítása adott input és output idősből	207
<i>Lógó János, Bernau Heinz és Vásárhelyiné Szabó Anna</i> : Rűdszerkezetek méretezése több-célfüggvényes matematikai programozással	249
<i>Maga Ferenc és Vízvári Béla</i> : Egy speciális 0–1-es feladat halmazfedési feladattá relaxálása	41
<i>Nguyen Huu Chien</i> : Egy magas szintű hibakeresési módszer párhuzamos programokra	329
<i>Pethő Attila és Fazekas Gábor</i> : Permutációs forráskódolás	107
<i>Prill Mária</i> : Döntésektől függő ellátási feladatok dekompozíciós megoldásakor fellépő lineáris programozási feladat elemzése	51
<i>Rapsák Tamás és Szenthe János</i> : A mechanikai erőegyensúly és a nemlineáris programozás kapcsolatáról	161
<i>Sebő András</i> : Hálózati folyam módszerek alkalmazása a terminálidő beosztására	15
<i>Szenthe János és Rapsák Tamás</i> : A mechanikai erőegyensúly és a nemlineáris programozás kapcsolatáról	161
<i>Szenteleki Károly és Szidarovszky Ferenc</i> : Szőlő telepítése és feldolgozása többcéli optimalizációs modell alapján	63
<i>Szidarovszky Ferenc és Szenteleki Károly</i> : Szőlő telepítése és feldolgozása többcéli optimalizációs modell alapján	63
<i>Terlaky Tamás és Klafszyk Emil</i> : Magyar módszer típusú algoritmusok lineáris programozási feladatok megoldására	1
<i>Terlaky Tamás és Klafszyk Emil</i> : Irányított matroidok megengedettségi feladatának egy új megközelítése	279
<i>Terlaky Tamás</i> : Egy új kvadratikus programozási algoritmus	283
<i>Tóth János és Kutas Tibor</i> : A balatoni fitoplankton dinamikájának egy sztochasztikus modellje	143
<i>Tóth János és Hárs Vera</i> : Kaotikus és kinetikai differenciálegyenletek	317
<i>Tóth János és Hárs Vera</i> : Oszcilláló reakciók előállítása linearizáltjukból	309
<i>Vásárhelyiné Szabó Anna, Bernau Heinz és Lógó János</i> : Rűdszerkezetek méretezése több-célfüggvényes matematikai programozással	249
<i>Veres Sándor</i> : Maximum likelihood becslések aszimptotikus nem normalitásáról	125
<i>Vincze Endre</i> : A gazdaságosság függvényegyenlet-rendszerének egyik általánosítása és annak megoldása	175
<i>Vízvári Béla és Maga Ferenc</i> : Egy speciális 0–1-es feladat halmazfedési feladattá relaxálása	41
<i>Vu Duc Thi</i> : Relációs adatmodell antikulcsairól	111
<i>Könyvismertetés</i>	189

INDEX

<i>Benczúr, A.</i> , Information measurement in relational databases.....	213
<i>Bernau, H., Lógó, J. and Vászárhelyi, A.</i> , Analysis of beam structures by multicriterion optimization.....	249
<i>Burkauskas, A.</i> , On convexity problems of the probabilistic constrained stochastic programming problems.....	77
<i>Chien, N. H.</i> , An approach to parallel program debbuging.....	329
<i>Csirik, J. and Galambos, G.</i> , Nonlinear sequences for bin packing.....	295
<i>Égert, É.</i> , The model RAS and investigation of its sensitivity.....	263
<i>Fazekas, G. and Pethő, A.</i> , Permutational source coding.....	107
<i>Fodor, J. C.</i> , On the connection between logarithmic concave distributions and extreme-value distributions.....	239
<i>Galambos, G. and Csirik, J.</i> , Nonlinear sequences for bin packing.....	295
<i>Hárs, V. and Tóth, J.</i> , Constructing oscillatory reactions from their linearized form.....	309
<i>Hárs, V. and Tóth, J.</i> , Chaotic and kinetic differential equations.....	317
<i>Kertész, V.</i> , Partial stability investigations of differential equations of second order.....	91
<i>Kertész, V.</i> , Conditions for the existence of solutions converging to zero in the case of homogeneous linear differential equations.....	191
<i>Kiss, A.</i> , The application of the separation principle for the linear continuous systems with coloured noise.....	227
<i>Klafszky, E. and Terlaky, T.</i> , Variants of the Hungarian Method for linear programs.....	1
<i>Klafszky, E. and Terlaky, T.</i> , A new approach to the feasibility problem of oriented matroids.....	279
<i>Kutas, T. and Tóth, J.</i> , A stochastic model of the phytoplankton dynamics in lake Balaton.....	143
<i>László, L.</i> , Reproducing of discrete dynamical systems from the input-output variables....	207
<i>Lógó, J., Bernau, H. and Vászárhelyi, A.</i> , Analysis of beam structures by multicriterion optimization.....	249
<i>Maga, F. and Vizvári, B.</i> , The relaxation of a special polynomial zero-one programming problem to set covering problems.....	41
<i>Pethő, A. and Fazekas, G.</i> , Permutation source coding.....	107
<i>Prill, M.</i> , The analysis of linear programming problems resulting from the decompositional solving of supply problems dependent on decisions.....	51
<i>Rapcsák, T. and Szenthe, J.</i> , On the connection between the mechanical equilibrium and the nonlinear programming.....	161
<i>Sebő, A.</i> , Application of network flow methods in the scheduling of terminal sessions.....	15
<i>Szenthe, J. and Rapcsák, T.</i> , On the connection between the mechanical equilibrium and the nonlinear programming.....	161
<i>Szenteleki, K. and Szidarovszky, F.</i> , Multiobjective optimization model for vine planting and processing.....	63
<i>Szidarovszky, F. and Szentleki, K.</i> , Multiobjective optimization model for vine planting and processing.....	63
<i>Terlaky, T. and Klafszky, E.</i> , Variants of the Hungarian Method for linear programs.....	1
<i>Terlaky, T. and Klafszky, E.</i> , A new approach to the feasibility problem of oriented matroids.....	279
<i>Terlaky, T.</i> , A new algorithm for quadratic programming.....	283
<i>Tóth, J. and Kutas, T.</i> , A stochastic model of the phytoplankton dynamics in lake Balaton.....	143
<i>Tóth, J. and Hárs, V.</i> , Constructing oscillatory reactions from their linearized form.....	309
<i>Tóth, J. and Hárs, V.</i> , Chaotic and kinetic differential equations.....	317
<i>Vászárhelyi, A., Bernau, H. and Lógó, J.</i> , Analysis of beam structures by multicriterion optimization.....	249
<i>Veres, S.</i> , On the asymptotic non-normality of the maximum likelihood estimations.....	125
<i>Vincze, E.</i> , A generalization of the system of functional equations determining the effectiveness of a production process and its solution.....	175
<i>Vizvári, B. and Maga, F.</i> , The relaxation of a special polynomial zero-one programming problem to set covering problem.....	41
<i>Vu Duc Thi</i> , On antikeys of the relational datamodel.....	111
<i>Book reviews</i>	189

